FOR THE PEOPLE
FOR EDVCATION
FOR SCIENCE

LIBRARY
OF
THE AMERICAN MUSEUM
OF
NATURAL HISTORY

Bound at
A.M.N.H.
1924

Sitzungsberichte

5.06(43.36)M1

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München

Jahrgang 1915

München 1915
Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

24-94728 May 8

Akademische Buchdruckerei von F. Straub in München.

Inhaltsübersicht.

I. Sitzungsberichte.

Seite

9. Januar: Pringsheim, Deybe, Czuber 1*

6. März: Lagally, Finsterwalder, Mittag-Leffler, Pringsheim 2*

1. Mai: Liebmann, Finsterwalder, Föppl, Voss, Böhm, Száz 5*

5. Juni: Frank, Rothpletz 7*

3. Juli: Frank, Landau, v. Dyck 8*

6. November: Schmidt, Stromer v. Reichenbach, Endrös, Pringsheim 9*

4. Dezember: Fischer, Mittag-Leffler, Sommerfeld . . 11*

Verzeichnis der im Jahre 1915 eingelaufenen Druckschriften . . 13*

II. Abhandlungen.

F. Böhm: Beiträge zum Äquivalenzproblem der Raumkurven . 257

E. Czuber: Eine geometrische Aufgabe 165

P. Debye: Die Konstitution des Wasserstoff-Moleküls . . . 1

A. Endrös: Die Gezeiten, Seiches und Strömungen des Meeres bei Aristoteles 355

S. Finsterwalder: Eine neue Lösung der Grundaufgabe der Luftphotogrammetrie 67

S. Finsterwalder: Über die Ausgleichung des zukünftigen bayerischen Hauptdreiecksnetzes 199

H. Fischer: Über die Einwirkung von Brom auf einige Pyrrolderivate 401

A. Föppl: Die Lösung der Spannungsaufgabe für das Ausnahmefachwerk 211

Seite

O. Frank: Anwendung des Prinzips der gekoppelten Schwingungen auf einige physiologische Probleme 289

M. Lagally: Zur Theorie der Wirbelschichten 79

E. Landau: Über Dirichlets Teilerproblem 317

H. Liebmann: Die Liesche Geraden-Kugeltransformation und ihre Verallgemeinerungen 189

G. Mittag-Leffler: Über die analytische Darstellung eines eindeutigen Zweiges einer monogenen Funktion . . . 109

G. Mittag-Leffler: Über einen Satz des Herrn Serge Bernstein 419

A. Pringsheim: Über eine charakteristische Eigenschaft sogenannter Treppenpolygone und deren Anwendung auf einen Fundamentalsatz der Funktionentheorie 27

A. Pringsheim: Nachtrag zu der vorstehenden Abhandlung . 58

A. Pringsheim: Über die Weierstraßsche Produktdarstellung ganzer transzendenter Funktionen und über bedingt konvergente unendliche Produkte 387

M. Schmidt: Senkungserscheinungen an der Frauenkirche in München und Lageänderung von Hauptdreieckspunkten in Südbayern (mit 1 Tafel) 329

A. Sommerfeld: Zur Theorie der Balmerschen Serie . . . 425

A. Sommerfeld: Die Feinstruktur der Wasserstoff- und der Wasserstoff-ähnlichen Linien 459

O. Szász: Über eine besondere Klasse unendlicher Kettenbrüche mit komplexen Elementen 281

A. Voss: Über die Transformation linearer Formen und die Lösung linearer Gleichungen 231

Sitzungsberichte

der mathematisch-physikalischen Klasse
der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
1915.

Sitzung am 9. Januar.

1. Herr Alfred Pringsheim spricht:

Über eine charakteristische Eigenschaft sogenannter Treppenpolygone und deren Anwendung auf einen Fundamentalsatz der Funktionentheorie.

Ein von Weierstrass herrührender Hauptsatz besagt, daß ein Funktionselement, das sich auf jedem innerhalb eines einfach zusammenhängenden Bereiches verlaufenden Wege analytisch fortsetzen läßt, eine eindeutige monogene Funktion regulären Verhaltens für jenen Bereich definiert. Der Beweis bietet keine besondere Schwierigkeit, wenn man sich auf Bereiche einfacher Art beschränkt, etwa solche, die von einer einfach geschlossenen konvexen Kurve begrenzt sind. Er wird jedoch reichlich kompliziert und undurchsichtig, wenn man beliebige einfach zusammenhängende Bereiche in Betracht zieht, ja selbst dann, wenn man diese zunächst durch sogenannte Treppenpolygone approximiert und dem weiteren Beweis diese spezielle Gattung zu Grunde legt. Die in Frage stehende charakteristische Eigenschaft solcher Treppenpolygone besteht nun in der vom Verfasser nachgewiesenen Möglichkeit einer besonders gearteten Zerschneidung, welche dem Beweis des fraglichen funktiontheoretischen Hauptsatzes äußerste Einfachheit und Übersichtlichkeit verleiht. (Erscheint in den Sitzungsberichten.)

2. Herr A. Sommerfeld legt eine Abhandlung von Prof. P. Debye in Göttingen vor:

Die Konstitution des Wasserstoff-Moleküls.

Auf Grund des Bohrschen Modelles für das Wasserstoffatom wird die Dispersion des Wasserstoffgases theoretisch berechnet und mit den hierfür empirisch gefundenen Werten verglichen. Der Vergleich ergibt eine volle Bestätigung der Quantenhypothese einerseits, des hier zu Grunde gelegten Modelles andererseits. (Erscheint in den Sitzungsberichten.)

3. Herr von Dyck legt eine kleine Note von E. Czuber, Wien vor:

Eine geometrische Aufgabe.

Es handelt sich um die Diskussion der Anzahl der Lösungen der Aufgabe, einem Dreieck alle Dreiecke einzubeschreiben, die zu einem gegebenen Dreieck ähnlich sind.

(Erscheint in den Sitzungsberichten.)

Sitzung am 6. März.

1. Herr Finsterwalder legt vor eine Abhandlung von Max Lagally:

Zur Theorie der Wirbelschichten.

Im Anschluß an die von Helmholtz zur Erklärung unstetiger Flüssigkeitsbewegungen eingeführten Wirbelschichten werden die einfachsten stationären Gebilde dieser Art untersucht und ihre durch eine periodische Störung veranlaßte Auflösung in Wirbelreihen, die mit den von v. Kármán beschriebenen der Gestalt nach übereinstimmen, verfolgt. Auf ihre Bildung hat die Flüssigkeitsreibung keinen wesentlichen Einfluß; es zeigt sich vielmehr die Möglichkeit der Entstehung von Wirbelschichten in einer reibungslosen Flüssigkeit.

(Erscheint in den Sitzungsberichten.)

2. Herr Finsterwalder spricht über

Eine neue Lösung der Grundaufgabe der Luftphotogeometrie.

(Erscheint in den Sitzungsberichten.)

3. Herr Pringsheim legt für die Sitzungsberichte vor eine Abhandlung des Herrn Mittag-Leffler in Stockholm:

Über die analytische Darstellung eines eindeutigen Zweiges einer monogenen Funktion.

Die vorliegende Arbeit, die sich in der Tendenz einer ganzen Reihe größerer Abhandlungen des Verfassers über das gleiche Thema anschließt, liefert eine neue und zwar überaus einfache Methode zur Behandlung des fraglichen Problems. Um für die analytische Funktion $F(x)$, welche durch das Funktionselement

$$\mathfrak{P}(x-a)=\sum_{0}^{\infty}{}^{\nu}c_{\nu}(x-a)^{\nu}$$

definiert wird, einen über den Konvergenzkreis von $\mathfrak{P}(x-a)$ hinaus brauchbaren Ausdruck zu gewinnen, wird die Substitution gemacht: $x-a=(x'-a)\cdot f(u)$, wo $f(u)$ eine für $u<1$, unter Umständen auch nur für $u<1$ reguläre Funktion bedeutet, die überdies den Bedingungen genügt: $f(0)=0$, $f(1)=1$. Wird sodann $\mathfrak{P}(x'-a)\cdot f(u))$ nach Potenzen von u geordnet und schließlich $u=1$ gesetzt, so geht x' in x über und es resultiert eine Entwickelung von $\mathfrak{P}(x-a)$ nach ganzen rationalen Funktionen von x, deren Konvergenzbereich im allgemeinen über denjenigen der Potenzreihe $\mathfrak{P}(x-a)$ wesentlich hinausragt. Seine Gestalt hängt teils von der Lage der singulären Punkte von $F(x)$ ab, teils auch von der Gestalt derjenigen Kurve, welche durch die Abbildung des Kreises $u=1$ vermittelst der Funktion $w=f(u)$ erzeugt wird. Enthält $f(u)$ noch einen Parameter α, so kann durch passende Wahl dieses letzteren erreicht werden, daß der zu $f(u,\alpha)$ gehörige Konvergenzstern jeden Bereich enthält, der

ganz innerhalb des zum Punkte a gehörigen Hauptsterns liegt. Es lassen sich auf diesem Wege sogar Entwickelungen sehr einfacher Art angeben, die innerhalb des ganzen Hauptsterns der Funktion $F(x)$ konvergieren, ohne daß dieser freilich den wahren Konvergenzbereich der betreffenden Entwickelungen zu bilden braucht, die dann also eventuell noch außerhalb des Hauptsterns konvergieren können, ohne daselbst die Funktion $F(x)$ darzustellen. Es zeigt sich, daß dieser Übelstand auch nicht vermieden werden kann, wenn man bei der Auswahl der Funktionen $f(u)$ von ganzen rationalen zu ganzen transzendenten Funktionen übergeht.

In einem Anhange wird für einen mit den vorstehenden Untersuchungen im Zusammenhange stehenden Satz des Herrn Marcel Riesz ein von Herrn Hardy herrührender Beweis mitgeteilt.

4. Herr Pringsheim legt für die Sitzungsberichte vor:

Nachtrag zu der Mitteilung vom 9. I. 15.

1. Der in dem Handbuche des mathematischen Unterrichts von Killing und Hovestadt bewiesene Satz, daß jedes Polygon „Diagonalen" besitzt, die ganz im Innern verlaufen und sich nicht schneiden, kann dazu dienen, eine Zerlegung in Dreiecke zu ermöglichen, die für solche beliebige Polygone dasselbe leistet, wie für Treppenpolygone die in der obengenannten Mitteilung abgeleitete Zerlegung in Rechtecke.

2. Der in der genannten Mitteilung bewiesene Weierstraßsche Satz besagt: Wenn das Funktionselement $\mathfrak{P}(x - x_0)$ auf jedem Wege innerhalb eines einfach zusammenhängenden Bereiches B fortgesetzt werden kann, so definiert dasselbe eine in B eindeutige analytische Funktion. Es genügt nicht, wenn nur feststeht, daß $\mathfrak{P}(x - x_0)$ sich nach jedem Punkte von B analytisch fortsetzen läßt. Diese aus allgemeinen Überlegungen leicht abzuleitende Tatsache wird durch ein besonders einfach geartetes, für Lehrzwecke geeignetes Beispiel belegt.

Sitzung am 1. Mai.

1. Herr S. Finsterwalder legt vor eine Abhandlung von Heinrich Liebmann:

Die Lie'sche Geraden-Kugeltransformation und ihre Verallgemeinerung.

Es werden die einfachen, der projektiven Geometrie entnommenen Grundgedanken aufgedeckt, auf welchen diese Transformation und manche bisher wenig beachtete Verallgemeinerungen derselben aufgebaut werden können.

(Erscheint in den Sitzungsberichten.)

2. Herr S. Finsterwalder spricht:

Über die Ausgleichung des künftigen bayerischen Hauptdreiecksnetzes.

Das Netz soll in sieben Felder zerlegt werden, die erst zwanglos ausgeglichen und alsdann unter passender Drehstreckung eines jeden Teils aneinandergefügt werden, wobei nicht nur dem Anschluß an das preußische Netz und die südbayerische Basis Rechnung getragen, sondern auch ausreichender Aufschluß über die Genauigkeit von Lage, Orientierung und Maßstab der einzelnen Netzteile gewonnen werden kann.

(Erscheint in den Sitzungsberichten.)

3. Herr Föppl legt eine für die Sitzungsberichte bestimmte Abhandlung vor:

Über die Lösung der Spannungsaufgabe für das Ausnahmefachwerk.

Bisher hat man sich gewöhnlich damit begnügt, die durch eine Belastung von allgemeiner Art in den Stäben eines Ausnahmefachwerks hervorgerufenen Spannungen als unendlich groß zu bezeichnen. Durch die Gleichgewichtsbetrachtung wird

man nämlich zu diesem Ergebnisse geführt, wenn man keine Rücksicht auf die Gestaltänderung nimmt, die das Fachwerk unter dem Einflusse der Belastung erfährt. Tatsächlich erfährt aber gerade das Ausnahmefachwerk eine verhältnismäßig große Gestaltänderung. In der Abhandlung wird nun ein allgemein anwendbares Verfahren auseinandergesetzt, nach dem man die wirklich auftretenden Stabspannungen unter Berücksichtigung der Gestaltänderung der Fachwerkfigur berechnen kann. Es zeigt sich u. a., daß die Spannungen proportional mit der zweidrittelten Potenz der Lasten anwachsen.

4. Herr A. Voss spricht:

Über die Transformation linearer Formen und die Lösung linearer Gleichungen.

(Erscheint in den Sitzungsberichten.)

5. Derselbe legt vor eine Abhandlung für die Sitzungsberichte von Dr. F. Böhm:

Über das Äquivalenzproblem der Raumkurven.

6. Herr A. Pringsheim legt vor eine Abhandlung von Otto Szász:

Über eine besondere Klasse unendlicher Kettenbrüche mit komplexen Elementen.

Der Verfasser gibt zunächst einen neuen, sehr einfachen Beweis des schon bekannten Satzes, daß der Kettenbruch $\left[\begin{matrix} a_\nu \\ 1 \end{matrix}\right]^\infty$ konvergiert, wenn die Reihe $\sum_\varepsilon^\infty a_\nu$ konvergiert und ihre Summe nicht größer als 1 ist. Daran anknüpfend liefert er eine Verallgemeinerung des obigen Satzes für den Fall reeller, nicht positiver a_ν. (Erscheint in den Sitzungsberichten.)

Sitzung am 5. Juni.

1. Herr O. Frank legt eine Abhandlung vor über:

   Anwendung des Prinzips der gedoppelten Schwingungen auf einige Probleme der Physiologie.

2. Herr A. Rothpletz legte eine Arbeit vor:

   Über die systematische Deutung und die stratigraphische Stellung der ältesten Versteinerungen Europas und Nordamerikas, I. Teil,

in dem zunächst die Versteinerungen der in Nordamerika weit verbreiteten Beltformation besprochen werden, die zur Zeit als präkambrisch gilt und von der Walcott eine allerdings recht ärmliche versteinerte Fauna beschrieben hat. Eigene Aufsammlungen, die der Verfasser 1913 in diesen Schichten gemacht hat, und die in dieser Arbeit eingehend beschrieben und abgebildet werden, haben aber ergeben, daß es echte kambrische Formen sind. Die vermuteten Vorläufer der kambrischen Lebewelt sind somit in der Beltformation, deren Schichten eine Mächtigkeit von über 5000 m haben, bis jetzt noch nicht gefunden worden.

Sitzung am 3. Juli.

1. Herr Frank spricht über:

Anwendung des Prinzips gekoppelter Schwingungen auf einige Probleme der Physiologie.

(Erscheint in den Sitzungsberichten.)

2. Herr Pringsheim legt für die Sitzungsberichte vor eine Abhandlung von E. Landau:

Über Dirichlets Teilerproblem.

Es bezeichne $\tau_k(x)$ die Anzahl aller Zerlegungen der Zahlen bis x in k Faktoren ($k > 2$). Verfasser verschärft den bekannten Satz, daß $\tau_k(x) - x(b_{k-1}\log^{k-1}x + \cdots + b_1 \log x + b_0)$, wo die b konstant sind, für jedes $\varepsilon > 0$ höchstens von der Ordnung $x^{\frac{k-1}{k+1}+\varepsilon}$ ist, dahin, daß diese Differenz sogar höchstens von der Ordnung $x^{\frac{k-1}{k+1}}\log^{k-1}x$ ist. Nur für $k = 2$ ist dies schon bekannt; aber auch hierfür ist der neue Beweis wesentlich kürzer als die bisherigen.

3. Herr von Dyck spricht über die von ihm im vergangenen Jahre auf der Bibliothek des Britischen Museums in London, auf der Nationalbibliothek und auf der Bibliothek der Sternwarte in Paris aufgefundenen Briefe Johannes Keplers an Edmund Bruce und an den Leipziger Mathematiker Philipp Müller. Die Briefe sollen in den Abhandlungen der Akademie zur Veröffentlichung gelangen.

Sitzung am 6. November.

1. Herr M. Schmidt berichtet über:

Senkungserscheinungen an der Frauenkirche in München und Lageänderung von Hauptdreieckspunkten in Südbayern.

Die zur Untersuchung von Bodenbewegungen im östlichen Alpenvorland durch die K. B. Erdmessungskommission in den letzten Jahren zur Ausführung gebrachten Feinnivellements sind in jüngster Zeit bis München fortgeführt und hier an eine Anzahl bereits vor etwa 45 Jahren nivellierte Haupthöhenpunkte angeschlossen worden, deren Höhenlage auf etwaige seit ihrer erstmaligen Festlegung eingetretene Änderungen zu prüfen war.

Dabei ergaben sich in der Tat bei den am Gebäude der K. Staatsschuldenverwaltung am Lenbachplatz und am Nordturm der Frauenkirche angebrachten beiden Höhenmarken Senkungen im Betrag von 10,7 mm und 7.7 mm, die sich durch Nachgeben des Untergrundes dieser am Rande alter Stadtgräben errichteten Gebäude erklären und auch äußerlich sichtbare Risse im Mauerwerk zur Folge gehabt haben, die jedoch so unbedeutend sind, daß sie nur bei näherer Untersuchung bemerkbar sind und den Bestand dieser Bauwerke in keiner Weise gefährden. Da indessen die Spitze des Nordturms der Frauenkirche als Normalpunkt der bayer. Landesvermessung dient, ist ihre unveränderte Lage von größter Bedeutung. Es wurden daher sehr eingehende Beobachtungen und rechnerische Untersuchungen über eine mit der festgestellten Höhenänderung etwa verbundene Lageänderung der Turmachse ausgeführt, welche wichtige Ergebnisse über einseitige Senkungen der beiden Türme und der Langwände des Kirchenschiffes lieferten, die offenbar schon während der Erbauung der Kirche eingetreten sind und sich in späterer Zeit nicht mehr fortgesetzt haben. Nur die geringe Höhenänderung der am Nordturm angebrachten Höhenmarke ist erst in der Neuzeit eingetreten

und hat eine nachweisbare Lageänderung der den Normalpunkt der bayer. Landesvermessung bildenden Turmspitze nicht zur Folge gehabt. Die rechnerisch festgestellte scheinbare Lageänderung einiger anderer Hauptdreieckspunkte in Südbayern finden ihre ebenso einfache als natürliche Erklärung in den Ungenauigkeiten der Lagebestimmung der erst mehrere Jahrzehnte nach Beendigung der Landesvermessung zur dauernden Festlegung dieser Punkte gesetzten Versicherungssteine.

(Erscheint in den Sitzungsberichten.)

2. Herr A. Rothpletz legte für die Abhandlungen eine Arbeit von Professor E. Stromer von Reichenbach vor als Fortsetzung von dessen

„Ergebnisse der Forschungsreisen in den Wüsten Aegyptens".

Ein vom Verfasser in der mittleren Kreideformation der Baharije-Oase in der libyschen Wüste entdeckter Fundort hat die Überreste eines großen Raubtieres aus der Gruppe der Dinosaurier geliefert, das nach Art und Gattung ganz neu ist und als Vertreter einer neuen Reptilienfamilie der Spinosauriden von dem Verfasser eingehend beschrieben wird unter dem Namen Spinosaurus Aegyptiacus. Der Unterkiefer mit auffallend einfachen spitzigen Zähnen hatte eine Länge von 1.12 m; das auffälligste Merkmal aber sind die bis über 1.6 m hohen Dornfortsätze der bis 20 cm langen Rückenwirbel, die wahrscheinlich einen gewaltigen Hautkamm auf dem Rücken des Tieres stützten, wie das in ähnlicher Weise heute bei dem Kameruner Chamelio cristatus vorkommt.

3. Herr S. Günther legte eine Abhandlung von Professor Dr. A. Endrös in Freising vor:

Die Gezeiten, Seiches und Strömungen bei Aristoteles und späteren Griechen.

Anknüpfend an alte, unsichere Angaben über die Ansichten des Stagiriten bezüglich der Meeresbewegungen untersucht der

Verfasser sämtliche Stellen genau und weist nach, daß ersterer schon auffallend richtig über die stehenden Schwingungen in Meerengen geurteilt und sogar schon dafür ein treffendes Kunstwort geprägt hatte. Spätere Schriftsteller haben ihr Original vielfach nicht richtig verstanden.

(Erscheint in den Sitzungsberichten.)

4. Herr Alfred Pringsheim spricht:

Über die Weierstraß'sche Produktdarstellung ganzer transzendenter Funktionen und über bedingt konvergente unendliche Produkte.

Der Verfasser gibt einen elementaren, die bisherigen Beweise an Einfachheit wesentlich übertreffenden Beweis für den Weierstraß'schen Satz über die Darstellung einer ganzen transzendenten Funktion mit unendlich vielen vorgeschriebenen Nullstellen durch ein beständig und unbedingt konvergierendes unendliches Produkt. Daran anknüpfend zeigt er, wie die Weierstraß'sche Methode, ein an sich divergentes Produkt durch Zusatzfaktoren unbedingt konvergent zu machen, auch dazu dienen kann, ein Kriterium für bedingte Konvergenz unendlicher Produkte abzuleiten und die etwaige Wertveränderung, die durch Umordnung der Faktoren erzeugt wird, zu bestimmen. (Erscheint in den Sitzungsberichten.)

Sitzung am 4. Dezember.

1. Herr O. Frank legt eine Abhandlung vor von Professor H. Fischer:

Über die Einwirkung von Brom auf einige Pyrrolderivate.

(Erscheint in den Sitzungsberichten.)

2. Herr Pringsheim legt vor eine Abhandlung von G. Mittag-Leffler:

Über einen Satz des Herrn Serge Bernstein.

Der Verfasser gibt einen neuen, sehr einfachen Beweis des von S. Bernstein stammenden Satzes:

„Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß eine Funktion $F(z)$ der reellen Veränderlichen z auf einer Strecke AB analytisch ist, besteht darin, daß die Funktion in eine Reihe von Polynomen entwickelbar ist:

$$F(z) = P_0^{(z)} + P_1(z) + \cdots P_n^{(z)} + \cdots$$

worin $P_n(z)$ ein Polynom bedeutet, das höchstens vom Grade n ist und auf der Strecke AB der Ungleichung

$$P_n(z) < M\varrho^n \quad (\varrho < 1)$$

genügt."

Der erste Teil dieses Satzes, die Notwendigkeit der Bedingung, ergibt sich unmittelbar aus den elementaren Betrachtungen, die den Verfasser in seiner vorhergehenden Arbeit in den Sitzungsberichten (6. März 1915) zu seinen Polynomentwicklungen analytischer Funktionen geführt haben. Der Beweis des zweiten Teils gelingt mit Hilfe der konformen Abbildung $\zeta = z + \sqrt{z^2 - 1}$. (Erscheint in den Sitzungsberichten.)

3. Herr A. Sommerfeld berichtet über eine

Untersuchung zur Theorie der Balmer'schen Wasserstoffserie,

welche an Bohr's Theorie der Spektrallinien anknüpft und aus den elliptischen Bahnen des Wasserstoff-Elektrons Schlüsse auf die Deutung des Starkeffektes und auf die Sonderstellung des Wasserstoffs in der Spektroskopie zieht.

(Erscheint in den Sitzungsberichten.)

Verzeichnis der im Jahre 1915 eingelaufenen Druckschriften.

Die Gesellschaften und Institute, mit welchen unsere Akademie in Tauschverkehr steht, werden gebeten, nachstehendes Verzeichnis als Empfangsbestätigung zu betrachten.

Aachen. Geschichtsverein:
— — Zeitschrift, Bd. 36 und Registerband.
— Technische Hochschule:
— — Gast, Kaisergeburtstagsrede 1915.
Agram. Südslavische Akademie der Wissenschaften:
— — Codex diplomat. regni Croatiae, Dalmatiae et Slavoniae, vol. 12.
— — Grada, Kniga 8.
— — Ljetopis 28, 29.
— — Rad, Kniga 201—208.
— — Zbornik, Kniga XVIII; XIX, 1, 2; XX, 1.
— — Rječnik 33.
— — Monumenta histor. jurid., vol. 10.
— — Monumenta spectantia historiam Slavorum, vol. 35—37.
— — Opera Acad. scient et artium Slav. merid., vol. 25.
— — Prinosi, vol. 4.
— — Izvješča Svez. 2—4.
— — Pirodoslovna istrazivanja Svez. 2—7.
— K. Kroat.-slavon.-dalmatinisches Landesarchiv:
— — Vjestnik, Bd. 16, 17, Heft 1, 2.
— Kroat. Archäologische Gesellschaft:
— — Vjestnik, Bd. XIII, 1913 und 1914.
— Kroat. Naturwissenschaftliche Gesellschaft:
— — Glasnik, Bd. 26, No. 4; Bd. 27, No. 1, 2.
Alabama. Geological Survey:
— — Bulletin 15.
Allegheny. Observatory:
— — Publications, vol. III, No. 17, 18.

Altenburg. Geschichts- und altertumsforschender Verein des Osterlandes:
— — Mitteilungen, Bd. 12, Heft 4.

Amsterdam. K. Academie van Wetenschappen:
— — Verhandelingen, afd. Natuurkunde, II. sectie, deel XVIII, 4, 5.
— — Verslagen en vergaderingen, deel 23, No. 1, 2.
— — Verhandelingen, afd. Letterkunde, Nieuwe Reeks, deel XIV, No. 6; deel XV; deel XVI, No. 1, 2.
— — Verslagen en mededeelingen, 5. Reeks, deel 1.
— — Jaarboek 1914.
— — Prijsvers 1915.
— K. N. aardrijkskundig Genootschap:
— — Tijdschrift, deel 32, No. 1—7.
— Wiskundig Genootschap (Société de mathémat.):
— — Oeuvres de Stieltjes t. 1914.
— Zoologisch Genootschap:
— — Bijdragen, tom. 20, 1.

Ann Arbor. Detroit Observatory:
— — Publications, vol. 1, p. 73—206.

Ansbach. Historischer Verein für Mittelfranken:
— — Jahresbericht 60, 1915.

Aschaffenburg. K. Humanistisches Gymnasium:
— — Jahresbericht 1914/15 und Programm von Ketterer.

Athen. Archäologische Gesellschaft:
— — Oikonomos G., *Ἐπιγραφαὶ τῆς Μακεδονίας*, Bd. 1.
— Wissenschaftliche Gesellschaft:
— — Athena, tom. 26, Heft 3, 4; tom. 27, Heft 1, 2.

Augsburg. Historischer Verein:
— — Zeitschrift, 41. Jahrg., 1915 und Register.

Baltimore. Peabody Institute:
— — 48th Annual Report, 1915.
— Johns Hopkins University:
— — Circulars 1913, No. 10; 1914, No. 1, 3—6.
— — American Journal of Mathematics, vol. 36, No. 2, 3.
— — American Journal of Philology, No. 137, 138.
— — Bulletin of the Johns Hopkins Hospital, No. 286—298.
— — Studies in historical and political Science, vol. 32, No. 2.

Bamberg. Naturforschende Gesellschaft:
— — Bericht 21/23.
— K. Altes Gymnasium:
— — Jahresbericht 1914/15.

Bamberg. K. Neues Gymnasium:
— — Jahresbericht 1914/15 mit Programm, die ersten 25 Jahre des Gymnasiums.
— K. Lehrerbildungsanstalt:
— — 41. Jahresbericht, 1914/15.
— K. Lyzeum:
— — Jahresbericht 1914/15.
— Historischer Verein:
— — Jahresbericht 72, 1914/15.

Barcelona. R. Academia de Ciencias y Artes:
— — Memorias, vol. 11, No. 12—23.
— — Nomina del personal 1914/15.
— Institut d'Estudis Catalans:
— — Cartell de premis 1915.
— — Les Monedes Catalans, vol. 3, 1913.
— — L'arquitectura Romanica, vol. 2, 1912.
— — Bulleti de la Biblioteca de Catalanya, Any I, No. 3.
— Institucio Catalana d'Historia Natural:
— — Bulleti, II epoca, Itag 11, No. 4—9.

Basel. Historisch-antiquarische Gesellschaft:
— — Basler Zeitschrift für Geschichte und Altertumskunde, Bd. XIV, Heft 2.
— Basler Chroniken, Bd. 7, 1915.
— Naturforschende Gesellschaft:
— — Verhandlungen, Bd. 25, 26.
— Universität:
— — Schriften der Universität aus dem Jahre 1914 und 1915 in 4^0 und 8^0.
— — Jahresverzeichnis der Schweizer Universitätsschriften 1913/14.

Batavia. Bataviaasch Genootschap van Kunsten en Wetenschappen:
— — Verhandelingen, deel 61, afl. 3/4.
— — Serat-Tjentini, deel 3—8.
— R. Magnetical and Meteorological Observatory:
— — Seismological Bulletin 1914, No. 9—12; 1915, No. 1—6.
— — Observations, made at secondary stations, vol. 34, 1911; vol. II.

Bayreuth. K. Humanistisches Gymnasium:
— — Jahresbericht 1914/15.
— Historischer Verein:
— — Archiv für Geschichte und Altertumskunde von Oberfranken, Bd. 26, Heft 1.

Bergen (Norwegen). Museum:
— — Aarsberetning for 1914/15.

Bergen (Norwegen). Museum:
— — Aarbog 1914/15, Heft 2, 3; 1915/16, Heft 1.
— — Sars G. O., Crustacea, vol. VI, 7—10.
Bergzabern. K. Progymnasium:
— — Jahresbericht 1914/15.
Berlin. K. Preuß. Akademie der Wissenschaften:
— — Rede auf Koser.
— — Abhandlungen { Philos.-histor. Klasse, 1915, 1—6. / Physikal.-math. Klasse, 1915, 1—5.
— — Sitzungsberichte 1914, Nr. 35—47; 1915, Nr. 1—40.
— — Inscriptiones Graecae, vol. XII, fasc. 9.
— — Corpus medicorum Graecorum V, 9, 2.
— Allgemeine Elektrizitäts-Gesellschaft:
— — Geschäftsberichte 1914/15.
— Archiv der Mathematik und Physik:
— — Archiv, Bd. 23, Nr. 4; Bd. 24, Nr. 1—3.
— K. Bibliothek:
— — Jahresbericht 1913/14; 1914/15.
— Deutsche Chemische Gesellschaft:
— — Berichte, 47. Jahrg., Nr. 19; 48. Jahrg., Nr. 1—17; 49. Jahrg., Nr. 1.
— Deutsche Geologische Gesellschaft:
— — Abhandlungen, Bd. 66, Heft 4; Bd. 67, Heft 1, 2.
— — Monatsberichte 1914, Nr. 8—12; 1915, Nr. 1—7.
— Medizinische Gesellschaft:
— — Verhandlungen, Bd. 45, 1915.
— Deutsche Physikalische Gesellschaft:
— — Die Fortschritte der Physik, 69. Jahrg., 1913, 1—3.
— — Verhandlungen, Jahrg. 16. Nr. 24; Jahrg. 17. Nr. 1—21. 23, 24.
— K. Technische Hochschule:
— — Personalverzeichnis S.-S. 1915.
— — Bericht des Rektors für das Jahr 1914/15.
— — Programm 1915/16.
— — Festrede 1915 zu Kaisers Geburtstag.
— Redaktion des „Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik“:
— — Jahrbuch, Bd, 43, Heft 2, 3.
— Kais. Deutsches Archäologisches Institut (röm. Abteilung s. unter Rom):
— — Jahrbuch, Bd. 29, Heft 4; Bd. 30, Heft 1—3 mit Bibliographie 1913 und 1914.
— K. Meteorologisches Institut:
— — Veröffentlichungen, Nr. 280—282, 284—287.

Berlin. Preuß. Geologische Landesanstalt:
— — Abhandlungen, N. F., Heft 62, 63.
— — Jahrbuch, Bd. 33, I, 3; Bd. 34, I, 3; II, 1, 2; Bd. 35, I, 1.
— Lehranstalt für die Wissenschaft des Judentums:
— — 33. Bericht.
— — Schriften Bd. 3, Heft 1—3; Bd. 4, Heft 1, 2.
— K. Sternwarte:
— — Veröffentlichungen, Bd. 1, Heft 2—4.
— Verein zur Beförderung des Gartenbaues in den preuß. Staaten:
— — Gartenflora, Jahrg. 1915, Nr. 1—24.
— Verein für Geschichte der Mark Brandenburg:
— — Forschungen zur brandenburgischen und preußischen Geschichte, Bd. 27, 2. Hälfte; Bd. 28, 1. Hälfte.
— Verein für die Geschichte Berlins:
— — Mitteilungen 1915, Nr. 1—5, 7—12.
— Verlag Wachsmuth:
— — Monatshefte für Baukunst, 1. Jahrg., Heft 1—12.
— Zeitschrift für Instrumentenkunde:
— — Zeitschrift, 35. Jahrg., Nr. 1, 2, 4—12.
— Zentralstelle für Balneologie:
— — Veröffentlichungen, Bd. II, Heft 10—12.

Bern. Schweizerische Naturforschende Gesellschaft:
— — Actes de la Session 1914, tom. 1, 2.
— Allg. Geschichtsforschende Gesellschaft der Schweiz:
— — Quellen zur Schweizer Geschichte, N. F., Bd. 4, I, 3.
— — Jahrbuch, Bd. 40.
— Historischer Verein des Kantons Bern:
— — Archiv, Bd. 22, 3.

Beuron. Bibliothek der Erzabtei:
— — Standesdokumente der Familie Sales.

Bielefeld. Naturwissenschaftlicher Verein:
— — Bericht über die Jahre 1911—1913.

Bologna. R. Accademia delle Scienze dell' Istituto:
— — Classe di scienze morali: a) Sezione di scienze storico-filologiche, Memorie, ser. I, tom. 8, 1913/14; b) Sezione di scienze giuridiche, Memorie, ser. I, vol. 8, 1913/14.
— — Rendiconto, Classe di scienze morali, vol. 7, 1913/14.

Boston. American Academy of Arts and Sciences:
— — Proceedings, vol. 50, No. 1—3.
— Museum of Fine Arts:
— — Bulletin, No. 73—79.
— — Annual Report 39, 1914.

Bourg. Société d'émulation:
— — Annales 46, 1913, Juli—Sept.
Brasso. Historische Kommission:
— — Quellen zur Geschichte der Stadt Brasso. Bd. 6, 1915.
Bremen. Meteorologisches Observatorium:
— — Jahrbuch, 25. Jahrg., 1914.
— Naturwissenschaftlicher Verein:
— — Abhandlungen, Bd. 23, Heft 2.
Breslau. Technische Hochschule:
— — Personalverzeichnis, S.-S. 1915; W.-S. 1915/16.
— — Programm 1915/16: Rede v. Müller, Deutsche Technik.
Bromberg. Stadtbibliothek:
— — Jahresbericht 1913 u. 1913/14 der deutschen Gesellschaft f. Kunst.
— — Mitteilungen der Stadtbibliothek, Jahrg. 6, Nr. 1—12; Jahrg. 7, Nr. 1—4.
— Kaiser Wilhelms-Institut für Landwirtschaft:
— — Mitteilungen, Heft 5.
Brünn. Verein für die Geschichte Mährens und Schlesiens:
— — Zeitschrift, 19. Jahrg., Heft 1—4.
Budapest. Ungarische Ethnographische Gesellschaft:
— — Ethnographia, Jahrg. 25, Heft 5, 6; Jahrg. 26, Heft 1—3.
— K. Ungarische Geographische Gesellschaft:
— — Mitteilungen, Bd. 39, Heft 7—10.
— Ungarische volkswirtschaftliche Gesellschaft:
— — Közgazdasági Szemle, Bd. 52, Heft 5, 6; Bd. 53, Heft 1, 2, 4—6; Bd. 54, Heft 1, 3—6.
— Ungarisches Nationalmuseum:
— — Ertesitöje, XV. Jahrg., 3, 4.
— K. Ungarische Ornithologische Zentrale:
— — Aquila 21, 1914.
Buenos Aires. Sociedad cientifica:
— — Anales, tom. 76, No. 4, 5; tom. 77, No. 1—4.
Buitenzorg (Java). Departement van landbouw:
— — Mededeelingen van het agricultur-chemisch laboratorium, No. 9—12.
— — Mededeelingen van het laborat. for agrogeologie, No. 1.
— — Mededeelingen van de afdeeling voor plantenziekten, No. 13—17.
— — Mededeelingen voor thee, No. 32—34, 36.
— — Mededeelingen uit den kulturtuin, No. 2, 3.
— — Bulletin du jardin botanique, II. sér., No. 17, 18.
Bukarest. Academia Română:
— — Bulletin de la section historique, année 1, No. 1—4; année 2, No. 1—4; année 3, No. 1.

Bukarest. Academia Română:
— — Bulletin de la section scientifique de l'Académie Roumaine 1913/14, No. 4—10; 1914/15, No. 1—7, 9, 10; 1915/16, No. 1—6.
— — Catalogul manuscriptelor Românesti de Bianu, tom. II, fasc. 3, 4.
— — Bianu, Bibliografia Românească, tom. 2, fasc. 6; tom. 3, fasc. 1, 2.
— Société des Sciences:
— — Bulletin, anul 23, No. 3—6; anul 24, No. 1—4.

Burghausen. K. Humanistisches Gymnasium:
— — Jahresbericht 1914/15.

Cambridge (Mass.). Tufts College (Mass.):
— — Studies, vol. 4, No. 1, 2.
— Astronomical Observatory of Harvard University:
— — Contents of Annals, 69, 2; 73, 1.
— — Circular, No. 185—188.
— — Bulletin, No. 549—555.
— — Report of the committee to visit No. 72.

Catania. Società degli spettroscopisti:
— — Memorie, ser. II, vol. 3, disp. 11, 12; vol. 4, disp. 1—4.

Charlottenburg. Physikalisch-technische Reichsanstalt:
— — Die Tätigkeit der physikal.-techn. Reichsanstalt im Jahre 1914.

Chicago. The Open Court:
— — The Open Court, vol. XXIX, No. 708—714 (Mai—Nov.).
— — The Monist, vol. XXV, No. 3, 4.
— Oberlin College Library (Ornitholog. Club):
— — The Wilson Bulletin, vol. 26, No. 89—91.
— John Crerar Library:
— — 20th Report for the year 1914.
— Field Museum of Natural History:
— — Publications, No. 183.
— University Library:
— — The astrophysical Journal, vol. 40, No. 2—5; vol. 41, No. 1—5; vol. 42, No. 1—5.

Christiania. Videnskabs Selskabet:
— — Forhandlinger, Aar 1914.
— — Skrifter 1914, I, 1, 2; II.
— Universitäts-Bibliothek:
— — Jahrbuch des norwegischen meteorologischen Instituts 1911, 1912, 1913, 1914.
— — Hopstock, Anatomisches Institut Christiania 1915.
— — Aarsberetning 1910/11—1913/14.
— — Universitäts og Skole Annaler 26—29 (1911—1914).

Chur. Historisch-antiquarische Gesellschaft für Graubünden:
— — 44. Jahresbericht, 1914.
— Naturforschende Gesellschaft:
— — 55. Jahresbericht, 1913/14.
Cincinnati. Lloyd Library:
— — Bibliographical contributions, N. S., No. 15.
— Society of Natural History:
— — Journal, vol. 21, No. 4.
— University:
— — University Studies, vol. 10, No. 1.
— — Record, vol. 11, No. 1.
Claremont. Pomona College:
— — Journal of entomology, vol. 6, No. 4; vol. 7, No. 1—3.
Cleveland. Archaeological Institute of America:
— — American Journal of Archaeology, vol. 18, No. 4; vol. 19, No. 1—3.
Como. Società storica:
— — Periodico, No. 84.

Danzig. Westpreußischer Geschichtsverein:
— — Mitteilungen, Jahrg. 14, Nr. 1—4.
— Naturforschende Gesellschaft:
— — Schriften, Bd. XIV, Heft 1.
— Westpreußischer Botanisch-zoologischer Verein:
— — Bericht 37.
Darmstadt. Firma E. Merck:
— — Jahresbericht. 38. Jahrg., 1914.
Davos. Meteorologische Station:
— — Wetterkarten 1914, Nr. 12; 1915, Nr. 1—11.
Dessau. Verein für Anhaltische Geschichte:
— — Mitteilungen, N. F., Heft 2.
Dillingen. Historischer Verein:
— — Archiv für die Geschichte des Hochstifts Augsburg, Bd. 3, Abteilung II, Lief. 1 u. 2; Bd. 4, Lief. 5 u. 6.
Disko. Danske arktiske station:
— — No. 7—9.
Dresden. K. Sächsischer Altertumsverein:
— — Jahresbericht 1913 u. 1914.
— K. Sächsische Landes-Wetterwarte:
— — Deutsches meteorologisches Jahrbuch für 1910. 2. Hälfte.
— — Dekaden-Monatsberichte 1913, Jahrg. 16.
— Redaktion des Journals für praktische Chemie:
— — Journal 1915, Nr. 1—24.

Dresden. Verein für Erdkunde:
— — Mitteilungen, Bd. II, Heft 10.
— Verein für die Geschichte Dresdens:
— — Dresdener Geschichtsblätter, Bd. 23, 1, 2.
— — Mitteilungen, Heft 24, 1913.
— — Bruck, Sophienkirche 1912; Bruck, Dresdens alte Rathäuser 1910.
Drontheim. Norske Videnskabens-Selskab:
— — Skrifter 1913.
Dürkheim. Progymnasium:
— — Jahresbericht 1913/14 und 1914/15.

Eisenach. Karl Friedrich-Gymnasium:
— — Jahresbericht für 1914/15.
Eisenberg. Geschichts- und altertumsforschender Verein:
— — Mitteilungen, Heft 31.
Emden. Gesellschaft für bildende Kunst und vaterländische Altertümer:
— — Upstalsboom-Blätter, Jahrg. 4, No. 1–6.
Erfurt. K. Akademie gemeinnütziger Wissenschaften:
— — Jahrbücher, N. F., Heft 40, 41.
Erlangen. K. Universitätsbibliothek:
— — Schriften aus den Jahren 1913/14 in 4^0 und 8^0.

Florenz. Reale Accademia dei Georgofili:
— — Atti, ser. V, vol. 11, disp. 3, 4; vol. 12, disp. 1.
— Biblioteca Nazionale Centrale:
— — Bollettino delle Pubblicazioni Italiane 1915, anno 49. No. 1—5.
Frankfurt a. M. Senckenbergische Naturforschende Gesellschaft:
— — Abhandlungen, Bd. 36, 1.
— — 45. Bericht, Heft 1–3 und Sonderheft.
— Römisch-germanische Kommission des Kaiserl. Deutschen Archäologischen Instituts:
— — 7. Bericht über die Fortschritte der römisch-germanischen Forschung 1912.
Frauenfeld (Schweiz). Thurgauische Naturforsch. Gesellschaft:
— — Mitteilungen, Heft 21.
Freiburg i. Br. Breisgau-Verein „Schau ins Land“:
— — „Schau ins Land“, 41. Jahrlauf, 2. Hälfte.
— Naturforschende Gesellschaft:
— — Berichte, Bd. 21, Heft 1.
— Universität:
— — Schriften aus den Jahren 1913/14 u. 1914/15.

Freiburg i. Br. Kirchengeschichtlicher Verein:
— — Diözesanarchiv, Bd. 43.
Freising. K. Lyzeum:
— — Jahresbericht 1914/15.
Friedrichshafen. Verein zur Geschichte des Bodensees:
— — Schriften, Heft 43, 1914 und 44, 1915.
Fürth. K. Humanistisches Gymnasium:
— — Jahresbericht 1914/15 mit Programm von Helmreich.

Geestemünde. Männer vom Morgenstern:
— — Jahresbericht 16, 1913/14.
Geneva. U. St. Agricultural Experimental Station:
— — Bulletin, No. 380—385.
Genf. Redaktion des „Journal de chimie physique":
— — Journal, tom. XII, No. 5; tom. XIII, No. 1—4.
— Observatoire:
— — Résumé météorologique de l'année 1912 et 1913.
— — Observations des fortifications de St. Maurice 1912 et 1913.
— Société d'histoire et d'archéologie:
— — Bulletin, tom. 4, livr. 1.
— Société de physique et d'histoire naturelle:
— — Compte rendu des séances 31, 1914.
Giessen. Oberhessischer Geschichtsverein:
— — Mitteilungen, N. F., Bd. 22.
— Universität:
— — Schriften aus dem Jahre 1912/13, 1913/14, 1914/15 in 4^0 und 8^0.
Görlitz. Oberlausitzische Gesellschaft der Wissenschaften:
— — Codex diplomaticus Lusatiae superioris, Bd. IV, Heft 2.
— — Neues Lausitzisches Magazin, Bd. 90 und 91.
Göttingen. K. Gesellschaft der Wissenschaften:
— — Göttingische Gelehrte Anzeigen 1914, No. 11, 12; 1915, No. 1—12.
— — Nachrichten, a) Philol.-hist. Klasse 1914, Heft 2 und Beiheft; 1915, Heft 1, 2; b) Mathem.-phys. Klasse 1914, Heft 4; 1915, Heft 1; c) Geschäftliche Mitteilungen 1914, Heft 3; 1915, Heft 1.
— Universitätsbibliothek:
— — Vorlesungsverzeichnis 1915.
— — Verzeichnis der Studierenden, S.-S. 1915.
— — Schriften 1914/15.
Graz. Universität:
— — Verzeichnis der Vorlesungen im S.-S. 1915, W.-S. 1915/16.
— — Verzeichnis der akademischen Behörden etc., 1914/15 und 1915/16.
— Naturwissenschaftlicher Verein für Steiermark:
— — Mitteilungen, Bd. 51, Heft 1, 2.

Greifswald. Rügisch-Pommerscher Geschichtsverein:
— — Pommersche Jahrbücher, Bd. 16.

Grimma. Fürsten- und Landesschule:
— — Jahresbericht 1914/15, 4°.

Groningen. Niederländ. botanische Gesellschaft:
— — Recueil des travaux botaniques Néerlandais, vol. XI. 1—4.
— — Nederlandsch kruidkundig archief 1913.
— Astronomisches Laboratorium:
— — Publications No. 25.

Grünstadt. K. Progymnasium:
— — Jahresbericht 1914/15.

Gunzenhausen. K. Realschule:
— — Jahresbericht 22, 1914/15.

Haag. Gesellschaft zur Verteidigung der christlichen Religion:
— — Programm für das Jahr 1915.
— — K. Instituut voor de Taal-, Land- en Volkenkunde van Nederlandsch-Indie:
— — Bijdragen, VII. Reeks, deel 70, afl. 2—4.

Haarlem. Hollandsche Maatschappy der Wetenschappen:
— — Archives néerlandaises des sciences exactes et naturelles, sér. III B, tom. 2, livr. 2 und 3.
— Musée Teyler:
— — Archives, sér. III, vol. 2.
— — Verhandelingen, N. S., deel 19.
— — Catalogue de la Bibliothèque, Bd. 4.

Habana. Sociedad economica de Amigos del Pais:
— — Revista bimestre Cubana, vol. 9, No. 5.

Hall. K. K. Franz Joseph-Gymnasium:
— — Programm 1914/15.

Halle. K. Leopoldinisch-Karolinische Deutsche Akademie der Naturforscher:
— — Leopoldina, Heft 51, No. 1—12.
— Deutsche Morgenländische Gesellschaft:
— — Zeitschrift, Bd. 68, Heft 4; Bd. 69, Heft 1—4.
— Universität:
— — Verzeichnis der Vorlesungen, S.-S. 1915; W.-S. 1915/16.
— Thüringisch-Sächsischer Verein für Erforschung des vaterländischen Altertums:
— — Jahresbericht für 1913/14, 1914/15.
— — Zeitschrift für Geschichte und Kunst, Bd. 4, Heft 1, 2.

Hamburg. Stadtbibliothek:
— — Jahrbuch der wissenschaftlichen Anstalten Hamburgs, Jahrg. 31, 1913, Beiheft 1 und 3—10.
— — Jahresbericht der Verwaltungsbehörden 1913, 4°.
— — Staatshaushaltsberechnung 1913, 4°.
— — Entwurf des hamburgischen Staatsbudgets für 1915, 4°.
— — Verhandlungen zwischen Senat und Bürgerschaft 1914, 4°.
— Mathematische Gesellschaft:
— — Mitteilungen, Bd. V, Heft 4.
— Hauptstation für Erdbebenforschung:
— — Mitteilungen 1914, Nr. 6; 1915, Nr. 1.
— — Monatliche Mitteilungen 1914, 1—5.
— Deutsche Seewarte:
— — Aus dem Archiv, Bd. 37, Nr. 1.
— — Annalen der Hydrographie, Jahrg. 43, Nr. 1—12.
— — Dekadenberichte 1913, Nr. 21.
— — Deutsche überseeische meteorologische Beobachtungen, Heft 22.
— — Ergebnisse der meteorologischen Beobachtungen, Jahrg. 36.
— Verein für Hamburgische Geschichte:
— — Mitteilungen, 34. Jahrg.
— — Zeitschrift, Bd. XX.
— Naturwissenschaftlicher Verein:
— — Abhandlungen, Bd. 20, Heft 2.
— — Verhandlungen III, 20—22.

Hannover. Verein für Geschichte der Stadt Hannover:
— — Hannoverische Geschichtsblätter, 17. Jahrg., Heft 4; 18. Jahrg., Nr. 1—4.

Hartford. Geological and Natural History Survey:
— — Bulletin, No. 25.

Heidelberg. Akademie der Wissenschaften:
— — Abhandlungen der philologisch-philosophischen Klasse, Nr. 3.
— — Sitzungsberichte: a) philol.-histor. Klasse, 1914, No. 14, 15; 1915, Nr. 1—12; b) mathem.-naturw. Klasse, 1914, A, Nr. 15—29; 1915, 1—6, 9—13; 1914, B, Nr. 6; 1915, Nr. 1—3, 7, 8.
— — Jahresheft 1914.
— Reichs-Limes-Kommission:
— — Der obergermanisch-rätische Limes des Römerreiches, Lief. 40 u. 41.
— Sternwarte:
— — Veröffentlichungen des Astronomischen Instituts, Bd. 7, Nr. 5.
— Universität:
— — Schriften der Universität aus den Jahren 1913/14 in 4° und 8°.
— Historisch-philosophischer Verein:
— — Neue Heidelberger Jahrbücher, Jahrg. 19, Heft 1

Helgoland. Biologische Anstalt:
— — Meeresuntersuchungen, N. F., Bd. 15, Abt. Helgoland, Heft 1; Bd. 17, Abt. Kiel.
Hermannstadt. Verein für siebenbürgische Landeskunde:
— — Archiv, N. F., Bd. 39, 1912, Heft 3.
— — Jahresbericht 1914.
Hildburghausen. Verein für Sachsen-Meiningische Geschichte:
— — Schriften, Heft 72, 73.
Homburg i. Pf. K. Progymnasium:
— — Jahresbericht 1914/15.

Igló. Ungarischer Karpathen-Verein:
— — Jahrbuch, 42. Jahrg., 1915.
Innsbruck. Naturwissenschaftlicher Verein:
— — Berichte, Bd. 35.
Ithaca. Journal of Physical Chemistry:
— — The Journal, vol. 18, No. 7—9; vol. 19, Nr. 1, gr. 8^0.

Jassy. Société des médecins et naturalistes:
— — Bulletin, année 32, 11/12.
Jena. Geographische Gesellschaft:
— — Mitteilungen, Bd. 32, 1914.
— Medizinisch-naturwissenschaftliche Gesellschaft:
— — Jenaische Zeitschrift für Naturwissenschaft, Bd. 53, Heft 1—4.
— Verein für Thüringische Geschichte und Altertumskunde:
— — Zeitschrift, N. F., Bd. 22, Nr. 1, 2.
— — Regesta diplomatica III, 2, 1915.
— Verlag der Naturwissenschaftlichen Wochenschrift:
— — Wochenschrift 1915, No. 1—52.
Jowa City. Laboratorium für Physiologie:
— — Contributions from the physical laboratory, vol. 1, No. 5.

Karlsruhe. Technische Hochschule:
— — Schriften 1914/15.
— Badische Historische Kommission:
— — Zeitschrift für die Geschichte des Oberrheins, N. F., Bd. 30, Heft 1—4, Heidelberg.
— — Politische Korrespondenz Karl Friedrichs v. Baden, Bd. 6.
Kassel. Verein für hessische Geschichte und Landeskunde:
— — Zeitschrift, Bd. 48, 1913.
— — Mitteilungen 1913/14.
Kaufbeuren. K. Progymnasium:
— — Jahresbericht 1914/15.

Kaufbeuren. Verein „Heimat“:
— — Deutsche Gaue, Heft 301—320, Sonderheft 95.
Kempten. K. Humanistisches Gymnasium:
— — Jahresbericht 1914/15 und Programm von Helmreich.
Klagenfurt. Landesmuseum:
— — Carinthia I, 105. Jahrg., Nr. I.
— — Jahresbericht des Historischen Museums 1913.
Königsberg i. Pr. Physikalisch-ökonomische Gesellschaft:
— — Schriften, Bd. 54, 1913.
— Universitätsbibliothek:
— — Schriften aus dem Jahre 1913/14.
Konstantinopel. Institut d'histoire Ottomane:
— — Revue historique 1910, No. 28—32.
Kopenhagen. K. Akademie der Wissenschaften:
— — Översigt 1914, No. 5—6; 1915, No. 1—4.
— — Mémoires, Section des sciences, sér. 7, tom. 12, No. 2—6; sér. 8, No. I, 1. Section des lettres, sér. 7, tom. 2, No. 4; tom. 3, No. 1.
— Carlsberg-Laboratorium:
— — Comptes rendus des travaux, vol. 11, No. 3, 4.
— Conseil permanent international pour l'exploration de la mer:
— — Bulletin hydrographique, année 1912/13 und 1913/14.
— — Bulletin planktonique, part. 2, 1908—11.
— — Publications de circonstance, No. 67—69.
— — Rapports et procès verbaux des réunions, vol. 21, 1913/14.
— Gesellschaft für nordische Altertumskunde:
— — Aarböger, III. Raekke, Bd. 4.
— Kommissionen for Havundersøgelser:
— — Middelelser, Serie Fiskeri, Bd. IV, 8, 9.
— — „ „ Hydrografi, Bd. II, No. 4.
— — „ Plankton I, 12.
— Dänische biologische Station:
— — Report No. 22, 23.
Krakau. Akademie der Wissenschaften:
— Historische Gesellschaft:
— — Biblioteka, No. 49, 50.
— Numismatische Gesellschaft:
— — Wiadomosci 1914, No. 8; 1915, No. 1—4.

Laibach. Musealverein für Krain:
— — Carniola, Bd. 6, No. 1—4.
Landau (Pfalz). K. Humanistisches Gymnasium:
— — Jahresbericht 1914/15.

Landsberg a. L. K. Realschule:
— — 37. Jahresbericht 1914/15.
Landshut. Historischer Verein:
— — Verhandlungen, Bd. 51.
La Plata. Universidad Nacional:
— — Contribucion al estudio de las ciencias, Serie matematica, vol. 1, entr. 1; Serie fisica, vol. 1, entr. 1—4; Serie tecnica, vol. 1, entr. 1.
— — Annuario, No. 5, 1914; No. 6, 1915.
— — Memerio, No. 3, 1913.
Lausanne. Revue Ukrainienne:
— — Revue, No. 1—5.
— Société Vaudoise des sciences naturelles:
— — Bulletin, No. 184—186.
Leiden. Maatschappij der Nederlandsche Letterkunde:
— — Handelingen en Mededeelingen 1913/14.
— — Levensberichten 1913/14.
— — Tijdschrift, deel 33, 1—4; deel 34, 1.
— Redaktion des „Museum“:
— — Museum, maandblad voor philologie en geschiedenis, Jahrg. 22, No. 5—12; Jahrg. 23, No. 1—4.
— Redaktion der „Mnemosyne“:
— — Mnemosyne, Bd. 43, No. 1—4; Bl. 44, No. 1.
Leipzig. Redaktion der Beiblätter zu den Annalen der Physik:
— — Beiblätter, Bd. 38, Nr. 24; Bd. 39, Nr. 1—23.
— Deutsche Bücherei:
— — 2. Bericht 1914.
— — Urkunden und Beiträge, 9. Ausgabe, 1914.
— K. Gesellschaft der Wissenschaften:
— — Abhandlungen der philol.-hist. Klasse, Bd. 30, Nr. 4; Bd. 31, Nr. 1, 2.
— — Berichte über die Verhandlungen der philol.-hist. Klasse, Bd. 66, Nr. 1—3; Bd. 67, Nr. 1, 2.
— — Berichte über die Verhandlungen der math.-phys. Klasse, Bd. 65, Nr. 4, 5; Bd. 66, Nr. 2 und 3; Bd. 67, Nr. 1, 2.
— Gesellschaft für Erdkunde:
— — Mitteilungen für das Jahr 1914.
— — Wissenschaftliche Veröffentlichungen, Bd. 8.
Lemberg. Ševčenko-Gesellschaft:
— — Fontes historiae ukraino-Russicae, tom. 6.
Lima. Cuerpo de ingenieros de minas del Peru:
— — Boletin, No. 81.
Lincoln. University of Nebraska library:
— — Annual Report, vol. 27.
— — Research Bulletin, No. 5.

Linz. Museum Francisco-Carolinum:
— — 73. Jahresbericht, 1915.
Lissabon. Sociedade de geographia:
— — Pereira de Situ orbis, 1905.
— — Centenaio da Centa, 1915.
— — Boletim, vol. 32, No. 9—12; vol. 33, No. 1—5.
Lohr. K. Humanistisches Gymnasium:
— — Jahresbericht 1914/15.
Lüneburg. Museumsverein:
— — Museumsblätter, Bd. 10.
Lund. Redaktion von „Botaniska Notiser":
— — Notiser, 1915, No. 1—6.
— Universität:
— — Bibelforskaren 1914, 1—6.
— — Kyrkohistorisk Arskrift 15, 1914.
Luzern. Historischer Verein der fünf Orte:
— — Geschichtsfreund, Bd. 69, 70.

Madison. Wisconsin Geological and Natural History Survey:
— — Bulletin. No. 33 = scient.-sér., No. 10; No. 34 = econ.-sér., No. 16; No. 41 = econ.-sér., No. 18.
Madrid. R. Academia de la historia:
— — Boletín, tom. 66, No. 1—6; tom. 67, No. 1—5.
Mailand. Società Italiana di scienze naturali:
— — Atti, vol. 53, fasc. 3, 4.
— Società Lombarda di scienze mediche e biologiche:
— — Atti, vol. IV, fasc. 1, 2.
— Società Storica Lombarda:
— — Archivio Storico Lombardo, ser. IV, anno 41, fasc. 4.
Mannheim. Altertumsverein:
— — Mannheimer Geschichtsblätter, 16. Jahrg., 1915, Nr. 1—12.
Marnheim. Realanstalt am Donnersberg:
— — Jahresbericht für 1914/15.
Marburg. Gesellschaft zur Beförderung der gesamten Naturwissenschaft:
— — Sitzungsberichte 1914.
— — Schriften, Bd. III, 7.
Meissen. Fürsten- und Landesschule St. Afra:
— — Jahresbericht für das Jahr 1914/15, 4^0.
Melbourne. Commonwealth of Australia:
— — Report of the geological reconnaissance of the federal territory, 1913.

Metten. K. Gymnasium:
— — Jahresbericht 1914/15.

Milwaukee. Public Museum:
— — Bulletin of Wisconsin Natural History Society, vol. 12, No. 3, 4; vol. 13, No. 1—3.

Minneapolis. University of Minnesota Library:
— — Botanical Studies, vol. 4, part. 3, 1914.
— — Agricultur Experimental Studies. Bulletin, No. 122, 132, 134 et 137, 139.

Modena. Società dei Naturalisti e matematici:
— — Atti, V. ser., vol. 1 = 47.

Mount Hamilton (California). Lick Observatory:
— — Bulletin, vol. VII, No. 260—264, 266—275.
— — Publications, vol. 11 und 12.

München. Statistisches Amt:
— — Einzelschriften, Nr. 12 (Hygiene und soziale Fürsorge in München).
— K. Hof- und Staatsbibliothek:
— — Catalogus cod. manuscript. Bibl. Reg. Mon., tom. I, pars III (cod. zendicos compl.), M. 1915.
— K. Hydrotechnisches Bureau:
— — Jahrbuch 1913, Heft 2—4; 1914, Heft 1.
— Ornithologische Gesellschaft:
— — Verhandlungen, Bd. XII, 2, 3.
— K. Ludwigs-Gymnasium:
— — Jahresbericht 1914/15.
— K. Luitpold-Gymnasium:
— — Jahresbericht 1914/15 und Programm von Rueß.
— K. Maximilians-Gymnasium:
— — Jahresbericht 1914/15 und Programm von Silverio-Hümmerich.
— K. Theresien-Gymnasium:
— — Jahresbericht 1914/15.
— K. Wilhelms-Gymnasium:
— — Jahresbericht 1914/15 und Programm von Belzner.
— K. Wittelsbacher Gymnasium:
— — Jahresbericht 1914/15.
— K. Realgymnasium:
— — 51. Jahresbericht, 1914/15 und Beigabe.
— K. Technische Hochschule:
— — Bericht über das Studienjahr 1913/14.
— — Programm für das Studienjahr 1914/15 und 1915/16.
— — Personalstand im S.-S. 1914; W.-S. 1914/15; S.-S. 1915; W.-S. 1915/16.
— — Schriften 1914.

München. Metropolitan-Kapitel München-Freising:
— — Amtsblatt der Erzdiözese München und Freising 1915 mit Register.
— Deutsches Museum:
— — 11. Verwaltungsbericht und Lazarettzug 2.
— K. Luitpold-Kreisoberrealschule:
— — 8. Jahresbericht, 1914/15.
— K. Maria Theresia Kreisrealschule:
— — 16. Jahresbericht, 1914/15.
— K. Universität:
— — Personalstand, S.-S. 1915; W.-S. 1915/16.
— — Schriften aus dem Jahre 1914/15 in 4^0 und 8^0.
— — Verzeichnis der Vorlesungen, S.-S. 1915; W.-S. 1915/16.
— Ärztlicher Verein:
— — Sitzungsberichte, Bd. 24, 1914.
— Historischer Verein von Oberbayern in München:
— — Oberbayerisches Archiv, Bd. 60, Heft 1.
— — Altbayerische Monatschrift, Jahrg. 13, Heft 1.
— K. Meteorologische Zentralstation:
— Übersicht über die Witterungsverhältnisse im Königreich Bayern 1914, Nr. 11, 12; 1915, Nr. 1—11.

Münster. Westfäl. Provinzialverein für Wissenschaft u. Kunst:
— — Jahresbericht 42, 1913/14.
— Verein für Geschichte und Altertumskunde Westfalens:
— — Zeitschrift für vaterländische Geschichte, Bd. 72, 1, 2.

Nancy. Académie de Stanislas:
— — Mémoires, année 163, VI. sér., tom. 10.
— Société d'archéologique Lorraine et du Musée Historique Lorrain:
— — Bulletin 1913, No. 12; 1914, No. 1—6.
— — Mémoires, tom. 63, 1913.
— Société des sciences:
— — Bulletin, tom. 14, fasc. 1—3.

Nantes. Société des sciences naturelles de l'Ouest de la France:
— — Bulletin, tom. 3, trim. 1, 2.

Narbonne. Commission archéologique:
— — Bulletin 1914, sem. 1.

Neapel. Stazione zoologica:
— — Mitteilungen, Bd. 21, Heft 6, 7; Bd. 22, Heft 1—10.

Neuchâtel. Société Neuchâteloise de géographie:
— — Bulletin, tom. 24, 1915.
— Société des sciences naturelles:
— — Mémoires, tom. 5, 1914.

Neumarkt i. Obpf. Histor. Verein:
— — Jahresbericht 1912/13.
New Haven. American Oriental Society:
— — Journal, vol. 34, part 3, 4; vol. 35, part 1—3.
— Connecticut Academy of arts and sciences:
— — Transactions, vol. 18, Anhang.
— Yale University Library:
— — Yale Review, N. S., vol. 4, No. 3, 4; vol. 5, No. 1.
— — American Journal of Science, No. 229—232.
New York. Academy of Sciences:
— — Annals, vol. 23, part 144—353.
— American Association of genito-urinary:
— — Transactions, vol. 8, 1914.
— American Philological Association:
— — Transactions and Proceedings, vol. 44.
— American Museum of Natural History:
— — Anthropological Papers, vol. 14, part 1.
— — Journal, vol. 15, No. 1—7.
— Botanical garden Library:
— — Bulletin, vol. 8, No. 32.
— American Geographical Society:
— — Bulletin, vol. 47, No. 1—12 und Index 1914.
— Geological Society of America:
— — Bulletin, vol. 25, No. 2.
— American Mathematical Society:
— — Bulletin, No. 231—243.
— — Transactions, vol. 15, No. 4; vol. 16, No. 1—4.
— — List of members Jan. 1915.
— Zoological Society:
— — Zoologica, vol. 1, No. 19, 20.
— Columbia University:
— — Publications, No. 3, 5.
Nördlingen. Historischer Verein:
— — Jahrbuch 1—4 (1912—15).
Nürnberg. Naturhistorische Gesellschaft:
— — Jahresbericht, 1912/13.
— — Mitteilungen, 5. Jahrg., 1, 2; 6. Jahrg.; 7. Jahrg., 1, 2.
— K. Altes Gymnasium:
— — Jahresbericht 1914/15.
— K. Neues Gymnasium:
— — Jahresbericht 1914/15.
— Germanisches Nationalmuseum:
— — Anzeiger 1914, 1—4.

Nürnberg. Germanisches Nationalmuseum:
— — Mitteilungen 1914.
— Verein für Geschichte der Stadt:
— — 37. Jahresbericht, 1914.
— — Mitteilungen, Heft 21, 1915.

Ottawa. Division de la commission géologique:
— — Publications, No. 1065, 1088, 1111, 1161, 1328, 1329.
— — Map 18a.

Padua. Accademia Veneto-Trentina-Istriana:
— — Atti, 3. Serie, anno 7, 1914.
— Museo civico:
— — Bollettino, anno 16, fasc. 1—6.

Palermo. Circolo matematico:
— — Rendiconti, tom. 39, fasc. 1.
— Società Siciliana di scienze naturali:
— Il Naturalista Siciliano, vol. 22, No. 6—12.

Parenzo. Società Istriana di archeologia e storia patria:
— — Atti e memorie, vol. 30, 1914.

Paris. Redaction „La paix par le droit":
— — La paix, année 24, No. 15—18, 23; année 25, No. 1, 2, 5, 6, 9—16.

Pasing. K. Progymnasium:
— — Jahresbericht 1914/15.

Passau. K. Lyzeum:
— — Jahresbericht 1914/15.

Philadelphia. Academy of natural Sciences:
— — Proceedings, vol. 65, part 3; vol. 66, part 1.
— Pennsylvania Museum and School of industrial art:
— — Bulletin, No. 49—52.
— — Report 39.
— Historical Society of Pennsylvania:
— — The Pennsylvania Magazine of History, No. 153—155.
— American Philosophical Society:
— — Proceedings, No. 213, 214.
— — Report 1914.
— University:
— — Babylonion Section, vol. VIII, 1.

Pisa. Società Italiana di fisica:
— — Il nuovo Cimento, ser. VI, anno 60, vol. 6; sem. 1 = fasc. 10—12.

Pistoia. R. Deputazione di storia patria:
— — Bulletino, anno XVII, fasc. 1.

Plauen. Altertumsverein:
— — Mitteilungen, 25. Jahresschrift, 1915.
— Gymnasium:
— — 26. Jahresbericht, 1914/15.

Pola. Hydrographisches Amt der K. K. Kriegsmarine:
— — Veröffentlichungen, Nr. 35, 36.

Posen. Historische Gesellschaft:
— — Zeitschrift, Jahrg. 29, Heft 1.
— — Historische Monatsblätter, Jahrg. 15, Nr. 1—12.

Potsdam. Geodätisches Institut:
— — Veröffentlichungen, N. F., Nr. 64, 65.
— Astrophysikalisches Observatorium:
— — Publikationen, Nr. 70.
— — Photographische Himmelskarte, Bd. 7, 1915, und Berichtigung zu Bd. 1—7.
— Zentralbureau der internationalen Erdmessung:
— — Veröffentlichungen, Nr. 27, 28.

Prag. Landesarchiv:
— — Archiv Český, Díl 32.
— K. Böhmische Gesellschaft der Wissenschaften:
— — Jahresbericht 1914.
— — Sitzungsberichte der philos.-hist. Klasse, 1914; der math.-naturwiss. Klasse, 1914.
— Gesellschaft zur Förderung deutscher Wissenschaft etc.:
— — Bibliothek deutscher Schriftsteller, Bd. 30, 32—34.
— Deutscher naturwissenschaftlich-medizinischer Verein für Böhmen „Lotos“:
— — Lotos, Naturwissenschaftliche Zeitschrift, Bd. 62, Nr. 1—10.
— — Abhandlungen, Bd. III, Heft 1—7.
— Čechoslavisches Museum:
— — Narodpisný Věstník Československý, Bd. 9, Nr. 3—10; Bd. 10, Nr. 1—10.
— Verein für Geschichte der Deutschen in Böhmen:
— — Mitteilungen, Jahrg. 53, Nr. 1—4.
— Deutsche Karl Ferdinands-Universität:
— — Ordnung der Vorlesungen, S.-S. 1915; W.-S. 1915/16.
— — Inauguration des Rektors 1914/15.

Ravenna. Bolletino storico Romagnolo:
— — Felix Ravenna, No. 17.

Regensburg. K. Neues Gymnasium:
— — Jahresbericht für 1914/15 mit Programm von Patin.

Regensburg. Historischer Verein:
— — Verhandlungen, Bd. 65.
Rio de Janeiro. Museu nacional:
— — Archivos, vol. 16.
Rom. Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei:
— — Atti, anno 68, sess. 1.
— — Memorie, vol. 32, 1914.
— R. Comitato geologico d'Italia:
— — Bollettino, anno 1913/14, No. 2.
— Kaiserl. Deutsches Archäologisches Institut:
— — Mitteilungen, Bd. 29, Nr. 3, 4.
— British and American Archaeological Society:
— — Journal, vol. V, No. 1.
— R. Società Romana di storia patria:
— — Archivio, tom. 37, No. 3, 4.
— Specola Vaticana:
— — Catalogo astrografico, vol. 1, 1914.
Rosenheim. Gymnasium:
— — Jahresberichte für 1914/15.
Rovereto. R. Accademia di scienze degli Agiati:
— — Atti, ser. IV, vol. 4.

Saargemünd. Gymnasium mit Realabteilung:
— — 44. Jahresbericht, 1914/15.
Salzburg. K. K. Staatsgymnasium:
— — Programm für das Jahr 1914/15.
— Gesellschaft für Salzburgische Landeskunde:
— — Mitteilungen 55, 1915.
Salzwedel. Altmärkischer Verein für vaterländische Geschichte:
— — Jahresbericht 41, 42, 1914/15.
San Francisco. California Academy of Sciences:
— — Proceedings, ser. IV, vol. 4, No. 4/5; vol. 5, No. 1—31.
Santiago de Chile. Observatorio astronomico:
— — Publicaciones, No. 7—9.
Sarajevo. Landesmuseum:
— — Glasnik 26, 1914, No. 4; 27, 1915, 1, 2.
Schweinfurt. K. Realschule:
— — Jahresbericht 1914/15.
Siena. Deputazione de la Storia patria:
— — Bulletino Senese di storia patria, anno XX, fasc. 3; anno XXI, fasc. 3.
Speier. Historischer Verein der Pfalz:
— — Mitteilungen, Bd. 34/35, 1914/15.

Stade. Verein für Geschichte und Altertümer etc.:
— — Stader Archiv, N. F., Heft 5, 1915.
Leland Stanford (Cal.). University:
— — Martin, Schäfer, Meyer, Campbell, Martin-Smith.
Stavanger. Museum:
— — Aarshefte for 1914 (25).
Stettin. Gesellschaft für Pommersche Geschichte und Altertumskunde:
— — Baltische Studien, N. F., Bd. 18, 1914.
— — Monatsblätter 1914, Nr. 1—12.
Stockholm. K. Akademie der Wissenschaften:
— — Les prix Nobel en 1913.
— — Arkiv för Zoologi, Bd. 8, No. 2—4; Bd. 9, No. 1, 2.
— — Arkiv för Kemi, Bd. 5, No. 3—6.
— — Arkiv för Botanik, Bd. 13, No. 2—4; Bd. 14, No. 1.
— — Arkiv för Matematik, Bd. 9, No. 3 und 4; Bd. 10, No. 1—3.
— — Meddelanden från Nobel-Institut, Bd. 3, No. 1 und 2.
— Meddelanden från K. Sv. Vetenskaps Akademiens trädgård Bergielund:
— — Acta horti Bergiani, tom. V, 1915.
— — Arsbök for år 1914.
— — Meteorologiska Jakttagelser i Sverige, vol. 55.
— — Berzelius Bref I, 3; II, 1.
— K. Vitterhets Historie och Antikvitets Akademie:
— — Fornvännen, Årgangen 9, 1914.
— — Tynell, Skånes medeltida dopfnutar, Heft 2.
— K. Landtbruks-Akademie:
— — Handlingar och tidskrift, 1914, No. 8; 1915, No. 1—8.
— K. Bibliothek:
— — Akzessionskatalog 29, 1914.
— Entomologiska föreningen:
— — Tidskrift, Jahrg. 35, 1914, No. 1—4; 36, 1915, No. 1—4.
— Geologiska Föreningens:
— — Förhandlingar, Bd. 36, No. 7; Bd. 37, No. 1—7.
— Nationalekonomiska föreningen:
— — Förhandlingar 1914.
— Schwedische Gesellschaft für Anthropologie und Geographie:
— — Ymer, Jahrg. 34, Heft 3, 4; 35, Heft 1—3.
— Svenska Literatursälskapet:
— — Skrifter 7, 3; 17; Samlaren 35.
— Nordiska Museet:
— — Fataburen 1914, Heft 1—4.

Stockholm. Reichsarchiv:
— — Meddelanden, N. F., 4, No. 3.
— Sveriges geologiska Undersökning:
— — Årsbok 6, 1912; 7, 1913; 8, 1914.
— — Afhandlingar och uppsatser, No. 6 und Atlas.
— — Serie Aa, No. 147 (mit Karte).
— Forstliche Versuchsanstalt:
— — Meddelanden, Heft 11, 1914.
Strassburg. K. Hauptstation für Erdbebenforschung:
— — Monatliche Übersicht 1914, 1915.
— Wissenschaftliche Gesellschaft:
— — Schriften 22—24.
— Internationale Kommission für wissenschaftliche Luftschiffahrt:
— — 1912, Heft 7—9.
Stuttgart. K. Landesbibliothek:
— — Fischer, Schwäbisches Wörterbuch, Lief. 50, 51.
— — Württemberg. Kommission für Landesgeschichte:
— — Vierteljahreshefte für Landesgeschichte, N. F., Jahrg. 24, 1915, Nr. 1, 2.
— — Württemberger Geschichtsquellen, Bd. 18.
— K. Württembergisches Statistisches Landesamt:
— — Beschreibung des Oberamts Tettnang. 2. Bearbeitung, 1915, Heft 1.
— — Württembergische Jahrbücher für Statistik und Landeskunde. Jahrg. 1914, Heft 2; 1915, Heft 1.

Tacubaya. Observatorio astronomico nacional:
— — Annuario, año 35 (3 Teile).
Thorn. Copernikus-Verein für Wissenschaft und Kunst:
— — Mitteilungen, Heft 22, 23.
Tiflis. Erdbebenwarte:
— — Wochenbericht 2, 1913.
Tokyo. Mathematico-Physical Society:
— — Proceedings, 2d ser., vol. 7, No. 21, 22; vol. 8, No. 1—8.
— Kaiserl. Universität:
— — Mitteilungen aus der medizinischen Fakultät, Bd. 13, Nr. 1, 2.
Trient. Biblioteca e Museo comunale:
— — Archivio Trentino, anno 29, fasc. 3/4.
Triest. K. K. Maritimes Observatorium:
— — Rapporto annuale, vol. 27, 1914.
Tromsö. Museum:
— — Aarshefter 35/36.
— — Aarsberetning for 1912, 1913.

Troppau. Kaiser Franz Joseph-Museum für Kunst und Gewerbe:
— — Zeitschrift für Geschichte und Kulturgeschichte Österreichisch-Schlesiens, Jahrg. 8, Heft 4 und Jahrg. 9.

Tübingen. Universität:
— — Universitäts-Schriften 1914/15.

Turin. Accademia d'agricoltura:
— — Annali, vol. 57, 1914.
— Museo di Zoologia ed Anatomia comparata:
— — Bolletino, vol. 29, 1914, No. 680—691.

Ulm. Verein für Kunst und Altertum:
— — Mitteilungen, Heft 20.
— Verein für Mathematik und Naturwissenschaften:
— — Mitteilungen, Heft 16, 1915.

Upsala. K. Universität:
— — Koraen Tage, Observ. seismographiques 1907—12.
— — Schriften aus dem Jahre 1913/14.
— — Eranos, Acta philol. Suecana, vol. 14, fasc. 2.
— — Zoologiska Bidrag från Upsala, Bd. 3, 1914.

Utrecht. Historisch Genootschap:
— — Bijdragen en mededeelingen, deel 35.
— Provincial Utrechtsch Genootschap:
— — Aanteekeningen 1915.
— Institut Royal Météorologique des Pays-Bas:
— — Annuaire 1913, A, B.
— — Mededeelingen en Verhandelingen, No. 18, 19.
— — Overzicht, Jahrg. 11, No. 12; Jahrg. 12, No. 1—11.
— — Onweders 1912, deel 33.
— — Ergebnisse aürolog. Beobachtungen 2, 1913.
— — Ols Ocean Indien 1856—1912, Text und Taf.
— Physiol. Laborat. d. Hoogeschool:
— — Onderzoekingen, vol. V, No. 16.

Vaduz. Histor. Verein für das Fürstentum Liechtenstein:
— — Jahrbuch, Bd. 14, 15.

Veglia. Altslavische Akademie:
— — Pěnija Rimskago Misala 1914.
— — Vestnik 2.

Venedig. Ateneo Veneto:
— — Ateneo Veneto, anno 38, vol. 1.
— Comitato talassografico Italiano:
— — Bolletino trimestrale, No. 27—30.

*

Verona. Museo civico:
— — Madonna Verona, fasc. 32.
Vicenza. Accademia Olimpica:
— — Atti, N. S., vol. 4, 1913/14.

Washington. National Academy of Sciences:
— — Proceedings, vol. 1, No. 1—4, 6—11.
— U. S. Department of Agriculture:
— — Yearbook 1914.
— — Journal of the agricultural Researche, vol. 2, No. 5, 6; vol. 3, No. 1—6; vol. 4, No. 1—6; vol. 5, No. 1—10.
— Bureau of railway economics:
— — Bulletin, No. 70—79, 81—83.
— Carnegie Institution:
— — Annual report of the Director of Department of histor. research, 1913 und 1914.
— Smithsonian Institution:
— — Miscellaneous Collections, No. 2254, 2270—2273, 2275, 2315, 2316, 2319, 2320, 2356, 2361—2364, 2366.
— U. S. National Museum:
— — Bulletin, No. 50, part 6; No. 89.
— Surgeon Generals Office U. S. Army:
— — Index catalogue, vol. 19.
— U. S. Coast and Geodetic Survey Office:
— — Spec.-publication, No. 20.
— U. S. Geological Survey:
— — Bulletin, No. 531, 538—540, 542, 543, 545—548, 550, 556, 557, 571, 574, 579, 581 A, B, 585.
— — Water Supply Paper, No. 309, 327, 345 E, F.
— — Mineral Resources 1913, I, 1—5, II, 1—13, 15—19.
Weihenstephan. A. Akademie für Landwirtschaft und Brauerei:
— — Bericht 1914/15.
Weimar. Großherzogl. Bibliothek:
— — Zuwachs in den Jahren 1911—13.
— Thüring. botanischer Verein:
— — Mitteilungen, N. F., Heft 32.
Wernigerode. Harzverein für Geschichte:
— — Zeitschrift, Jahrg. 47, Heft 3, 4.
Wien. Kaiserl. Akademie der Wissenschaften:
— — Sitzungsberichte: a) der philos.-histor. Klasse, Bd. 168, Abh. 5; Bd. 169, Abh. 2; Bd. 170, Abh. 2; Bd. 172, Abh. 2; Bd. 174, Abh. 5; Bd. 175, Abh. 5; Bd. 176, Abh. 1, 2, 5, 6; Bd. 177, Abh. 2, 3, 5; Bd. 178, Abh. 1—5; Bd. 179, Abh. 1, 3; b) der math.-naturwiss.

Klasse, Abt. I, Bd. 123, Abh. 2—10; Bd. 124, Abh. 1—4; Abt. IIa, Bd. 123, Abh. 4—10; Bd. 124, Abh. 1—4; Abt. IIb, Bd. 123, Abh. 4 bis 9; Bd. 124, Abh. 1—4; Abt. III, Bd. 123, Abh. 1—10.
— — Denkschriften der philos.-histor. Klasse, Bd. 53, Nr. 1, 2, 3; Bd. 57, Nr. 1 und 3; Bd. 58, Nr. 1, 3, 4; math.-naturwiss. Klasse, Bd. 90.
— — Anzeiger (math.-naturwiss. Klasse) 1914, Nr. 1—17.
— — Mitteilungen der prähistorischen Kommission, Bd. II, Nr. 48.
— — Mitteilungen der Erdbebenkommission, Nr. 48.
— — Almanach, 64. Jahrg., 1914.
— — Archiv für österreichische Geschichte, Bd. 104, 2; 106, 1.
— — Mittelalterliche Bibliothekskataloge Österreichs, I. Bd., Niederösterreich, 1915.
— K. K. Gesellschaft der Ärzte:
— — Wiener Klinische Wochenschrift 1915, Nr. 1—52, 4°.
— Zoologisch-botanische Gesellschaft:
— — Verhandlungen, Bd. 64, Nr. 5—10; Bd. 65, Nr. 1—10.
— — Abhandlungen, Bd. 9, Nr. 1.
— K. K. Naturhistorisches Hofmuseum:
— — Annalen, Bd. 28, Nr. 3, 4; Bd. 29, Nr. 1, 2.
— Israelitisch-theologische Lehranstalt:
— — Jahresbericht 22.
— Mechitharisten-Kongregation:
— — Handes Amsorya 1914, No. 10, 11.
— K. K. Geologische Reichsanstalt:
— — Abhandlungen, Bd. 23, Heft 1.
— — Verhandlungen 1914, Nr. 12—18; 1915, Nr. 1—14.
— — Jahrbuch, Bd. 64, Heft 1—3.
— Verein zur Verbreitung naturwissenschaftl. Kenntnisse:
— — Schriften, Bd. 55, 1914/15.
— K. K. Universität:
— — Inauguration des Rektors 1915/16.
— — Verwaltungsbericht der K. K. Univ.-Bibliothek 8. 1913/14.
— — Übersicht der Behörden 1915/16.
— — Vorlesungen, S.-S. 1915; W.-S. 1915/16.
— — Bericht über die volkstümlichen Universitätsvorträge 1914/15.
Wiesbaden. Verein für Naturkunde:
— — Jahrbücher, Jahrg. 67.
Winterthur. Naturwissenschaftliche Gesellschaft:
— — Mitteilungen, Heft 10.
Wolfenbüttel. Geschichtsverein für das Herzogtum Braunschweig:
— — Jahrbuch, 13. Jahrg., 1914.
— — Braunschweigisches Magazin, Bd. 20, 1914, 4°.

Würzburg. Physikalisch-medizinische Gesellschaft:
— — Sitzungsberichte, 1914, Nr. 3, 4; 1915, Nr. 1, 2.
— — Verhandlungen, N. F., Bd. 42, Heft 6; Bd. 43, Heft 5.
— K. Altes Gymnasium:
— — Jahresbericht 1914/15 mit Programm von Rheinfelder.
— K. Neues Gymnasium:
— — Jahresbericht 1914/15 mit Programm von Kempf.
— K. Universität:
— — Verzeichnis der Vorlesungen, S.-S. 1915; W.-S. 1915/16.
— — Personalstand 1914/15 und 1915.
— Historischer Verein:
— — Archiv, Bd. 56.
— — Jahresbericht für 1913.
Wunsiedel. K. Realschule:
— — Jahresbericht 1914/15.

Zürich. Antiquarische Gesellschaft:
— — Mitteilungen, Bd. 28, Heft 1 (= Nr. 79).
— Naturforschende Gesellschaft:
— — Jahrhundertfeier 1915,
— — Neujahrsblatt 117.
— — Vierteljahresschrift, Jahrg. 59, Heft 3, 4; Jahrg. 60, Heft 1, 2.
— Schweizerische Geodätische Kommission:
— — Astronomisch-geodätische Arbeiten, Bd. 14.
— Schweizerische Geologische Kommission:
— — Beiträge zur geologischen Karte der Schweiz, N. F., Lief. 30 und 45. Geotechnische Serie, Nr. 5.
— Schweizerisches Landesmuseum:
— — Anzeiger für Schweizerische Altertumskunde, N. F., Bd. 16, Nr. 4; Bd. 17, Nr. 1—3.
— — 23. Jahresbericht, 1914.
— Bibliothek des Eidgenössischen Polytechnikums:
— — Dissertationen 1914/15.
— — Programm, S.-S. 1915, W.-S. 1915/16.
— Sternwarte:
— — Astronomische Mitteilungen, Nr. 105.
— Schweizerische meteorologische Zentralanstalt:
— — Annalen, 50. Jahrg., 1913.
Zweibrücken. K. Humanistisches Gymnasium:
— — Jahresbericht 1914/15.

Geschenke von Privatpersonen, Geschäftsfirmen und Redaktionen:

Bensaude, Joaquim:
— Histoire de la science nautique Portugaise. Munich 1914.

Bericht über die 3. Generalversammlung des mitteleuropäischen Wirtschaftsvereins.

Dittmeyer, L.:
— Guil. Moerbeck. Dillingen 1914.

Fedde, Frdr.:
— Repertorium specierum novarum regni vegetabilis. Berlin 1914.

Ginsberg, G.:
— Erfahrung aus dem Alltäglichen. Wien 1914.

Lambros, Spyrid:
— *Νέος Ἑλληνομνήμων*, Bd. XI, No. 3 und 4; XII, No. 1, 2, 3.

Niederlein, Gust.:
— Plantago Bismarkii N. Zittau 1915.

Schmidt:
— Geschichte des Progymnasiums Edenkoben, 1837—1912.

Sloane:
— Party government in the U. St. of America, 1914.
— The Balkans, 1914.
— Life of Napol. Bonaparte, 4 voll.

Teubner, Leipzig:
— Encyclopédie des sciences mathématiques, tome IV, vol. I, fasc. 1.

Die Konstitution des Wasserstoff-Moleküls.

Von **P. Debye**, Göttingen.

Vorgelegt von A. Sommerfeld in der Sitzung am 9. Januar 1915.

Durch die neuesten Arbeiten von Rutherford, Nicholson und insbesondere von Bohr ist es zum mindesten sehr wahrscheinlich geworden, daß die Atome „Planetensysteme“ sind, in welchen Kerne von äußerst geringen Dimensionen und beträchtlicher Masse einerseits und gewöhnliche leichte Elektronen andererseits umeinander kreisen. Bekanntlich gelang es Bohr auf Grund eines solchen Bildes unter Hinzuziehung der Quantenhypothese einen Weg zum Verständnis für die Gesetzmäßigkeiten der Serienlinien anzubahnen und insbesondere die universelle Rydbergsche Konstante der Serien auf bekannte Größen zurückzuführen.

Ganz abseits von diesen Anwendungen und scheinbar ohne Berührungspunkt damit lag die herkömmliche von Ketteler, Helmholtz, Drude entwickelte Dispersionstheorie. Ein Zusammenhang zwischen den hier benötigten quasielastisch gebundenen und den dort in kreisender Bewegung befindlichen Elektronen fehlte.

Es ist klar, daß nun die Aufgabe an uns herantritt, uns von den beiden für verschiedene Erscheinungsgebiete zurechtgemachten verschiedenen Vorstellungen zu befreien. Entweder müssen wir eine der beiden als allein richtige erkennen, oder ein neues Modell zu konstruieren suchen, das beide umfaßt.

An erster Stelle im periodischen System steht der Wasserstoff, wir werden also hier die einfachsten Verhältnisse erwarten

dürfen. Im folgenden wollen wir zeigen, daß die oben zuerst genannte Planetensystem-Hypothese vollständig ausreicht, um das ganze optische Verhalten des Wasserstoffs zu erklären.

Die auf dieser Basis zu gewinnende, später angegebene Dispersionsformel zeigt gegenüber den üblichen Formeln Vorteile in zweifacher Hinsicht. Zwar gelingt es nämlich meistens auch auf Grund der Kettelerschen Dispersionsformel, den Brechungsexponenten als Funktion der Wellenlänge recht genau darzustellen. Berechnet man indessen aus den Konstanten dieser Formel das Verhältnis Ladung durch Masse der dispergierenden Elektronen, dann findet man vielfach Werte, die erheblich von der direkt, experimentell bestimmten Zahl abweichen. Oder anders ausgedrückt: sieht man jenes Verhältnis als bekannt an, dann müßte man eine gebrochene Zahl von Elektronen im Atom annehmen. Eine ähnliche Schwierigkeit tritt bei unsrer Anschauung nicht mehr auf.

Außerdem ist es nicht mehr nötig, eine nachträglich aus den Experimenten zu bestimmende quasielastische Kraft einzuführen. Es zeigt sich, daß als einzige neue Konstante neben Ladung und Masse des Elektrons das Plancksche Wirkungsquantum auftritt. Ja man darf mit Recht die experimentelle Bestimmung der Dispersion des Wasserstoffs als eine gute Methode zur Feststellung der beiden Fundamentalgrößen: Verhältnis Ladung zu Masse des Elektrons und Wirkungsquantum ansehen.

Das Modell, welches von Bohr benutzt wurde, um die Balmersche Wasserstoffserie zu begründen, bestand aus einem Kern, in dem nahezu die Gesamtmasse des Wasserstoffatoms kondensiert ist und außerdem mit einer positiven Einheitsladung versehen. Um diesen Kern kreist ein Elektron in Bahnen, welche durch eine Quantenforderung bestimmt werden. So soll das Wasserstoffatom aussehen, dieses allein liefert das bekannte Serienspektrum.

Bei Dispersionsmessungen dagegen operieren wir mit dem zweiatomigen Wasserstoff-Molekül. Im Anschluß an das Atommodell liegt es nahe, das Molekül aufgebaut zu denken

aus zwei Kernen mit positiver Einheitsladung, um die in der Ebene senkrecht zur Verbindungslinie zwei Elektronen kreisen und zwar so, daß das Impulsmoment jedes einzelnen dieser Elektronen einer Quantenforderung gemäß den Wert $\frac{h}{2\pi}$ hat. Auch dieses Modell kommt schon bei Bohr vor;[1]) wir wollen zeigen, daß es mit Erfolg zum Verständnis des Dispersionsverlaufs für Wasserstoff herangezogen werden kann.

Dazu hat man zu berechnen, in welcher Art und Weise die regulär vorhandene Bewegung unter der Einwirkung einer äußeren periodischen elektrischen Kraft gestört wird. Das Bemerkenswerte ist, daß diese Störungsrechnung vollständig so ausgeführt werden kann, wie man das nach den Gesetzen der Mechanik erwartet und wie man es im großen für ein wirkliches Planetensystem ausführen würde. Auch sind die Kräfte zwischen den Kernen und Elektronen nur die gewöhnlichen Coulombschen. Überhaupt tritt eine Quantenhypothese nur dort auf, wo es sich darum handelt, das Modell durch Festlegung der regulären Winkelgeschwindigkeit der Elektronen in ihrer Bahn endgültig und vollständig zu bestimmen. In diesem Sinne enthalten die §§ 1—4 nur Rechnungen, welche sich auf die altbekannten Grundlagen stützen. Erst im § 4 wird an Hand von erfahrungsmäßigen Zahlen über den Dispersionsverlauf gezeigt, wie das Wirkungsquantum mit dem Modell zusammenhängt. In § 5 schließlich wird auf einige Aufgaben hingewiesen, die uns nunmehr an Hand des Modells gestellt werden.

§ 1. Die Bewegungsgleichungen der Elektronen unter Einfluss einer elektrischen Welle.

Sind keine störenden Kräfte vorhanden, dann ist eine Konstellation möglich, bei welcher die beiden positiv mit der Ladung ε geladenen Kerne sich um d ober- resp. unterhalb der Bewegungsebene der Elektronen befinden, während die Elek-

[1]) Phil. Mag. 1913, S. 857. Vgl. auch J. J. Thomson, Conseil de physique Solvay 1913.

tronen an den beiden Enden eines Ourchmessers befindlich in einem Kreise mit dem Radius a herumlaufen.

Damit die Kerne im Gleichgewicht sind, muß unter Anwendung des Coulombschen Gesetzes:

$$\frac{\varepsilon^2}{4d^2} = 2\frac{\varepsilon^2}{a^2+d^2}\frac{d}{\sqrt{a^2+d^2}} \tag{1}$$

sein.

Andererseits hält sich an jedem Elektron die Zentrifugalkraft mit den Anziehungen der Kerne und der Abstoßung des anderen Elektrons das Gleichgewicht. Ist die Winkelgeschwindigkeit der Kreisbewegung ω, dann ergibt diese Forderung die Gleichung:

$$\mu a \omega^2 = 2\frac{\varepsilon^2}{a^2+d^2}\frac{a}{\sqrt{a^2+d^2}} - \frac{\varepsilon^2}{4a^2}, \tag{2}$$

wenn die Masse des Elektrons μ genannt wird. Aus (1) folgt:

$$\frac{d}{a} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \tag{1'}$$

während unter Berücksichtigung dieses Resultats aus Gleichung (2) die Beziehung:

$$\mu a \omega^2 = \frac{3\sqrt{3}-1}{4}\frac{\varepsilon^2}{a^2} \tag{2'}$$

abgeleitet werden kann.

Das System ist also bei jedem Wert von ω möglich. Bei Vergrößerung von ω schrumpfen die linearen Dimensionen des Modells propottional $\omega^{-2/3}$ zusammen.

Beim Aufbau des Modells kommen in dieser Weise nur die gewöhnlichen elektrostatischen Kräfte in Frage. Wesentlich ist die Vernachlässigung der Ausstrahlung, obwohl eine elektrodynamische Begründung für dieses Vorgehen fehlt.

Willkürlich ist vorläufig noch die Winkelgeschwindigkeit ω. Allein an dieser Stelle kann eine außerhalb der Mechanik stehende Forderung noch eingreifen. Im Einklange mit Nicholson und Bohr, sowie mit der von Ehrenfest befürworteten

Anwendungsart der Quanten auf die Beschreibung der Temperaturabhängigkeit der Rotationsbewegung, sowie schließlich mit dem allgemeinen Prinzip für die Einführung der Quanten bei beliebiger Bewegung, wie ich dasselbe in den Göttinger Vorträgen (Teubner 1913) formuliert habe, können wir ω durch die Forderung bestimmen:

$$\text{(3)} \qquad \text{Impulsmoment} = \mu a^2 \omega = \frac{h}{2\pi}$$

(h = Planckscher Wirkungsquantum).

Obwohl ich tatsächlich diese Forderung als letzten Baustein des Modells benutze, soll doch vorläufig von einer Verwendung der letzteren Gleichung abgesehen werden. Vielmehr rechne ich im folgenden mit einer vorläufig unbestimmten Winkelgeschwindigkeit ω und in allen Einzelnheiten und vollständig nach den gewöhnlichen Gesetzen der Mechanik. Erst ganz am Schlusse, wenn die erhaltene Dispersionsformel mit den experimentell gewonnenen Zahlen verglichen wird, soll mit Hülfe dieser Zahlen gezeigt werden, daß der Wert von ω tatsächlich der obigen Quantenforderung entspricht.

Um die Störungen der Hauptbewegung unter Einfluß äußerer Kräfte in Formeln zu bringen, führe ich in der Ebene der Elektronen Polarkooïdinaten r_1, φ_1 für das erste; r_2, φ_2 für das zweite Elektron ein. Senkrecht zu dieser Ebene zählen wir die Kooïdinaten z_1, resp. z_2. Zu diesen Kooïdinaten gehören die Impulse ϱ_1, ψ_1, ζ_1, resp. ϱ_2, ψ_2, ζ_2, definiert durch die Formeln:

$$\text{(4)} \quad \begin{cases} \varrho_1 = \mu \dot{r}_1, & \psi_1 = \mu r_1^2 \dot{\varphi}_1, & \zeta_1 = \mu \dot{z}_1, \\ \varrho_2 = \mu \dot{r}_2, & \psi_2 = \mu r_3^2 \dot{\varphi}_2, & \zeta_2 = \mu \dot{z}_2. \end{cases}$$

Da die Masse der Kerne sehr groß ist im Vergleich mit der Masse der Elektronen (Verhältnis 2000 : 1), werden wir die Kerne als ruhend behandeln und uns auf die Störungen der Elektronenbahn beschränken. Ist dann die potentielle Energie des Wasserstoffsystems U und nennen wir die auf die

Elektronen in Richtung der eingeführten Koordinaten wirkenden störenden Kräfte:

$$F_{r1}, \quad F_{\varphi 1}, \quad F_{z1},$$

resp.

$$F_{r2}, \quad F_{\varphi 2}, \quad F_{z2},$$

dann haben die Hamiltonschen kanonischen Gleichungen folgende Form:

$$(5)\quad \begin{cases} \mu \dfrac{dr_1}{dt} = \varrho_1, & -\dfrac{d\varrho_1}{dt} = -\dfrac{1}{\mu}\dfrac{\psi_1^2}{r_1^3} + \dfrac{\partial U}{\partial r_1} - F_{r1}, \\ \mu \dfrac{d\varphi_1}{dt} = \dfrac{\psi_1}{r_1^2}, & -\dfrac{d\psi_1}{dt} = \dfrac{\partial U}{\partial \varphi_1} - r_1 F_{\varphi 1}, \\ \mu \dfrac{dz_1}{dt} = \zeta_1, & -\dfrac{d\zeta_1}{dt} = \dfrac{\partial U}{\partial z_1} - F_{z1}, \\ \mu \dfrac{dr_2}{dt} = \varrho_2, & -\dfrac{d\varrho_2}{dt} = -\dfrac{1}{\mu}\dfrac{\psi_2^2}{r_2^3} + \dfrac{\partial U}{\partial r_2} - F_{r2}, \\ \mu \dfrac{d\varphi_2}{dt} = \dfrac{\psi_2}{r_2^2}, & -\dfrac{d\psi_2}{dt} = \dfrac{\partial U}{\partial \varphi_2} - r_2 F_{\varphi 2}, \\ \mu \dfrac{dz_2}{dt} = \zeta_2, & -\dfrac{d\zeta_2}{dt} = \dfrac{\partial U}{\partial z_2} - F_{z2}. \end{cases}$$

Nun sind die durch äußere Kräfte hervorgerufenen Störungen im allgemeinen sehr klein; wir wollen deshalb die Gleichungen (5) dadurch in lineare Gleichungen verwandeln, daß wir als neue Variabele die Abweichungen der Koordinaten und Impulse von ihren Gleichgewichtswerten einführen und dieselben als kleine Größen erster Ordnung behandeln. Wir setzen:

$$(6)\quad \begin{cases} r_1 = a + R_1, & \varphi_1 = \alpha + \omega t + \Phi_1, & z_1 = Z_1, \\ r_2 = a + R_2, & \varphi_2 = \alpha + \omega t - \pi + \Phi_2, & z_2 = Z_2, \\ \varrho_1 = P_1, & \psi_1 = f + \Psi_1, & \zeta_1 = \mathbf{Z}_1, \\ \varrho_2 = P_2, & \psi_2 = f + \Psi_2, & \zeta_2 = \mathbf{Z}_2; \end{cases}$$

die neu eingeführten Größen $R_1 \ldots . Z_2$ sind dann unsre neuen Unbekannten. Setzt man dieselben sämtlich gleich Null,

dann erhält man die ungestörte Bewegung, wenn das Impulsmoment:

$$\mu a^2 \omega = f \tag{6'}$$

gesetzt wird. Durch a ist die Anfangslage der Elektronen zurzeit $t = 0$ charakterisiert. In den Grundgleichungen kommen erstens vor die Größen $\frac{\psi}{r^2}$ und $\frac{\psi^2}{r^3}$. Mit Rücksicht auf (6) kann man dafür in erster Näherung schreiben:

$$\left| \begin{array}{l} \dfrac{\psi}{r^2} = \dfrac{f + \Psi}{(a + R)^2} = \dfrac{f}{a^2} + \dfrac{f}{a^2}\left[\dfrac{\Psi}{f} - 2\,\dfrac{R}{a}\right] \\ \dfrac{\psi^2}{r^3} = \dfrac{(f + \Psi)^2}{(a + R)^3} = \dfrac{f^2}{a^3} + \dfrac{f^2}{a^3}\left[\dfrac{2\,\Psi}{f} - 3\,\dfrac{R}{a}\right] \end{array} \right. \tag{7}$$

Zweitens kommt die potentielle Energie U vor, die bei einer beliebigen Abweichung vom Gleichgewichtszustand eine Funktion der Kooidinaten R_1, Φ_1, Z_1, R_2, Φ_2, Z_2 wird. Eine elementare, aber etwas längere Rechnung liefert für U den folgenden Ausdruck in $R_1 \ldots\ldots Z_2$:

$$\begin{aligned} U = \frac{\varepsilon^2}{a}\Bigg[& \left(\frac{1}{2} - 2\sqrt{3}\right) + \frac{3\sqrt{3} - 1}{4}\,\frac{R_1 + R_2}{a} \\ & + \frac{1}{16}\left\{ 2\left(\frac{R_1 + R_2}{a}\right)^2 + (\Phi_1 - \Phi_2)^2 - \left(\frac{Z_1 - Z_2}{a}\right)^2 \right\} \\ & - \frac{1}{16}\left\{ \frac{3\sqrt{3}}{2}\left(5\,\frac{R_1^2}{a^2} - \frac{Z_1^2}{a^2}\right) + \frac{3\sqrt{3}}{2}\left(5\,\frac{R_2^2}{a^2} - \frac{Z_2^2}{a^2}\right) \right\} \Bigg]. \end{aligned} \tag{8}$$

Bei dieser Entwicklung wurden unsrer Grundhypothese gemäß nur die reinen Coulombschen Kräfte zwischen den Kernen und Elektronen in Betracht gezogen, während das Verhältnis $\frac{d}{a}$ nach (1') überall durch $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ersetzt wurde.

Drittens haben wir noch die äußeren Kräfte F anzugeben. Im Wasserstoffgas werden Moleküle mit allen möglichen Orientierungen vorhanden sein; führen wir noch in der Bewegungsebene der Elektronen die rechtwinkeligen Kooidinaten x, y ein, dann sind im allgemeinen sowohl x, als y, als z

Komponenten der anregenden Kräfte vorhanden. Die wesentliche Einwirkung auf das Wasserstoffsystem wird von der elektrischen Feldstärke der durch das Gas hindurchgehenden Welle herrühren; wir setzen ihre rechtwinkeligen Komponenten:

$$(9) \qquad \mathfrak{E}_x = P e^{ist}, \quad \mathfrak{E}_y = Q e^{ist}, \quad \mathfrak{E}_z = R e^{ist},$$

sodaß s die Frequenz (Schwingungszahl in 2π sec.) der einfallenden Welle bedeutet.

Da die Größen P, Q, R ebenfalls als von erster Ordnung klein anzusehen sind, kann bei der Berechnung der Kraftkomponenten $F_{r1} \ldots F_{z2}$ die Bewegung als ungestört angenommen werden. Dann erhält man:

$$(10) \quad \begin{cases} F_{r1} = -\varepsilon(\mathfrak{E}_x \cos(\alpha+\omega t) + \mathfrak{E}_y \sin(\alpha+\omega t)), \\ F_{\varphi 1} = -\varepsilon(-\mathfrak{E}_x \sin(\alpha+\omega t) + \mathfrak{E}_y \cos(\alpha+\omega t)), \\ F_{z1} = -\varepsilon \mathfrak{E}_z, \\ F_{r2} = +\varepsilon(\mathfrak{E}_x \cos(\alpha+\omega t) + \mathfrak{E}_y \sin(\alpha+\omega t)), \\ F_{\varphi 2} = +\varepsilon(-\mathfrak{E}_x \sin(\alpha+\omega t) + \mathfrak{E}_y \cos(\alpha+\omega t)), \\ F_{z2} = -\varepsilon \mathfrak{E}_z. \end{cases}$$

Setzt man schließlich:

$$P + iQ = p \quad \text{und} \quad P - iQ = q,$$

dann kann statt dessen mit Rücksicht auf (9) auch geschrieben werden:

$$(10') \quad \begin{cases} F_{r1} = -\frac{\varepsilon}{2}\{q e^{i\alpha} e^{i(s+\omega)t} + p e^{-i\alpha} e^{i(s-\omega)t}\}, \\ F_{\varphi 1} = -i\frac{\varepsilon}{2}\{q e^{i\alpha} e^{i(s+\omega)t} - p e^{-i\alpha} e^{i(s-\omega)t}\}, \\ F_{z1} = -\varepsilon R e^{ist}, \\ F_{r2} = +\frac{\varepsilon}{2}\{q e^{i\alpha} e^{i(s+\omega)t} + p e^{-i\alpha} e^{i(s-\omega)t}\}, \\ F_{\varphi 2} = +i\frac{\varepsilon}{2}\{q e^{i\alpha} e^{i(s+\omega)t} - p e^{-i\alpha} e^{i(s-\omega)t}\}, \\ F_{z2} = -\varepsilon R e^{ist}. \end{cases}$$

Um nun die gesuchten Bewegungsgleichungen zu erhalten, haben wir nur noch nötig die in (7), (8) und (10′) enthaltenen Angaben zu verwerten und im übrigen nach (6) auch sonst überall $R_1 \ldots\ldots \mathsf{Z}_2$ anstelle von $r_1 \ldots\ldots \zeta_2$ einzuführen. So entstehen schließlich die 12 Gleichungen in folgender Form:

$$(11)\quad \begin{cases} \frac{1}{\omega}\frac{d}{dt}\frac{R_1}{a} = \frac{P_1}{\mu a \omega}, & \frac{1}{\omega}\frac{d}{dt}\frac{R_2}{a} = \frac{P_2}{\mu a \omega}, \\ \frac{1}{\omega}\frac{d}{dt}\Phi_1 = \frac{\Psi_1}{f} - 2\frac{R_1}{a}, & \frac{1}{\omega}\frac{d}{dt}\Phi_2 = \frac{\Psi_2}{f} - 2\frac{R_2}{a}, \\ \frac{1}{\omega}\frac{d}{dt}\frac{Z_1}{a} = \frac{\mathsf{Z}_1}{\mu a \omega}, & \frac{1}{\omega}\frac{d}{dt}\frac{Z_2}{a} = \frac{\mathsf{Z}_2}{\mu a \omega}, \end{cases}$$

$$(11')\quad \begin{cases} -\frac{1}{\omega}\frac{d}{dt}\frac{P_1}{\mu a \omega} = \frac{21\sqrt{3}-8}{4(3\sqrt{3}-1)}\frac{R_1}{a} + \frac{1}{3\sqrt{3}-1}\frac{R_2}{a} \\ \qquad -2\frac{\Psi_1}{f} + \frac{\varepsilon}{2\mu a \omega^2}\{q e^{i\alpha} e^{i(s+\omega)t} + p e^{-i\alpha} e^{i(s-\omega)t}\}, \\ -\frac{1}{\omega}\frac{d}{dt}\frac{P_2}{\mu a \omega} = \frac{21\sqrt{3}-8}{4(3\sqrt{3}-1)}\frac{R_2}{a} + \frac{1}{3\sqrt{3}-1}\frac{R_1}{a} \\ \qquad -2\frac{\Psi_2}{f} - \frac{\varepsilon}{2\mu a \omega^2}\{q e^{i\alpha} e^{i(s+\omega)t} + p e^{-i\alpha} e^{i(s-\omega)t}\}, \\ -\frac{1}{\omega}\frac{d}{dt}\frac{\Psi_1}{f} = \frac{1}{2(3\sqrt{3}-1)}(\Phi_1 - \Phi_2) \\ \qquad + \frac{i\varepsilon}{2\mu a \omega^2}\{q e^{i\alpha} e^{i(s+\omega)t} - p e^{-i\alpha} e^{i(s-\omega)t}\}, \\ -\frac{1}{\omega}\frac{d}{dt}\frac{\Psi_2}{f} = \frac{1}{2(3\sqrt{3}-1)}(\Phi_2 - \Phi_1) \\ \qquad - \frac{i\varepsilon}{2\mu a \omega^2}\{q e^{i\alpha} e^{i(s+\omega)t} - p e^{-i\alpha} e^{i(s-\omega)t}\}, \\ -\frac{1}{\omega}\frac{d}{dt}\frac{\mathsf{Z}_1}{\mu a \omega} = \frac{3\sqrt{3}-2}{4(3\sqrt{3}-1)}\frac{Z_1}{a} + \frac{1}{2(3\sqrt{3}-1)}\frac{Z_2}{a} \\ \qquad + \frac{\varepsilon}{\mu a \omega^2} R e^{ist}, \\ -\frac{1}{\omega}\frac{d}{dt}\frac{\mathsf{Z}_2}{\mu a \omega} = \frac{3\sqrt{3}-2}{4(3\sqrt{3}-1)}\frac{Z_2}{a} + \frac{1}{2(3\sqrt{3}-1)}\frac{Z_1}{a} \\ \qquad + \frac{\varepsilon}{\mu a \omega^2} R e^{ist}. \end{cases}$$

Die Gleichungen sind linear und so geschrieben, daß die Variabelen $\frac{R_1}{a}$, Φ_1, $\frac{Z_1}{a}$, $\frac{P_1}{\mu a \omega}$, $\frac{\Psi_1}{f}$, $\frac{\mathfrak{Z}_1}{\mu a \omega}$, ... alle dimensionslos sind. An (11) und (11') haben wir die folgenden Erörterungen anzuknüpfen.

§ 2. Das elektrische Moment eines Wasserstoff-Moleküls.

Zur beabsichtigten Berechnung der Dispersion brauchen wir vor allem das elektrische Moment, welches unser System unter Einwirkung der elektrischen Kraft der erregenden Welle annimmt. Nennen wir die drei Komponenten dieses Momentes $\mathfrak{M}_x$, $\mathfrak{M}_y$, $\mathfrak{M}_z$, dann ist, wie leicht ersichtlich:

$$(12)\qquad \begin{cases} \mathfrak{M}_x = -\varepsilon (r_1 \cos\varphi_1 + r_2 \cos\varphi_2) \\ \mathfrak{M}_y = -\varepsilon (r_1 \sin\varphi_1 + r_2 \sin\varphi_2) \\ \mathfrak{M}_z = -\varepsilon (z_1 + z_2). \end{cases}$$

Substituiert man nun für die Variabelen $r_1 \ldots\ldots z_2$ ihre Darstellungen (6) und entwickelt nach Potenzen der kleinen Größen $R_1 \ldots\ldots Z_2$, dann wird:

$$(12')\qquad \begin{cases} \mathfrak{M}_x = -\varepsilon a \left[\frac{R_1 - R_2}{a} \cos(\omega t + \alpha) - (\Phi_1 - \Phi_2) \sin(\omega t + \alpha) \right] \\ \mathfrak{M}_y = -\varepsilon a \left[\frac{R_1 - R_2}{a} \sin(\omega t + \alpha) + (\Phi_1 - \Phi_2) \cos(\omega t + \alpha) \right] \\ \mathfrak{M}_z = -\varepsilon a \frac{Z_1 + Z_2}{a}. \end{cases}$$

Die Größen $R_1 \ldots\ldots Z_2$ brauchen also nicht einzeln bestimmt zu werden; es genügen vielmehr die Differentialgleichungen für die 6 Differenzen resp. Summen:

$$\frac{R_1 - R_2}{a},\quad \Phi_1 - \Phi_2,\quad \frac{Z_1 + Z_2}{a},\quad \frac{P_1 - P_2}{\mu a \omega},\quad \frac{\Psi_1 - \Psi_2}{f},\quad \frac{\mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{Z}_2}{\mu a \omega}$$

zu behandeln. Dieselben lauten nach (11) resp. (11'):

$$(13)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{\omega}\dfrac{d}{dt}\dfrac{R_1-R_2}{a} = \dfrac{P_1-P_2}{\mu a \omega} \\ \dfrac{1}{\omega}\dfrac{d}{dt}(\Phi_1-\Phi_2) = \dfrac{\Psi_1-\Psi_2}{f} - 2\dfrac{R_1-R_2}{a} \\ -\dfrac{1}{\omega}\dfrac{d}{dt}\dfrac{P_1-P_2}{\mu a\omega} = \dfrac{21\sqrt{3}-12}{4(3\sqrt{3}-1)}\dfrac{R_1-R_2}{a} \\ \qquad -2\dfrac{\Psi_1-\Psi_2}{f} + \dfrac{\varepsilon}{\mu a \omega^2}[q e^{i\alpha} e^{i(s+\omega)t} + p e^{-i\alpha} e^{i(s-\omega)t}] \\ -\dfrac{1}{\omega}\dfrac{d}{dt}\dfrac{\Psi_1-\Psi_2}{f} = \dfrac{1}{3\sqrt{3}-1}(\Phi_1-\Phi_2) \\ \qquad + \dfrac{i\varepsilon}{\mu a \omega^2}[q e^{i\alpha} e^{i(s+\omega)t} - p e^{-i\alpha} e^{i(s-\omega)t}] \end{cases}$$

$$(13')\quad \begin{cases} \dfrac{1}{\omega}\dfrac{d}{dt}\dfrac{Z_1+Z_2}{a} = \dfrac{\mathfrak{Z}_1+\mathfrak{Z}_2}{\mu a\omega} \\ -\dfrac{1}{\omega}\dfrac{d}{dt}\dfrac{\mathfrak{Z}_1+\mathfrak{Z}_2}{\mu a\omega} = \dfrac{3\sqrt{3}}{4(3\sqrt{3}-1)}\dfrac{Z_1+Z_2}{a} + \dfrac{2\varepsilon}{\mu a\omega^2} R e^{ist}. \end{cases}$$

Im übrigen können, wie (13) und (13′) zeigen, die Bewegungen in der $r-\varphi$-Ebene und senkrecht dazu unabhängig voneinander behandelt werden.

Achtet man in (13) nur auf die Teile der äußeren Anregung, welche proportional $e^{i(s+\omega)t}$ sind, dann kann man z. B. den Ansatz:

$$(14)\quad \begin{cases} \dfrac{R_1-R_2}{a} = A e^{i(s+\omega)t}, \qquad \dfrac{P_1-P_2}{\mu a\omega} = C e^{i(s+\omega)t}, \\ \Phi_1-\Phi_2 = B e^{i(s+\omega)t}, \qquad \dfrac{\Psi_1-\Psi_2}{f} = D e^{i(s+\omega)t} \end{cases}$$

machen. Für die verfügbaren Konstanten A, B, C, D erhält man dann nach Einsetzen in (13) die Bestimmungsgleichungen:

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned} i\frac{s+\omega}{\omega}A &= C,\\ -i\frac{s+\omega}{\omega}C &= \frac{21\sqrt{3}-12}{4(3\sqrt{3}-1)}A - 2D + \frac{\varepsilon}{\mu a\omega^2}q e^{i\alpha},\\ i\frac{s+\omega}{\omega}B &= D - 2A,\\ -i\frac{s+\omega}{\omega}D &= \frac{1}{3\sqrt{3}-1}B + i\frac{\varepsilon}{\mu a\omega^2}q e^{i\alpha}. \end{aligned}\right.$$

Hieraus folgen für A und B allein die Gleichungen:

$$\left\{\left(\frac{s+\omega}{\omega}\right)^2 + \frac{27\sqrt{3}-4}{4(3\sqrt{3}-1)}\right\}A + 2i\frac{s+\omega}{\omega}B = \frac{\varepsilon}{\mu a\omega^2}q e^{i\alpha},$$

$$-2i\frac{s+\omega}{\omega}A + \left\{\left(\frac{s+\omega}{\omega}\right)^2 - \frac{1}{3\sqrt{3}-1}\right\}B = i\frac{\varepsilon}{\mu a\omega^2}q e^{i\alpha},$$

aus welchen A sich bestimmt zu:

$$(16)\quad A = \frac{\varepsilon}{\mu a\omega^2}q e^{i\alpha}\,\frac{\left(2+\frac{s}{\omega}\right)^2 - \frac{3\sqrt{3}}{3\sqrt{3}-1}}{\left(1+\frac{s}{\omega}\right)^4 - \frac{21\sqrt{3}-8}{4(3\sqrt{3}-1)}\left(1+\frac{s}{\omega}\right)^2 - \frac{27\sqrt{3}-4}{4(3\sqrt{3}-1)^2}},$$

während für B folgt:

$$(16')\quad B = i\frac{\varepsilon}{\mu a\omega^2}q e^{i\alpha}\,\frac{\left(2+\frac{s}{\omega}\right)^2 - \frac{15\sqrt{3}}{4(3\sqrt{3}-1)}}{\left(1+\frac{s}{\omega}\right)^4 - \frac{21\sqrt{3}-8}{4(3\sqrt{3}-1)}\left(1+\frac{s}{\omega}\right)^2 - \frac{27\sqrt{3}-4}{4(3\sqrt{3}-1)^2}}.$$

Achtet man nun zweitens auf die in (13) mit $e^{i(s-\omega)t}$ multiplizierten Glieder, dann kann ähnlich wie oben der Ansatz:

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{R_1 - R_2}{a} &= A' e^{i(s-\omega)t}, \qquad \frac{P_1 - P_2}{\mu a\omega} = C' e^{i(s-\omega)t},\\ \Phi_1 - \Phi_2 &= B' e^{i(s-\omega)t}, \qquad \frac{\Psi_1 - \Psi_2}{f} = D' e^{i(s-\omega)t} \end{aligned}\right.$$

gemacht werden, und man findet für A' und B' die Formeln:

(18)
$$A' = \frac{\varepsilon}{\mu a \omega^2} p e^{-ia} \frac{\left(2-\frac{s}{\omega}\right)^2 - \frac{3\sqrt{3}}{3\sqrt{3}-1}}{\left(1-\frac{s}{\omega}\right)^4 - \frac{21\sqrt{3}-8}{4(3\sqrt{3}-1)}\left(1-\frac{s}{\omega}\right)^2 - \frac{27\sqrt{3}-4}{4(3\sqrt{3}-1)^2}},$$

(18')
$$B' = -i \frac{\varepsilon}{\mu a \omega^2} p e^{-ia} \frac{\left(2-\frac{s}{\omega}\right)^2 + \frac{15\sqrt{3}}{4(3\sqrt{3}-1)}}{\left(1-\frac{s}{\omega}\right)^4 - \frac{21\sqrt{3}-8}{4(3\sqrt{3}-1)}\left(1-\frac{s}{\omega}\right)^2 - \frac{27\sqrt{3}-4}{4(3\sqrt{3}-1)^2}}.$$

Es gehen also A' und B' aus A und B hervor, indem anstelle von s und i: $-s$ und $-i$ gesetzt wird.

Damit sind die Störungen in der Kreisebene berechnet. Setzt man für die senkrechten Komponenten:

(19)
$$\frac{Z_1 + Z_2}{a} = G e^{ist}, \qquad \frac{\mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{Z}_2}{\mu a \omega} = H e^{ist},$$

dann folgt leicht aus (13'):

(20)
$$G = 2 \frac{\varepsilon}{\mu a \omega^2} R e^{ist} \frac{1}{\frac{s^2}{\omega^2} - \frac{3\sqrt{3}}{4(3\sqrt{3}-1)}}$$

Zur Berechnung des gesuchten, durch das äußere Feld hervorgerufenen elektrischen Moments erübrigt es nur noch, die in (14), (17) und (19) angegebenen Werte von $\frac{R_1 - R_2}{a}$, $\Phi_1 - \Phi_2$ und $\frac{Z_1 + Z_2}{a}$ mittels (16) und (16'), (18) und (18') resp. (20) in bekannte Größen auszudrücken und in (12') einzusetzen. So erhält man schließlich explicite:

$$\mathfrak{M}_x = -\frac{\varepsilon^2 e^{ist}}{\mu\omega^2}\Bigg[\cos(\omega t+\alpha)e^{i(\omega t+\alpha)}q\,\frac{\left(2+\frac{s}{\omega}\right)^2-\frac{3\sqrt{3}}{3\sqrt{3}-1}}{\left(1+\frac{s}{\omega}\right)^4-\frac{21\sqrt{3}-8}{4(3\sqrt{3}-1)}\left(1+\frac{s}{\omega}\right)^2-\frac{27\sqrt{3}-4}{4(3\sqrt{3}-1)^2}}$$

$$+\cos(\omega t+\alpha)e^{-i(\omega t+\alpha)}p\,\frac{\left(2-\frac{s}{\omega}\right)^2-\frac{3\sqrt{3}}{3\sqrt{3}-1}}{\left(1-\frac{s}{\omega}\right)^4-\frac{21\sqrt{3}-8}{4(3\sqrt{3}-1)}\left(1-\frac{s}{\omega}\right)^2-\frac{27\sqrt{3}-4}{4(3\sqrt{3}-1)^2}}$$

(21)
$$-i\sin(\omega t+\alpha)e^{i(\omega t+\alpha)}q\,\frac{\left(2+\frac{s}{\omega}\right)^2+\frac{15\sqrt{3}}{4(3\sqrt{3}-1)}}{\left(1+\frac{s}{\omega}\right)^4-\frac{21\sqrt{3}-8}{4(3\sqrt{3}-1)}\left(1+\frac{s}{\omega}\right)^2-\frac{27\sqrt{3}-4}{4(3\sqrt{3}-1)^2}}$$

$$+i\sin(\omega t+\alpha)e^{-i(\omega t+\alpha)}p\,\frac{\left(2-\frac{s}{\omega}\right)^2+\frac{15\sqrt{3}}{4(3\sqrt{3}-1)}}{\left(1-\frac{s}{\omega}\right)^4-\frac{21\sqrt{3}-8}{4(3\sqrt{3}-1)}\left(1-\frac{s}{\omega}\right)^2-\frac{27\sqrt{3}-4}{4(3\sqrt{3}-1)^2}}\Bigg]$$

$$\mathfrak{M}_y = -\frac{\varepsilon^2 e^{ist}}{\mu\omega^2}\Bigg[\sin(\omega t+\alpha)e^{i(\omega t+\alpha)}q\,\frac{\left(2+\frac{s}{\omega}\right)^2-\frac{3\sqrt{3}}{3\sqrt{3}-1}}{\left(1+\frac{s}{\omega}\right)^4-\frac{21\sqrt{3}-8}{4(3\sqrt{3}-1)}\left(1+\frac{s}{\omega}\right)^2-\frac{27\sqrt{3}-4}{4(3\sqrt{3}-1)^2}}$$

$$+\sin(\omega t+\alpha)e^{-i(\omega t+\alpha)}p\,\frac{\left(2-\frac{s}{\omega}\right)^2-\frac{3\sqrt{3}}{3\sqrt{3}-1}}{\left(1-\frac{s}{\omega}\right)^4-\frac{21\sqrt{3}-8}{4(3\sqrt{3}-1)}\left(1-\frac{s}{\omega}\right)^2-\frac{27\sqrt{3}-4}{4(3\sqrt{3}-1)^2}}$$

(21′)
$$+i\cos(\omega t+\alpha)e^{i(\omega t+\alpha)}q\,\frac{\left(2+\frac{s}{\omega}\right)^2+\frac{15\sqrt{3}}{4(3\sqrt{3}-1)}}{\left(1+\frac{s}{\omega}\right)^4-\frac{21\sqrt{3}-8}{4(9\sqrt{3}-1)}\left(1+\frac{s}{\omega}\right)^2-\frac{27\sqrt{3}-4}{4(3\sqrt{3}-1)^2}}$$

$$-i\cos(\omega t+\alpha)e^{-t(\omega t+\alpha)}p\,\frac{\left(2-\frac{s}{\omega}\right)^2+\frac{15\sqrt{3}}{4(3\sqrt{3}-1)}}{\left(1-\frac{s}{\omega}\right)^4-\frac{21\sqrt{3}-8}{4(3\sqrt{3}-1)}\left(1-\frac{s}{\omega}\right)^2-\frac{27\sqrt{3}-4}{4(3\sqrt{3}-1)^2}}\Bigg]$$

$$(21'') \qquad \mathfrak{M}_z = -2\frac{\varepsilon^2 e^{ist}}{\mu\omega^2} R \frac{1}{\frac{s^2}{\omega^2} - \frac{3\sqrt{3}}{4(3\sqrt{3}-1)}},$$

wobei nach § 1:

$$p = P + iQ \quad \text{und} \quad q = P - iQ$$

gesetzt ist, während nach (9) die Größen P, Q, R die Amplituden der rechtwinkligen elektrischen Kraftkomponenten der einfallenden Welle bedeuten.

§ 3. Der Brechungsexponent des H_2-Gases.

Bekanntlich besteht (auf Grund der Maxwellschen Gleichungen) ein einfacher Zusammenhang zwischen dem Brechungsexponenten n und dem Verhältnis des elektrischen Momentes eines cm³ der betreffenden Substanz zur anregenden elektrischen Kraft. Ist letztere gleich Ee^{ist} und hat man gefunden, daß das Moment eines cm³ in Richtung von E gerichtet ist und sich in der Form $\gamma E e^{ist}$ ausdrücken läßt, dann ist[1]):

$$(22) \qquad n^2 - 1 = 4\pi\gamma.$$

Wie die oben unter (21), (21') und (21'') angegebenen Werte für die Komponenten von $\mathfrak{M}$ zeigen, ist für das Einzelmolekül keineswegs Moment und erregende Feldstärke gleich gerichtet. Nun kommen aber auf 1 cm³ sehr viel Moleküle, die erstens alle möglichen Anfangsphasen α entsprechen, während zweitens auch ihre Orientierung gegenüber der erregenden Feldstärke ganz regellos ist.

Nehmen wir nun für ein beliebig orientiertes Molekül mit beliebiger Anfangsphase die Komponente seines Momentes in Richtung der erregenden Kraft und mitteln dieselbe über

[1]) Wir sehen von der Lorentzschen Zusatzkraft ab, da n nur sehr wenig (etwa 1.10^{-4}) von 1 verschieden ist. Wollte man das nicht tun, dann hätte man in (22) anstelle von $n^2 - 1$ den Ausdruck $3\frac{n^2-1}{n^2+2}$ zu substituieren.

alle möglichen Werte von α und alle möglichen Orientierungen, dann erhalten wir das, was wir das mittlere beobachtbare Moment m eines Moleküls nennen wollen. Ist die Anzahl der Moleküle im cm³ gleich N, dann wird:

$$\gamma = N\bar{m} \tag{23}$$

und damit:

$$\frac{n^2-1}{4\pi N} = m, \tag{24}$$

sodaß die Aufgabe auf diese Mittelung von m hinausläuft.

Führen wir zunächst die Mittelung nach α aus, dann erhalten wir aus (21) und (21'):

$$\mathfrak{M}_x = -\frac{\varepsilon^2}{\mu\omega^2}e^{ist}\left[(P+iQ)\frac{\left(2-\frac{s}{\omega}\right)^2+\frac{3\sqrt{3}}{8(3\sqrt{3}-1)}}{\left(1-\frac{s}{\omega}\right)^4-\frac{21\sqrt{3}-8}{4(3\sqrt{3}-1)}\left(1-\frac{s}{\omega}\right)^2-\frac{27\sqrt{3}-4}{4(3\sqrt{3}-1)^2}}\right. \tag{25}$$
$$\left.+(P-iQ)\frac{\left(2+\frac{s}{\omega}\right)^2+\frac{3\sqrt{3}}{8(3\sqrt{3}-1)}}{\left(1+\frac{s}{\omega}\right)^4-\frac{21\sqrt{3}-8}{4(3\sqrt{3}-1)}\left(1+\frac{s}{\omega}\right)^2-\frac{27\sqrt{3}-4}{4(3\sqrt{3}-1)^2}}\right]$$

$$\mathfrak{M}_y = -\frac{\varepsilon^2}{\mu\omega^2}e^{ist}\left[(-iP+Q)\frac{\left(2-\frac{s}{\omega}\right)^2+\frac{3\sqrt{3}}{8(3\sqrt{3}-1)}}{\left(1-\frac{s}{\omega}\right)^4-\frac{21\sqrt{3}-8}{4(3\sqrt{3}-1)}\left(1-\frac{s}{\omega}\right)^2-\frac{27\sqrt{3}-4}{4(3\sqrt{3}-1)^2}}\right. \tag{25'}$$
$$\left.+(iP+Q)\frac{\left(2+\frac{s}{\omega}\right)^2+\frac{3\sqrt{3}}{8(3\sqrt{3}-1)}}{\left(1+\frac{s}{\omega}\right)^4-\frac{21\sqrt{3}-8}{4(3\sqrt{3}-1)}\left(1+\frac{s}{\omega}\right)^2-\frac{27\sqrt{3}-4}{4(3\sqrt{3}-1)^2}}\right]$$

Jetzt soll die Mittelung über alle möglichen Orientierungen des Moleküls folgen. Statt dessen können wir natürlich auch die erregende Kraft nacheinander alle möglichen Richtungen

im Raume einnehmen lassen, während das Molekül, d. h. die mit demselben verbundenen, schon früher eingeführten x, y, z-Achsen unverändert liegen bleiben. Definiert man die Richtung der elektrischen Kraft E durch Angabe des Polabstandes ϑ und der geographischen Länge λ auf einer Einheitskugel um den Nullpunkt des x, y, z-Koordinatensystems, dann wird:

$$P = E\sin\vartheta\cos\lambda, \quad Q = E\sin\vartheta\sin\lambda, \quad R = E\cos\vartheta. \tag{26}$$

Andererseits wird die Komponente des elektrischen Moments in Richtung von E gleich:

$$\bar{\mathfrak{M}}_x\sin\vartheta\cos\lambda + \bar{\mathfrak{M}}_y\sin\vartheta\sin\lambda + \bar{\mathfrak{M}}_z\cos\vartheta; \tag{27}$$

die Mittelung ist also so auszuführen, daß in (25), (25′) und (21″) für P, Q, R die in (26) angegebenen Ausdrücke substituiert werden, daß dann der Ausdruck (27) gebildet wird und schließlich mit dem Flächenelement:

$$\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\lambda$$

der Einheitskugel multipliziert, nach λ zwischen 0 und 2π, nach ϑ zwischen o und π integriert und endlich durch die Oberfläche der Einheitskugel 4π dividiert wird.

So erhält man nach einfacher Rechnung das gesuchte mittlere beobachtbare Moment eines Moleküls zu:

$$\bar{m} = -\frac{2}{3}\frac{\varepsilon^2}{\mu\omega^2}Ee^{ist}\left[\frac{\left(2-\frac{s}{\omega}\right)^2+\frac{3\sqrt{3}}{8(3\sqrt{3}-1)}}{\left(1-\frac{s}{\omega}\right)^4-\frac{21\sqrt{3}-8}{4(3\sqrt{3}-1)}\left(1-\frac{s}{\omega}\right)^2-\frac{27\sqrt{3}-4}{4(3\sqrt{3}-1)^2}}\right. \tag{28}$$

$$\left.+\frac{\left(2+\frac{s}{\omega}\right)^2+\frac{3\sqrt{3}}{8(3\sqrt{3}-1)}}{\left(1+\frac{s}{\omega}\right)^4-\frac{21\sqrt{3}-8}{4(3\sqrt{3}-1)}\left(1+\frac{s}{\omega}\right)^2-\frac{27\sqrt{3}-4}{4(3\sqrt{3}-1)^2}}+\frac{1}{\frac{s^2}{\omega^2}-\frac{3\sqrt{3}}{4(3\sqrt{3}-1)}}\right]$$

und damit ist nach (22) und (23) auch die Dispersionsformel fertig. Sie lautet:

$$(29)\quad \frac{n^2-1}{4\pi N} = -\frac{2}{3}\frac{\varepsilon^2}{\mu\omega^2}\left[\frac{\left(2-\frac{s}{\omega}\right)^2+\frac{3\sqrt{3}}{8(3\sqrt{3}-1)}}{\left(1-\frac{s}{\omega}\right)^4-\frac{21\sqrt{3}-8}{4(3\sqrt{3}-1)}\left(1-\frac{s}{\omega}\right)^2-\frac{27\sqrt{3}-4}{4(3\sqrt{3}-1)^2}}\right.$$
$$\left.+\frac{\left(2+\frac{s}{\omega}\right)^2+\frac{3\sqrt{3}}{8(3\sqrt{3}-1)}}{\left(1+\frac{s}{\omega}\right)^4-\frac{21\sqrt{3}-8}{4(3\sqrt{3}-1)}\left(1+\frac{s}{\omega}\right)^2-\frac{27\sqrt{3}-4}{4(3\sqrt{3}-1)^2}}+\frac{1}{\frac{s^2}{\omega^2}-\frac{3\sqrt{3}}{4(3\sqrt{3}-1)}}\right]$$

und gibt n als Funktion der Frequenz s. Sie enthält nur zwei verfügbare Konstanten, nämlich

a) die multiplikative Konstante:

$$\frac{8\pi}{3}\frac{N\varepsilon^2}{\mu\omega^2}$$

b) die vorläufig noch nicht näher festgesetzte Winkelgeschwindigkeit:

$$\omega.$$

§ 4. Diskussion der Dispersionsformel. Vergleich mit der Erfahrung.

Um die Formel (29) besser zu übersehen, kann man versuchen, dieselbe in die Form der in der gewöhnlichen Theorie vorkommenden Ausdrücke zu bringen. Dazu hat man eine Partialbruchzerlegung vorzunehmen, deren Einzelnheiten ich übergehe und deren Resultat folgendermaßen aussieht:

$$(30)\quad \frac{n^2-1}{4\pi N} = \frac{\varepsilon^2}{\mu\omega^2}\left[\frac{2{,}97429}{1-\left(\frac{s}{0{,}412375\,\omega}\right)^2}+\frac{2{,}15347}{1-\left(\frac{s}{0{,}556397\,\omega}\right)^2}\right.$$
$$+\frac{0{,}0276447}{1-\left(\frac{s}{2{,}412375\,\omega}\right)^2}+\frac{0{,}246581+0{,}579918\left(1-\frac{s}{\omega}\right)}{0{,}304388+\left(1-\frac{s}{\omega}\right)^2}$$
$$\left.+\frac{0{,}246581+0{,}579918\left(1+\frac{s}{\omega}\right)}{0{,}304388+\left(1+\frac{s}{\omega}\right)^2}\right].$$

Die in der Klammer angegebenen Zahlen lassen sich alle mittels Wurzelzeichen und ganzen Zahlen darstellen; es schien uns aber übersichtlicher und für den direkten Gebrauch bequemer, die Wurzelformen auszuwerten, wie es oben geschehen ist. Die ersten drei Glieder entsprechen wenigstens durch den Bau ihres Nenners den bekannten Teilbrüchen der üblichen Dispersionsformeln. Sie geben drei Eigenschwingungen des H_2-Moleküls an; bei

$$s = 0{,}412375\,\omega; \quad s = 0.556397\,\omega; \quad s = 2{,}412375\,\omega.$$

Die ersten zwei liegen verhältnismäßig nahe zusammen; die dritte liegt viel weiter entfernt. Die Zähler der betrachteten Glieder lassen sich allerdings nur dann in die übliche Theorie hineinzwingen, wenn man, wie leicht ersichtlich, gebrochene Zahlen für die „Anzahl der Dispersionselektronen" zuläßt.

Die zwei letzten Glieder des Ausdrucks (30) schließlich haben einen ganz anderen Bau, als man nach der üblichen Theorie erwarten kann. Daß dieselben im leicht erreichbaren optischen Gebiet einen recht merklichen Einfluß ausüben, wird sich unten ergeben. Bemerkenswert ist in dieser Hinsicht, daß John Koch,[1]) dessen Beobachtungen an H_2 weit in das Ultraviolet hineinreichen, schon aus rein praktischen Gründen auf ein einigermaßen ähnlich gebautes (nirgends unendlich werdendes) Zusatzglied zur üblichen Dispersionsformel geführt wurde.

An dieser Stelle wollen wir es unterlassen, die Formel (30) in ihrem vollen Umfange mit den Beobachtungen über die Dispersion des Wasserstoffs zu vergleichen. Bekanntlich genügt nämlich in einem ausgedehnten Gebiet des Spektrums eine beim ersten Gliede abgebrochene Potenzentwicklung in $\frac{s}{\omega}$ schon verhältnismäßig hohen Ansprüchen.

Wir wollen deshalb noch die beiden Zahlenfaktoren dieser Entwicklung angeben, wie dieselben auf Grund von (30) er-

[1]) Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik, Bd. 8, Nr. 20, 1912.

halten werden können, und dann diese Entwicklung mit der entsprechenden erfahrungsmäßigen Formel vergleichen.

Ersetzt man in (30) noch $n^2 - 1$ durch $2(n-1)$, dann findet man nach leichter Rechnung für die erwähnte Entwicklung folgende Form:

$$\begin{aligned} n - 1 = 2\pi N \frac{\varepsilon^2}{\mu \omega^2} \Big[& \quad 2{,}97429 + 17{,}49041 \frac{s^2}{\omega^2} \\ & + 2{,}15347 + \quad 6{,}95938 \frac{s^2}{\omega^2} \\ & + 0{,}02764 + \quad 0{,}00475 \frac{s^2}{\omega^2} \\ & + 0{,}63363 + \quad 0{,}32219 \frac{s^2}{\omega^2} + 0{,}52695 \frac{s}{\omega} \\ & + 0{,}63363 + \quad 0{,}32219 \frac{s^2}{\omega^2} - 0{,}52695 \frac{s}{\omega} \Big] \end{aligned}$$

oder zusammengefaßt:

$$(31) \qquad n - 1 = 2\pi N \frac{\varepsilon^2}{\mu \omega^2} \left[6{,}42266 + 25{,}0989 \frac{s^2}{\omega^2} \right].$$

Die vorletzte Formel soll nur zur Darstellung bringen, in welchem Maße die einzelnen Glieder von (30) zum Gesamtresultat beitragen, nur Gleichung (31) wird im folgenden benutzt.

Von John Koch wird das Resultat seiner Messungen an Wasserstoff u. a. dargestellt durch die Formel:

$$\frac{2n^2 + 2}{3n^2 - 1} = 7348{,}11 - 55{,}7465.10^{-8} \lambda^{-2} - 0{,}069955.10^{-16} \lambda^{-4},$$

wobei die Wellenlänge λ in cm gemessen ist.

Auf $n - 1$ umgerechnet ergibt das unter Einführung der Frequenz s anstelle von λ für die ersten beiden Glieder der Entwicklung folgendes:

$$(32) \qquad n - 1 = 1{,}36092.10^{-4} + 2{,}90777.10^{-37} s^2.$$

Soll nun unsre theoretische Formel (31) dem praktischen Resultat (32) entsprechen, dann muß

a) $$\frac{2\pi N\varepsilon^2}{\mu\omega^2}\,6{,}42266 = 1{,}36092.10^{-4},$$

b) $$\frac{2\pi N\varepsilon^2}{\mu\omega^2}\,\frac{25{,}0989}{\omega^2} = 2{,}90777.10^{-37}$$

sein.

Durch Division dieser beiden Formeln folgt erstens

$$\frac{6{,}42266}{25{,}0989}\,\omega^2 = \frac{1{,}36092.10^{-4}}{2{,}90777.10^{-37}},$$

d. h.

$$\omega = 4{,}214.10^{16}\,\frac{1}{\text{sec}};$$

Andererseits berechnet sich $\frac{N\varepsilon^2}{\mu}$ zu:

$$\frac{N\varepsilon^2}{\mu} = 5{,}987.10^{27}\,\frac{1}{\text{sec}^2}.$$

Es erhebt sich nun die Frage, ob die beiden für $\frac{N\varepsilon^2}{\mu}$ und ω auf Grund unsrer Theorie berechneten Werte mit den sonst bekannten Werten übereinstimmen, resp. inwiefern die Winkelgeschwindigkeit ω, wie in der Einleitung behauptet, mit dem Planckschen Wirkungsquantum h zusammenhängt.

Zunächst die Zahl für $\frac{N\varepsilon^2}{\mu}$. Das Produkt $N\varepsilon$ läßt sich ohne weiteres aus der elektrolytischen Ladung $E = 96472$ Coulomb eines Grammatoms, dem Atomgewicht $A = 1{,}008$ des Wasserstoffs und der Dichte $\delta = 8{,}985.10^{-5}$ dieses Gases berechnen nach der Formel:

$$N\varepsilon = \frac{E}{2A\delta} = 1{,}289.10^{10}$$

in elektrostatischen Einheiten. Mit Rücksicht hierauf bedeutet die aus der beobachteten Dispersion auf Grund unsrer Theorie für $\frac{N\varepsilon^2}{\mu}$ gefundene Zahl, daß danach:

$$\frac{\varepsilon}{\mu} = 4{,}64.10^{17}$$

sein sollte.

Zur Beurteilung der experimentellen Sicherheit, welche den Zahlen zu grunde liegt, sei bemerkt, daß nach Beobachtungen von C. und M. Cuthberson[1]):

$$n - 1 = 1{,}362.10^{-4} + 2{,}780.10^{-37} s^2$$

ist. Auf Grund dieser Angaben würde man ähnlich wie oben:

$$\omega = 4{,}38.10^{16}, \qquad \frac{N\varepsilon^2}{\mu} = 6{,}48.10^{27}$$

finden; aus der letzten Zahl ergibt sich:

$$\frac{\varepsilon}{\mu} = 5{,}01.10^{17}$$

Dieses erste Resultat $\frac{\varepsilon}{\mu} = 4{,}64.10^{17}$ resp. $5{,}01.10^{17}$ ist befriedigend und spricht durchaus zugunsten des Modells. Es scheint mir indessen wahrscheinlich, daß eine etwas weiter ausgearbeitete Theorie, welche auf die durch die einfallende Welle verursachte Bewegung der Kerne, sowie auf die Rotation der Wasserstoffmoleküle infolge ihrer Wärmebewegung Rücksicht nimmt (vgl. darüber noch den letzten §), zu noch besseren Resultaten führen wird. Es erübrigt noch, den Zahlenwert von ω einer Diskussion zu unterwerfen.

Im Sinne der Quantentheorie wollen wir versuchen, ω dadurch zu bestimmen, daß wir das Impulsmoment eines Elektrons gleich einem Vielfachen z von h setzen. Dann haben wir erstens:

$$\mu a^2 \omega = z h. \tag{33}$$

Andererseits fanden wir schon früher als Gleichgewichtsbedingung des Modells (Gleichung (2')):

[1]) Proc. Royal Soc. 83, S. 151, 1910.

(34) $$\mu a \omega^2 = \frac{3\sqrt{3}-1}{4} \frac{\varepsilon^2}{a^2}.$$

Durch Elimination von a folgt aus diesen beiden Gleichungen:

$$\omega = \left(\frac{3\sqrt{3}-1}{4}\right)^2 \frac{\varepsilon^4 \mu}{z^3 h^3}.$$

Nimmt man nun für ω den aus den Kochschen Beobachtungen gefolgerten Wert, setzt $\varepsilon = 4{,}69.10^{-10}$, $\frac{\varepsilon}{\mu} = 5{,}28.10^{17}$ und $h = 6{,}55.10^{-27}$, dann folgt:

$$z^3 = \frac{1}{252},$$

d. h.

$$z = \frac{1}{6{,}32}.$$

Will man im Einklang bleiben mit den in der Einleitung genannten theoretischen Ansichten über die Einführung der Quanten bei der Rotationsbewegung, dann hat man zu setzen:

$$z = \frac{1}{2\pi}.$$

Tatsächlich verlangen, wie man sieht, die Beobachtungen über die Dispersion genau dasselbe. Wir werden also mit vollem Vertrauen als Schlußstein zu unsrem Modell die Quantenforderung hinzufügen können:

$$\text{Impulsmoment} = \frac{h}{2\pi}.$$

Das Wasserstoffmolekül besteht also aus zwei Kernen von der Masse $1{,}64.10^{-24}$ g je mit einer positiven Einheitsladung im Abstande $2d = 0{,}604.10^{-8}$ cm, während noch dazu in einer Ebene senkrecht zur Verbindungslinie der Kerne um den Durchstoßungspunkt jener Linie mit der Ebene zwei Elektronen

rotieren auf einem Kreis mit dem Durchmesser[1]) $2a = 1{,}05.10^{-8}$ cm. Das Impulsmoment jedes dieser Elektronen hat den Wert $\frac{h}{2\pi} = 1{,}06.10^{-27}$ g cm^2 sec^{-1}, entsprechend einer Winkelgeschwindigkeit $\omega = 4{,}21.10^{16}$ sec^{-1}.

§ 5. Schlussbemerkungen.

Der Erfolg des in den vorangehenden §§ mit Rücksicht auf die Dispersion durchdiskutierten Modells ist wohl unbestreitbar. Es muß deshalb als nächste Aufgabe angesehen werden, die Rechnungen für möglichst viele Erscheinungsgebiete durchzuführen, zunächst möglichst in Anlehnung an die gewöhnliche Mechanik. Freilich darf man hoffen, dabei gelegentlich in Widersprüche mit dem Experiment verwickelt zu werden und eben dadurch die eine oder andere wertvolle Beleuchtung der Natur des Wirkungsquantums zu gewinnen.

Als erstes drängt sich uns die Tatsache auf, daß das Trägheitsmoment des H_2-Moleküls um eine Achse in der Elektronenebene nach den Angaben am Ende des vorigen § einen Wert ($1{,}19.10^{-40}$ g cm^2) hat, welcher der Größenordnung nach der Quantenauffassung der Euckenschen Messungen über die spezifische Wärme des Wasserstoffs entspricht.

Allerdings kann das Trägheitsmoment nicht konstant sein, es muß sich bei Erhöhung der Temperatur auf Grund des Modells vergrößern. Man berechnet indessen leicht, daß diese Änderungen nur verhältnismäßig gering sind. Rotiert nämlich bei $T = 300$ z. B. das H_2-Molekül um eine Achse senkrecht zur Verbindungslinie der Kerne mit einer Rotations-

[1]) Der Kreisradius a wurde nach der aus (33) und (34) mit $z = \frac{1}{2\pi}$ folgenden Formel:

$$a = \frac{\pi}{2}(3\sqrt{3} - 1)\frac{\varepsilon^2}{h\omega}$$

berechnet, während $d = \frac{a}{\sqrt{3}}$ gesetzt ist.

geschwindigkeit, welche dem Äquipartitionsgesetz entspricht, dann ist die auf einen der Kerne infolgedessen wirkende Zentrifugalkraft gleich $1{,}34.10^{-5}$ dynen. Dagegen ist die zum Mittelpunkt hin gerichtete elektrostatische Anziehung, welche dann auftritt, wenn der Kernabstand d um $\triangle d$ vergrößert wird, während der Elektronenradius konstant gehalten wird, gleich:

$$\frac{27}{16}\sqrt{3}\,\frac{\varepsilon^2}{a^2}\,\frac{\triangle d}{a} = 0{,}024\,.\,\frac{\triangle d}{a}.$$

Infolge der durch die Wärmebewegung verursachten Rotation ist deshalb nur eine Streckung in Richtung der Kernachse von dem Betrage $\frac{\triangle d}{a} = 5{,}6.10^{-4}$ zu erwarten. Das Modell liefert also zugleich eine Begründung dafür, daß man in einem großen Temperaturgebiet mit einem sehr nahezu konstanten Trägheitsmoment rechnen darf.

Andererseits erscheint es allerdings möglich, die durch die Temperaturrotation verursachte Streckung, durch genaue Beobachtungen über den Temperaturkoeffizienten des Brechungsexponenten experimentell festzustellen. Man müßte dazu feststellen, daß auch bei konstanter Dichte n nicht vollständig von der Temperatur unabhängig ist. Beobachtungen in dieser Richtung sind mir nicht bekannt.

Eine andere Anwendung wäre die Berechnung der Permeabilität des H_2-Gases für ein magnetisches Feld, die besonders auch mit Rücksicht auf den Zeeman-Effekt von Interesse ist.

Dann ist auch die Theorie der Zustandsgleichung und daran anschließend die Berechnung der mit der Größe der freien Weglänge in direktem Zusammenhang stehenden Erscheinungen der Wärmeleitfähigkeit und der inneren Reibung in Betracht zu ziehen. Man wird eben mit Recht verlangen können, daß das Modell auch die sonst ganz unbekannten Kräfte zwischen den Einzelmolekülen richtig darzustellen vermag. Man kann das Resultat der entsprechenden Rechnung z. B. folgendermaßen ausdrücken: „Es ist möglich, die innere

Reibung des Wasserstoffs im voraus zu berechnen ausschließlich aus den vier universellen Konstanten ε, μ, h und k."

Schließlich wird man versuchen müssen, auch wenigstens für die nächstfolgenden Elemente des periodischen Systems ähnlich detaillierte Vorstellungen über den Atomaufbau zu gewinnen. Das nächstliegende Modell, das man z. B. für Helium konstruieren würde: ein doppelt positiv geladener Kern, um den in einer Ebene zwei Elektronen kreisen, entspricht, wie ich mich überzeugte, nicht den zu stellenden Anforderungen. Man findet z. B. für den Brechungsexponenten eine Formel, deren Entwicklung nach Potenzen von $\frac{s}{\omega}$ die Form hat:

$$\frac{n^2-1}{4\pi N} = \frac{77}{4}\frac{\varepsilon^2}{\mu\omega^2}\left[1+\frac{6069}{88}\frac{s^2}{\omega^2}\right].$$

Man überzeugt sich leicht, daß dieselbe nicht mit den Experimenten über die Dispersion des Heliums in Einklang zu bringen ist. Das Modell für Helium bleibt also noch aufzufinden. Daß man aber auch hier wie überall inneratomistische „Planetensysteme" wird zugrunde legen müssen, scheint mir wenigstens äußerst wahrscheinlich.

Göttingen-München, 6. Januar 1915.

Über eine charakteristische Eigenschaft sogenannter Treppenpolygone und deren Anwendung auf einen Fundamentalsatz der Funktionentheorie.

Von **Alfred Pringsheim.**

Vorgetragen in der Sitzung am 9. Januar 1915.

Ein von Weierstraß herrührender, für die Theorie der analytischen Funktionen grundlegender Satz besagt folgendes: Wenn ein Funktions-Element sich auf jedem innerhalb eines einfach zusammenhängenden Bereiches B verlaufenden Wege analytisch fortsetzen läßt, so sind jene Fortsetzungen vom Wege unabhängig, und es definiert jenes Funktions-Element mit seinen Fortsetzungen eine im Innern von B eindeutige analytische Funktion regulären Verhaltens.

Der Beweis dieses Satzes bietet keine besondere Schwierigkeit, falls man sich dabei auf Bereiche einfacher Art beschränkt, etwa solche, die von konvexen Polygonen oder einfach geschlossenen konvexen Kurven begrenzt sind, wird indessen selbst bei dieser Beschränkung in den mir bekannten Lehrbüchern in nicht völlig befriedigender Weise dargestellt. Recht verwickelt und wenig durchsichtig gestaltet sich aber der fragliche Beweis für den Fall, daß man einfach zusammenhängende Bereiche allgemeinster Art dabei ins Auge faßt, selbst wenn man in Bezug auf die besondere Struktur der Begrenzung noch gewisse (für die Tragweite des Beweises tatsächlich ziemlich unwesentliche) Beschränkungen einführt, etwa daß dieselbe nicht aus beliebigen stetigen, sondern aus abteilungsweise mono-

tonen oder sogenannten regulären Kurvenstücken bestehen solle, und wenn man auch bezüglich der Wege, welche für die analytische Fortsetzung benützt werden sollen, die analogen Einschränkungen macht[1]). Bei der grundlegenden Wichtigkeit des fraglichen Satzes hielt ich es nach alledem für wünschenswert, für denselben einen wirklich elementaren, auch dem Anfänger in allen Einzelheiten verständlichen und überzeugend erscheinenden Beweis zu suchen, der von vornherein auf einer anderen Methode beruht, als die bisher gegebenen Beweise. Während diese nämlich stets direkt darauf ausgehen, die verschiedenen Wege-Möglichkeiten durch sukzessive Reduktionen als äquivalent zu erweisen, glaubte ich das fragliche Ziel weit einfacher und durchsichtiger auf andere Weise zu erreichen, indem ich zeige, daß nach Einführung einer passenden Gebietseinteilung der gesamte Bereich systematisch mit einem Netz ineinander greifender Potenzreihen überzogen werden kann, welche eine eindeutige analytische Funktion erzeugen und somit ohne weiteres deren analytische Fortsetzung innerhalb jenes Bereiches von dem dabei benützten Wege vollständig unabhängig erscheinen lassen. Dabei beschränke ich mich auf diejenige Begrenzungsform, für die ich bei früherer Gelegenheit[2]) die Bezeichnung „Treppenpolygon“ eingeführt habe: in der Tat erweist sich diese Annahme für ziemlich weitgehende funktionentheoretische Ansprüche als völlig ausreichend, da sich Begrenzungen sehr allgemeiner Natur durch Treppenpolygone beliebig approximieren lassen[3]). Die oben erwähnte Gebietseinteilung läuft alsdann auf eine Zerlegung in Rechtecke hinaus, deren charakteristische Eigenschaft darin besteht, daß bei einer besonderen Anordnung bzw. Numerierung, wobei zu-

[1]) S. z. B. Stolz-Gmeiner, Einleitung in die Funktionentheorie, I (1904), p. 116; II (1905), p. 320. Vgl. auch W. F. Osgood: On a gap in the ordinary presentation of Weierstraß's theory of functions. Bull. of the American Math. Soc. (2), X (1904), p. 294.

[2]) Dieser Berichte Bd. 25 (1895), p. 56.

[3]) S. z. B. Burkhardt, Einführung in die Theorie der analytischen Funktionen. Dritte Aufl. (1908), p. 90, 102.

nächst ein bestimmtes Rechteck als erstes fixiert wird, jedes folgende mit einem vorangehenden nur längs einer Seite zusammenhängt. Der Nachweis einer solchen Zerlegbarkeit ist das Hauptziel der folgenden Untersuchung. Wenn dieser Nachweis trotz seiner prinzipiellen Einfachheit in der vorliegenden Darstellung etwas lang und umständlich erscheinen mag, so rührt das lediglich davon her, daß ich es für zweckmäßig hielt, den ganzen Gegenstand von Grund aus im Zusammenhange zu entwickeln und dabei so gut wie gar nichts vorauszusetzen. Diese Entwickelungen bilden den Inhalt der beiden ersten Paragraphen, während der dritte die Anwendung des gewonnenen Ergebnisses auf den Beweis des erwähnten Weierstraßschen Satzes enthält.

§ 1.

Treppenwege.

1. Unter einem (sc. endlichen) Treppenwege verstehen wir eine gebrochene Linie, die aus einer endlichen Anzahl paarweise rechtwinklig aneinander stoßender, jedoch keinen weiteren Punkt gemein habender Strecken besteht. Diese letzteren, die man ohne Beschränkung der Allgemeinheit als abwechselnd horizontal und vertikal annehmen kann, sollen als Seiten, die Punkte, in denen zwei Seiten zusammenstoßen, als Ecken des Treppenweges bezeichnet werden.

Bezieht man die Punkte des Treppenweges auf ein rechtwinkliges, zu den Seiten parallel gestelltes Koordinatensystem und bedient sich der Schreibweise $(x_\nu \ldots x \ldots x_{\nu+1})$ bzw. $(y_\nu \ldots y \ldots y_{\nu+1})$, um auszudrücken, daß x bzw. y beständig wachsend oder abnehmend das Intervall $(x_\nu, x_{\nu+1})$ bzw. $(y_\nu, y_{\nu+1})$ durchläuft, so läßt sich, falls man etwa den Treppenweg mit einer Horizontalen beginnen und mit einer Vertikalen endigen läßt, die Gesamtheit seiner Punkte in folgender Weise anschreiben:

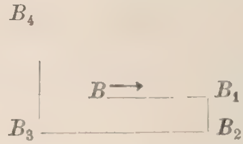
$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{ll} x_0 \ldots x \ldots x_1 & y = y_0 \\ x = x_1 & y_0 \ldots y \ldots y_1 \\ x_1 \ldots x \ldots x_2 & y = y_1 \\ x = x_2 & y_1 \ldots y \ldots y_2 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_{n-1} \ldots x \ldots x_n & y = y_{n-1} \\ x = x_n & y_{n-1} \ldots y \ldots y_n \end{array}\right.$$

Bedeutet (x', y') irgend einen Punkt des Treppenweges, so kann für die übrigen Punkte zwar x noch beliebig oft den Wert x', ebenso y den Wert y' annehmen, dagegen kann das Wertepaar (x', y') kein zweites Mal vorkommen.

2. Die Ecken, welche bei Treppenwegen auftreten, lassen sich zunächst nach dem folgenden rein geometrischen Gesichtspunkte in zwei verschiedene Gruppen teilen. Durchläuft man den Treppenweg von einem beliebig gewählten der beiden äußersten Punkte anfangend, also in einem nach getroffener Wahl nunmehr eindeutig bestimmten Fortschreitungssinne, so sollen die einzelnen Ecken als solche erster oder zweiter Art bezeichnet werden, je nachdem man bei ihrer Umlaufung den Winkel von 90^0 (s. Fig. I) oder denjenigen von 270^0 (s. Fig. II) zur Linken hat. Diese Bezeichnungen sind offenbar lediglich relative, jede derselben geht in die andere über, wenn man die Durchlaufung des Treppenweges in entgegengesetztem Sinne ausführt.

I

II



Um die obige zunächst rein geometrisch definierte Einteilung auch arithmetisch zu charakterisieren, bemerke man folgendes. Eine Ecke entsteht beim Übergange von der horizontalen, also x-Richtung in die vertikale, also y-Richtung oder umgekehrt: hiernach wollen wir die Ecken im ersten Falle als xy-Übergänge, im zweiten als yx-Übergänge bezeichnen.

Andererseits können sich in der Nachbarschaft eines solchen Überganges x und y in gleichem oder in entgegengesetztem Sinne ändern, und es sollen, je nachdem das eine oder das andere der Fall ist, die betreffenden Übergänge als gleichstimmige oder als ungleichstimmige bezeichnet werden. Alsdann erkennt man unmittelbar, daß die oben gegebenen Begriffsbestimmungen auch durch die folgenden ersetzt werden können:

Ecken erster Art { Gleichstimmige xy-Übergänge (Fig. I: A_1, A_3) / Ungleichstimmige yx-Übergänge (Fig. I: A_2, A_4)

Ecken zweiter Art { Ungleichstimmige xy-Übergänge (Fig. II: B_1, B_3) / Gleichstimmige yx-Übergänge (Fig. II: B_2, B_4).

Ecken derselben Art sollen als gleichartig bezeichnet werden.

3. Ändern sich bei Durchlaufung des Treppenweges x und y durchweg monoton (und zwar gleichgültig, ob in demselben oder in entgegengesetztem Sinne), so soll der Treppenweg monoton heißen: er hat dann entweder lauter gleichstimmige oder lauter ungleichstimmige Ecken, also in beständiger Abwechselung solche erster und zweiter Art, er verläuft „treppenförmig“ im gewöhnlichen Sinne.

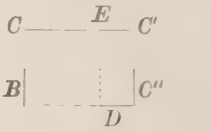
Ist nun der Treppenweg nicht monoton, so muß wenigstens eine der beiden Veränderlichen x und y ein Maximum oder Minimum aufweisen, so daß also mindestens einmal eine unmittelbare Aufeinanderfolge einer gleichstimmigen xy- und einer ungleichstimmigen yx-Ecke (bzw. yx- und xy-Ecke), d. h. zweier gleichartigen Ecken eintritt. Eine solche Folge zweier gleichartigen Ecken soll schlechthin als Eckenfolge, ihre Verbindungslinie als Rückkehrseite bezeichnet werden.

Es sei C, C' eine solche Eckenfolge, und es werde zunächst vorausgesetzt, daß die zu einer dieser beiden Ecken, etwa die zu C' benachbarte Ecke näher an C' liegt, als an C die zu C benachbarte Ecke (an deren Stelle eventuell

auch einer der Endpunkte des Treppenweges treten darf). Die zu C' benachbarte Ecke ist entweder von anderer oder von der gleichen Art, wie C, und zwar soll im letzteren Falle angenommen werden, daß dann die nächstfolgende Ecke der anderen Art angehört. In jedem dieser beiden Fälle wird eine von der Ecke anderer Art D zur Rückkehrseite CC' gezogene Parallele die bei C anstoßende Seite in einem Punkte B treffen (s. Fig. III und IV). Alsdann soll der Linienzug $BCC'D$

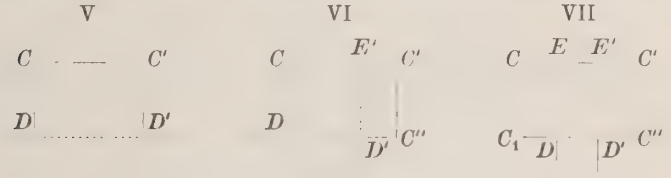
III

IV



bzw. $BCC'C''D$ ein einfaches Endstück und, falls keine andere Seite des Treppenweges in das Innere des Rechtecks $BCC'D$ bzw. $BCC'C''$ eintritt oder mit der Geraden BD ein Stück gemein hat, ein freies (einfaches) Endstück des Treppenweges heißen. Man kann dann bei Durchlaufung des Treppenweges ohne jede sonstige Abänderung desselben das Wegstück $BCC'D$ bzw. $BCC'C''D$ ausschalten und durch den kürzeren Weg BD ersetzen, eine Operation, für die wir die Bezeichnung einführen wollen: man könne das freie Endstück $BCC'D$ bzw. $BCC'C''D$ mit Hülfe des Querschnittes BD von dem Treppenwege abschneiden. Bei dieser Operation kommen im Falle der Figur III die Ecken C, C' und die damit ungleichartige Ecke D in Wegfall, während eine mit den beiden erstgenannten gleichartige Ecke bei B neu hinzutritt: der Treppenweg verliert also im ganzen ein Paar ungleichartiger Ecken. Im Falle der Figur IV verschwinden die drei gleichartigen Ecken C, C', C'' und die damit ungleichartige D, während andererseits zwei mit jenen ersteren gleichartige Ecken bei B und D neu hinzukommen: auch hier geht also genau ein Paar ungleichartiger Ecken verloren.

Wir betrachten jetzt zweitens den Fall, daß C und C' von ihren benachbarten Ecken gleich weit entfernt sind. Dabei unterscheiden wir, ob diese benachbarten Ecken mit C und C' beide ungleichartig (s. Fig. V) oder beide gleichartig (Fig. VII) sind, oder ob die eine mit C, C' ungleichartig, die andere gleichartig ist (Fig. VI); zugleich sollen in den beiden letzten Fällen die nächstbenachbarten bzw. die nächstbenachbarte mit C, C' ungleichartig sein. Wir bezeichnen alsdann die Linienzüge $\overline{DCC'D'}$, $DCC'C''D'$, $DC_1CC'C''D'$ gleichfalls als Endstücke und, falls eine besondere Unterscheidung gegenüber den zuvor betrachteten erforderlich sein sollte, als Doppel-Endstücke (aus einem sogleich verständlich werdenden Grunde). Offenbar läßt sich jedes dieser drei Endstücke, wenn es in dem zuvor angegebenen Sinne ein freies



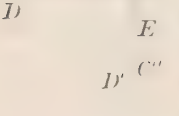
ist, durch den Querschnitt $\overline{DD'}$ abschneiden. Dabei gehen im Falle der Figur V die beiden Ecken C, C' und die damit ungleichartigen D, D' ohne jeden Ersatz verloren. Im Falle der Figur VI verschwinden die drei Ecken C, C', C'' und die beiden damit ungleichartigen D, D', während bei D' eine mit den erstgenannten gleichartige neu entsteht. Endlich im Falle der Figur VII verschwinden die vier Ecken C_1, C, C', C'' und die damit ungleichartigen D, D', während zwei jener ersteren durch entsprechende gleicher Art bei D und D' entstehende ersetzt werden. In jedem dieser drei Fälle gehen also zwei Paare ungleichartiger Ecken verloren. Somit ergibt sich schließlich:

> Wird von einem Treppenwege ein freies Endstück abgeschnitten, so verliert derselbe ein Paar oder zwei Paare ungleichartiger Ecken.

Im Anschluß an die vorstehenden Figuren möge noch (NB. nicht als Beweismittel, sondern lediglich zum besseren Verständnis verschiedener späterhin in Betracht kommender Möglichkeiten) darauf hingewiesen werden, daß im Falle der Figur IV auch bei $C'C''$ ein freies Endstück entsteht, welches statt des horizontal abgeschnittenen durch einen vertikalen Schnitt abgetrennt werden kann (s. die punktierte Linie in Fig. IV). Das gleiche ergibt sich bei Figur VI, während man im Falle der Figur VII, statt das Doppel-Endstück durch einen horizontalen Schnitt abzutrennen, auch die beiden einfachen Endstücke mit den Rückkehrseiten $\overline{C C_1}$ und $C'C''$ durch vertikale Querschnitte abschneiden könnte.

Bei den eben betrachteten Beispielen sind die vertikal abzuschneidenden Endstücke so gelegen, daß sie vollständig in die horizontal abzuschneidenden hineinfallen und daher gleichzeitig mit diesen auch beseitigt werden. Andererseits kann natürlich auch der Fall eintreten, daß solche Endstücke sich nur teilweise decken und daß man daher lediglich die Wahl hat, zunächst das eine oder das andere abzuschneiden (s. z. B. Fig. VIII).

VIII



4. Lehrsatz I. Ein horizontal beginnender und ebenso endigender, *nicht monotoner* Treppenweg, der zwei beliebige Punkte (x_0, y_0) und (X, Y) verbindend ganz *im Innern* des von den Vertikalen $x = x_0$ und $x = X$ begrenzten Parallelstreifens verläuft, läßt sich durch sukzessives Abschneiden freier Endstücke in einen jene beiden Punkte gleichfalls verbindenden *monotonen* Treppenweg verwandeln, der sich im Falle $y_0 = Y$ auf eine horizontale Gerade reduziert.

Beweis. Da der Treppenweg nicht monoton ist, also mindestens eine Rückkehrseite enthält, so läßt sich zeigen, daß dann auch mindestens ein freies Endstück vorhanden sein muß. Existiert nur eine einzige Rückkehrseite, so muß die betreffende Eckenfolge offenbar zwei ungleichartige

benachbarte Ecken[1]) haben, andernfalls würde ja eine weitere Eckenfolge, also auch eine weitere Rückkehrseite entstehen. Somit liefert also jene eine Rückkehrseite jedenfalls ein Endstück. Dieses ist aber auch stets ein freies: zunächst kann keinesfalls einer der Endpunkte des Treppenweges im Innern desselben oder auf dem Querschnitt liegen, denn ist etwa $x_0 < X$, so genügen ja die Abszissen x (aller Punkte des Treppenweges, da er im Innern des Parallelstreifens $x = x_0$, $x = X$ verläuft) der Bedingung $x_0 < x < X$. Träte also überhaupt irgend ein Teil des Treppenweges in das Innere jenes Endstücks oder an den zugehörigen Querschnitt, so müßte er auch wieder umkehren, was ja die Existenz einer weiteren Rückkehrseite nach sich ziehen würde.

Enthält der Treppenweg mehrere Rückkehrseiten, so muß es unter diesen eine oder auch mehrere einander gleiche kürzeste gegeben. Dann liefert aber wieder jede solche kürzeste Rückkehrseite CC' ein freies Endstück. Gehören nämlich zu C und C' nicht gleichweit entfernte Nachbarecken, so muß, wenn etwa die am nächsten gelegene Ecke zu C' benachbart ist, einer der beiden durch Fig. III und IV charakterisierten Fälle eintreten[2]), und das so entstehende Endstück muß ein freies bleiben, da ja bezüglich eines etwaigen Eindringens eines Endpunktes des Treppenweges die bereits im vorigen Falle erörterte Unmöglichkeit bestehen bleibt, andererseits auch kein anderer Teil des Treppenweges in das Innere jenes Endstückes eintreten oder mit dem abschließenden Querschnitt ein Stück gemein haben, ohne die Existenz einer noch kürzeren

---

[1]) Ist eine Rückkehrseite vorhanden, bei welcher einer der Endpunkte des Treppenweges die Stelle einer benachbarten Ecke vertritt, so kann eine solche Rückkehrseite niemals als einzige auftreten: diese Möglichkeit scheidet also in dem vorliegenden Falle von vornherein aus. (Vgl. auch die Fußnote auf p. 40.)

[2]) Es kann nicht etwa der Treppenweg in dem durch Fig. IV dargestellten Falle beim Punkte D nach der entgegengesetzten Richtung abbiegen, da ja auf diese Weise eine Rückkehrseite $D\overline{C''} < \overline{CC'}$ entstehen würde.

Rückkehrseite (d. h. $< CC'$) nach sich zu ziehen. Liegen dagegen C und C' gleichweit entfernt von ihren Nachbarecken, dann muß ein Endstück von einer der Formen, wie in Fig. V bis VII dargestellt, zum Vorschein kommen[1]), das dann wieder aus den unmittelbar zuvor angeführten Gründen auch ein freies bleiben muß.

Somit ist gezeigt, daß jeder nicht-monotone Treppenweg ein oder mehrere freie Endstücke enthält. Werden diese abgeschnitten, so ist der übrig bleibende Treppenweg (d. h. derjenige, welcher aus dem ursprünglichen dadurch entstanden ist, daß die abgeschnittenen Wegstücke durch die entsprechenden Querschnitte ersetzt worden sind) entweder monoton (was sicher dann der Fall ist, wenn überhaupt nur eine Rückkehrseite vorhanden war) oder er besitzt noch ein oder mehrere freie Endstücke, die dann wieder analog wie zuvor abgeschnitten werden können. Fährt man in dieser Weise fort, so muß, da ja der ursprüngliche Treppenweg nur eine endliche Anzahl von Ecken besaß und durch das Abschneiden eines freien Endstückes jedesmal mindestens ein Eckenpaar verloren geht, nach einer endlichen Anzahl der angedeuteten Operationen, ein Treppenweg zum Vorschein kommen, der keine Rückkehrseite mehr enthält, also monoton ist. Dabei bleiben die beiden Endpunkte offenbar unverändert, da ja nach Voraussetzung der Treppenweg ganz im Innern des Parallelstreifens $x = x_0$, $x = X$ verlaufen sollte, jene beiden Endpunkte bei den fraglichen Operationen also niemals beteiligt sind. Daraus folgt schließlich noch, daß jener monotone Treppenweg sich auf die Verbindungslinie $x_0 X$ reduziert, wenn Anfangs- und Endpunkt des Treppenweges in derselben Horizontalen liegen.

5. Lehrsatz II. Der im vorigen Lehrsatz charakterisierte Treppenweg zerlegt den von den Vertikalen $x = x_0$, $x = X$ begrenzten Parallelstreifen in zwei ge-

[1]) Bezüglich der Fälle Fig. VI und VII gilt eine analoge Bemerkung, wie die in der vorigen Fußnote gemachte.

trennte Stücke, ein „oberes“ und ein „unteres“, deren jedes einen zusammenhängenden Bereich bildet.

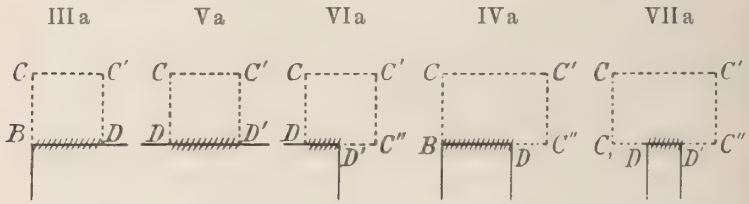
Beweis. Der ausgesprochene Satz gilt zunächst, falls der Treppenweg ein monotoner ist, wie man unmittelbar erkennt, wenn man den letzteren aus einer Horizontalen, welche den Parallelstreifen in ein „oberes“ und ein „unteres“ Stück zerlegt, durch sukzessives Ansetzen treppenförmig gelagerter Rechtecke entstehen läßt.

Angenommen nun der Satz sei für irgend einen speziellen Treppenweg T erwiesen. Ist dann P ein innerer Punkt des einen Teilbereiches, etwa des oberen, so muß eine durch P gezogene, nach abwärts gerichtete Vertikale den Treppenweg T mindestens in einem, eventuell in einem ersten Punkte P' schneiden. Für einen anderen, nicht gerade der Strecke $\overline{PP'}$ angehörigen[1]) Innenpunkt P_1 des oberen Teilbereiches mag P_1' die analoge Bedeutung haben. Alsdann bildet der Linienzug $\overline{PP'}\,(\mathsf{T})\,P_1'\overline{P_1}$, wo (T) das zwischen P' und P_1' liegende Stück von T bedeutet, einen die Punkte P und P_1 verbindenden Treppenweg. Bedeutet nun δ eine positive Zahl, die höchstens so groß ist, wie die kleinste Seite und der kleinste Abstand zweier paralleler Seiten von T, auch höchstens so groß, wie jede der Strecken $\overline{PP'}$, P_1P_1' und ihre kleinsten Abstände von den zwischenliegenden Vertikalseiten von T, und wird $\delta' < \frac{\delta}{2}$ angenommen, so läßt sich dem Treppenwege T ein aus Innenpunkten des oberen Bereiches bestehender, im Abstande δ' parallel zu den Seiten von T verlaufender Treppenweg τ zuordnen, der PP' im Punkte P'', $\overline{P_1P_1'}$ im Punkte P_1'' treffen mag. Wird das zwischen P'' und P_1'' liegende Stück von τ mit (τ) bezeichnet, so bildet der Linienzug $\overline{PP''}\,(\tau)\,P_1''\overline{P_1}$ einen durchweg aus Innenpunkten des oberen Bereiches bestehenden, die Punkte P und P_1 verbindenden Treppenweg, dessen Existenz

[1]) Der Fall, daß P_1 auf PP' liegen sollte, ist zu trivial, um in dem vorliegenden Zusammenhange eine Erörterung zu erfordern.

als Kriterium dafür gelten kann, daß jener obere Bereich ein zusammenhängender ist.

Nun werde der obige Treppenweg **T** durch Ansetzen eines freien Endstückes in einen (gleichfalls im Innern des Parallelstreifens $x = x_0$, $x = X$ verlaufenden) Treppenweg **T'** übergeführt, also in der Weise abgeändert, daß man entweder ein Stück einer Seite (s. Fig. IIIa, Va, VIa) oder eine ganze Seite (s. Fig. IVa, VIIa)[1]) durch einen mit dem Treppenwege **T** sonst nirgends kollidierenden, auch die Grenzvertikalen nicht berührenden, gebrochenen Linienzug ersetzt, der mit der ausgeschalteten Strecke zusammen ein Rechteck bildet. Alsdann läßt sich zeigen, daß der fragliche Satz auch für den



Treppenweg **T'** gilt. Da zu beiden Seiten des ausgeschalteten Wegestücks Punkte verschiedener Kategorie, zu beiden Seiten des neu hinzutretenden Wegestücks Punkte derselben Kategorie liegen, so werden durch die angedeutete Operation lediglich die Innenpunkte des betreffenden Rechtecks dem einen Bereiche — etwa, um eine Festsetzung zu treffen, dem oberen, entzogen und dem anderen, also dem unteren, hinzugefügt. Daß auch der Treppenweg **T'** die beiden Bereiche vollständig gegen einander abschließt und zugleich der untere dabei ein zusammenhängender bleibt, ist evident. Um die Erhaltung dieser Eigenschaft auch für den oberen Bereich zu erkennen, bemerke man zunächst, daß

[1]) Die Numerierung der Figuren und die Bezeichnung der verschiedenen Eckpunkte entspricht genau derjenigen der Fig. III—VII, p. 32, 33 während die Reihenfolge nach Maßgabe des hier vorliegenden Einteilungsprinzips abgeändert erscheint.

die von einem beliebigen Innenpunkte P des oberen Bereichs nach abwärts gerichtete Vertikale, falls sie nicht einen bzw. einen ersten Punkt von T' trifft, der dem ursprünglichen Treppenwege T angehört, die obere Seite des eingeschalteten Rechteckstückes treffen muß, so daß also die Fußpunkte der von zwei solchen Punkten P, P_1 gefällten Vertikalen zunächst durch ein gewisses Stück (T') des Treppenweges T' verbunden erscheinen. Diesem letzteren läßt sich aber, da in der unmittelbaren äußeren Nachbarschaft der fraglichen Rechteckseiten ausschließlich Innenpunkte des oberen Bereiches liegen, ein aus solchen Punkten in einem gewissen Abstande δ' verlaufender Parallelweg τ' zuordnen, so daß schließlich P und P_1 gerade so, wie zuvor, durch einen aus lauter Innenpunkten des oberen Bereiches bestehenden Treppenweg verbunden werden können.

Nun kann nach dem zuvor bewiesenen Lehrsatz jeder Treppenweg der näher bezeichneten Art durch Abschneiden freier Endstücke auf einen monotonen reduziert werden. Er läßt sich daher auch umgekehrt aus diesem letzteren durch sukzessives Ansetzen jener Endstücke wieder herstellen. Hieraus, im Zusammenhange mit dem bisher gesagten ergibt sich aber die Richtigkeit des ausgesprochenen Satzes.

6. Lehrsatz III. Jeder Treppenweg der bisher betrachteten Kategorie besitzt ebensoviele Ecken der einen, wie der anderen Art.

Beweis. Bei der Reduktion des Treppenweges auf einen monotonen gehen ungleichartige Ecken stets paarweise verloren. Da andererseits der resultierende monotone Treppenweg gleich viel Ecken beiderlei Art besitzt (eventuell gar keine, falls er sich auf eine horizontale Gerade reduziert), so erkennt man unmittelbar die Richtigkeit der obigen Behauptung.

Zusatz. Die Lehrsätze I und III bleiben auch gültig, wenn der Treppenweg, statt ganz im Innern des betrachteten Parallelstreifens zu verlaufen, diesen lediglich nicht überschneidet, also eventuell mit den begrenzenden Vertikalen

$x = x_0$, $x = X$ ein oder mehrere Stücke gemein hat[1]). Um dies einzusehen, braucht man nur die Anfangs- und End-Horizontale um ein beliebig kleines Stück nach links bzw. rechts zu verlängern. Hierdurch erleidet offenbar der Eckenvorrat des Treppenweges keinerlei Veränderung, während andererseits die fragliche Voraussetzung der Lehrsätze I und III wieder erfüllt ist.

Im übrigen läßt sich, wie im Anschluß an die eben gemachte Bemerkung leicht zu erkennen, jene Voraussetzung auch noch merklich weiter verallgemeinern, nur werden dann wieder gewisse ausdrücklich zu erwähnende Einschränkungen notwendig, so daß der etwa erzielte Gewinn an Allgemeinheit den tatsächlichen Verlust an Einfachheit nicht aufwiegt und das um so mehr, als der Satz I bzw. III in der vorliegenden Fassung für die weiterhin daran zu knüpfenden Schlüsse vollkommen ausreicht.

§ 2.

Treppenpolygone.

1. Unter einem Treppenpolygon verstehen wir einen geschlossenen Treppenweg, also einen solchen, bei dem Anfangs- und Endpunkt zusammenfallen. Aus der in § 1 Nr. 1 gegebenen Definition eines Treppenweges folgt dann schon von selbst, daß ein solches Treppenpolygon in einem Zuge durchlaufen werden kann, ohne daß irgend ein Punkt, abgesehen von dem am Schlusse des Umlaufs wieder auftretenden An-

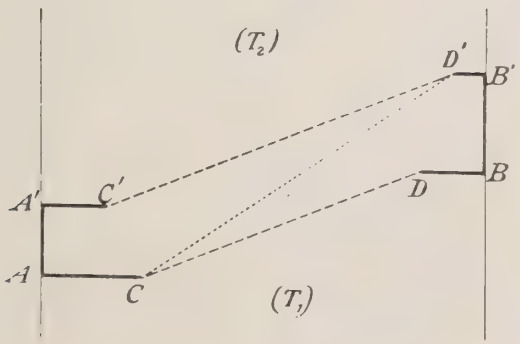
[1]) Der Grund, warum der Voraussetzung nicht von vornherein diese etwas erweiterte Form gegeben wurde, ist folgender. Darf der Treppenweg die begrenzenden Vertikalen berühren, so könnte, falls die erste vertikale Seite des Treppenweges eine Rückkehrseite ist, die nächste Horizontale bis an die Grenzvertikale heranreichen. Analoge Verhältnisse könnten auch am Ende stattfinden. Diese Art von Rückkehrseiten würden dann keine Endstücke im Sinne unserer Definition liefern und müßten bei der Betrachtung immer ausdrücklich ausgenommen werden, was zwar keinerlei prinzipiellen Schwierigkeiten, aber eine unnötige Beschwerung der Darstellung zur Folge hätte.

fangspunkte, ein zweites Mal erreicht wird; mit anderen Worten: ein geschlossener Treppenweg ist eo ipso ein einfach geschlossener Weg ohne Doppelpunkte.

Lehrsatz I. Jedes Treppenpolygon Π zerlegt die Ebene in zwei getrennte Gebiete, deren jedes einen zusammenhängenden Bereich, einen inneren und einen äußeren, bildet.

Beweis. Es seien x_0 und X, wo etwa wieder $x_0 < X$, die äußersten Abszissen, denen noch Punkte des Treppenpolygons entsprechen, so daß also das letztere noch eine oder mehrere Seiten mit je einer der Vertikalen $x = x_0$ und $x = X$ gemeinsam hat, dieselben aber nicht überschneidet. Wir wollen vorläufig annehmen, daß das Treppenpolygon nur je eine Seite mit diesen Vertikalen gemein hat, etwa AA' und $\overline{BB'}$. Die beiden an $\overline{AA'}$ bzw. $\overline{BB'}$ anstoßenden horizontalen Seiten mögen mit $\overline{AC}$, $\overline{A'C'}$ bzw. $\overline{BD}$, $\overline{B'D'}$ bezeichnet werden. Dann soll zunächst gezeigt werden, daß der von C aus weiterführende Treppenweg im Punkte D, also der von C' ausgehende in D' einmünden muß. Angenommen, der Treppenweg führe von C nicht nach D, sondern nach D' (wie in der nebenstehenden Figur IX durch die punktierte Linie schematisch angedeutet ist), so würde der Treppenweg $\overline{AC} \ldots \overline{D'B'}$ den

IX



von den beiden Vertikalen $x = x_0$ und $x = X$ begrenzten Parallelstreifen in zwei getrennte Stücke zerlegen derart, daß $\overline{A'C'}$ dem oberen, $\overline{DB}$ dem unteren Stücke angehört, und es wäre daher unmöglich, die noch offenen Endpunkte C' und D durch einen Treppenweg zu verbinden, ohne den Treppenweg $AC \ldots \overline{D'B'}$ zu überschreiten. Somit muß in der Tat das Treppenpolygon so verlaufen, daß der Punkt C mit D, C' mit D' durch je einen Treppenweg verbunden erscheint, wie dies in Figur IX die gestrichelten Linien schematisch andeuten. Durch den Treppenweg $\overline{AC} \ldots \overline{DB}$ wird alsdann ein unteres Stück (T_1), durch den Treppenweg $\overline{A'C'} \ldots \overline{D'B'}$ ein oberes Stück (T_2) von dem Parallelstreifen abgeschnitten: diese beiden bilden zusammen mit den beiden links und rechts von dem Parallelstreifen gelegenen Halbebenen einen zusammenhängenden, von dem Treppenpolygon begrenzten Bereich, den wir als äußeren bezeichnen. Andererseits haben das von dem Treppenwege $\overline{AC} \ldots \overline{DB}$ begrenzte obere und das von dem Treppenwege $\overline{A'C'} \ldots \overline{B'D'}$ begrenzte untere Gebiet des Parallelstreifens ein Stück gemein, das, außer von diesen Treppenwegen, von den Parallelen $\overline{AA'}$ und $\overline{BB'}$ begrenzt wird. Daß dasselbe einen gegen den zuvor erwähnten äußeren Bereich durch das Treppenpolygon II abgeschlossenen Bereich bildet, folgt dann unmittelbar aus dem Lehrsatz II des vorigen Paragraphen. Wir bezeichnen ihn als inneren Bereich und zeigen, daß derselbe gleichfalls ein zusammenhängender ist. Für die Seitenlängen und die Abstände irgend zweier paralleler Seiten muß wiederum ein gewisses Minimum δ bestehen. Wird dann $\delta' < \frac{\delta}{2}$ angenommen, so läßt sich dem Treppenpolygon II ein aus lauter Innenpunkten von II bestehendes im Abstande δ' parallel verlaufendes Treppenpolygon II' zuordnen, das zunächst mit II zusammen einen zusammenhängenden Rand von Innenpunkten des Polygons II begrenzt. Da ferner jede durch einen inneren Punkt von II' (der also auch innerer Punkt von II ist) ge-

zogene Gerade, etwa, um eine Festsetzung zu treffen, eine nach abwärts gerichtete Vertikale, die Begrenzung Π' in einem bzw. in einem ersten Punkte treffen muß, so folgt, daß jeder solche Punkt mit den zuvor erwähnten Innenpunkten des Randes zusammenhängt und daß andererseits auch zwei derartige Punkte durch einen aus Innenpunkten von Π gebildeten Treppenweg verbunden werden können. Jener innere Bereich von Π ist also tatsächlich zusammenhängend.

Hierbei war die beschränkende Voraussetzung gemacht worden, daß das Treppenpolygon nur je eine Seite mit den beiden begrenzenden Vertikalen gemein haben solle. Sind nun mehrere solche Seiten vorhanden, so mögen etwa mit $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ die beiden links und rechts am tiefsten gelegenen bezeichnet werden. Wird dann das Treppenpolygon in der Weise abgeändert, daß man $\overline{AA'}$ um eine beliebig kleine Strecke δ nach links, $\overline{BB'}$ in gleicher Art nach rechts verschiebt und die anstoßenden Horizontalen in entsprechender Weise um δ verlängert, so genügt das nunmehrige Treppenpolygon der zuvor gemachten Beschränkung, teilt somit die Ebene in einen äußeren und einen inneren Bereich, welchem letzteren insbesondere die beiden an die Vertikalen $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ anstoßenden Streifen von der Breite δ angehören. Werden diese von dem inneren Bereiche abgeschnitten und dem äußeren hinzugefügt, so ergibt sich ohne weiteres die Richtigkeit des ausgesprochenen Satzes für das gegebene und somit für jedes beliebige Treppenpolygon.[1])

Zusatz. Wird für eine bei A beginnende Durchlaufung des Treppenpolygons die Richtung $\overline{AC}$ als positive bezeichnet, so ist der innere von dem Treppenpolygon begrenzte Bereich dadurch charakterisiert, daß seine an die Begrenzung anstos-

[1]) Mit Rücksicht auf den folgenden Lehrsatz sei noch ausdrücklich hervorgehoben, daß auch in dem zuletzt betrachteten allgemeineren Falle die Fortsetzung des mit AC beginnenden Treppenweges stets zunächst nach B, niemals nach einem auf der Grenzvertikale höher gelegenen Eckpunkte führt (was genau so, wie in dem zuerst betrachteten Falle erkannt werden kann).

senden Punkte bei positivem Umlauf stets zur Linken bleiben. In der Nähe der Ecken erster Art (s. § 1, Nr. 2) gehören dann die Punkte zwischen den Schenkeln des rechten Winkels dem inneren Bereiche an, in der Nähe der Ecken zweiter Art die Punkte innerhalb der Schenkel des überstumpfen Winkels. Die Ecken erster Art sollen in diesem Zusammenhange als konvex (sc. nach außen), diejenigen zweiter Art als konkav bezeichnet werden.

2. Lehrsatz II. Jedes Treppenpolygon hat einen Überschuß von vier gleichartigen und zwar bei positivem Umlauf konvexen Ecken.

Beweis. Mit Festhaltung der im vorigen Lehrsatz angewendeten Bezeichnungen läßt sich das Treppenpolygon, etwa bei positivem Umlauf, zerlegen in zwei Treppenwege, einen „unteren“: $\overline{AC \ldots DB}$ und einen „oberen“: $\overline{B'D' \ldots C'A'}$ nebst den beiden verbindenden Vertikalen BB' und $\overline{A'A}$. Jeder der beiden genannten Treppenwege hat nach dem Lehrsatz III des § 1 gleichviel Ecken von jeder Art. Dazu kommen noch die vier Ecken bei B, B', A', A, welche in jedem Falle gleichartig, bei positivem Umlauf offenbar konvex sind.

Anmerkung. Wird die Seitenzahl des Treppenpolygons, die ja offenbar stets gerade sein muß, mit $2m$ bezeichnet, so ist nach dem eben bewiesenen Satze $(m + 2)$ die Anzahl der konvexen, $(m - 2)$ diejenige der konkaven Ecken. Daraus würde folgen, daß die Summe der inneren Winkel des Treppenpolygons den Wert $(m + 2)\frac{\pi}{2} + (m - 2)\frac{3\pi}{2}$, also $(2m - 2)\pi$ haben muß. Umgekehrt könnte man natürlich, wenn man etwa die Anzahl der konvexen Ecken mit x bezeichnet, diese aus der Gleichung $x \cdot \frac{\pi}{2} + (2m - x) \cdot \frac{3\pi}{2} = (2m - 2)\pi$ bestimmen, falls man sich auf den als bekannt anzusehenden Satz stützt, daß die Summe der inneren Winkel eines beliebigen n-Ecks den Wert $(n - 2)\pi$ hat. In der Tat findet sich ja dieser Satz wohl in zahlreichen Lehrbüchern der Elementargeometrie: in-

dessen scheint mir der gewöhnlich dafür gegebene, auf vollständiger Induktion beruhende Beweis[1]) unzureichend. Dabei wird nämlich etwa folgendermaßen geschlossen: Bezeichnet man mit ω_n die Summe der Innenwinkel eines beliebigen n-Ecks, durch Vielfache von π ausgedrückt, und beachtet, daß ein $(n-1)$-Eck in ein n-Eck mit neu hinzutretender ausspringenden oder einspringenden Ecke übergeht, wenn man an eine Seite des $(n-1)$-Ecks ein Dreieck nach außen oder innen ansetzt und an Stelle jener Seite in die Begrenzung aufnimmt, so ergibt sich in jedem der beiden genannten Fälle die Rekursionsformel

$$\omega_n = \omega_{n-1} + \pi,$$

aus der dann, wegen $\omega_3 = \pi$, in der Tat das fragliche Resultat $\omega_n = (n-2)\pi$ unmittelbar hervorgeht. Das Unzureichende dieser Schlußweise liegt indessen darin, daß dabei ohne jede Begründung vorausgesetzt wird, es könne jedes n-Eck durch die angedeutete Operation aus einem gewissen $(n-1)$-Eck hergestellt werden oder, was offenbar auf dasselbe hinausläuft, man könne jedes n-Eck dadurch in ein $(n-1)$-Eck verwandeln, daß man die nicht gemeinsamen Endpunkte zweier benachbarter Seiten durch eine Gerade verbindet. Diese Annahme ist aber nur dann einwandfrei, wenn feststeht, daß stets mindestens zwei benachbarte Seiten vorhanden sind, deren Endpunkte sich durch eine Gerade verbinden lassen, ohne daß diese mit irgend einer anderen Polygonseite einen Punkt gemein hat. Die Tatsache selbst dürfte richtig sein: ob sie jemals streng bewiesen wurde, möchte ich dahingestellt lassen, da ich in dem betreffenden Zweige der mathematischen Literatur sehr wenig bewandert bin[2]).

---

[1]) S. z. B. Baltzer, Elemente der Mathematik, Bd. 2: Viertes Buch, § 3, Nr. 10.

[2]) Während der Drucklegung dieser Arbeit wurde mir durch Herrn A. Rosenthal mitgeteilt, daß sich die fragliche Ergänzung zu dem Beweise des Satzes über die Winkelsumme eines Polygons in zwei Publikationen jüngeren Datums findet, nämlich: W. Killing und H. Hovestadt, Handbuch des mathemat. Unterrichts, I (Leipzig 1910), p. 62—67; N. J. Lennes, American Journal of Mathematics 33 (1911), p. 42—47.

Will man sich darauf beschränken, den Satz über die Winkelsumme lediglich für ein Treppenpolygon durch das obige Induktionsverfahren abzuleiten, so hätte man zuvor nur zu erweisen, daß die Seitenzahl jedes Treppenpolygons stets durch Abschneiden oder Ansetzen eines Rechtecks reduziert werden kann, was sich durch die Beweismethode des Lehrsatzes I von § 1 leicht begründen ließe und merklich weniger Umstände macht, als die der vorliegenden Untersuchung als Endziel zu Grunde liegende Feststellung, daß die fragliche Reduktion stets durch bloßes Abschneiden von Rechtecken erzielt werden kann.

3. Zwei parallele Seiten bzw. Stücke von Seiten, deren senkrechte Verbindungslinien abgesehen von den Endpunkten aus lauter Innenpunkten des Treppenpolygons bestehen[1]), sollen **gegenüberliegend** heißen.

Lehrsatz III. Verbindet man zwei gegenüberliegende Seiten eines Treppenpolygons durch eine senkrechte Gerade, so zerlegt dieselbe, als Querschnitt aufgefaßt, das Treppenpolygon (und zwar sowohl *Begrenzung*, wie *Innenfläche*) in zwei Treppenpolygone.

Beweis. Wir betrachten zunächst zwei beliebige[2]) parallele Seiten bzw. Stücke von Seiten AB, CD, deren senkrechte Verbindungslinien von keiner anderen Seite geschnitten werden, und zeigen, daß zu diesen stets entgegengesetzte Richtungen gehören, wenn das Treppenpolygon Π in einem bestimmten Richtungssinne durchlaufen wird[3]). Angenommen, dies wäre nicht der Fall, so daß also AB und $\overline{CD}$ in derselben Richtung, etwa, um eine Festsetzung zu treffen, in der

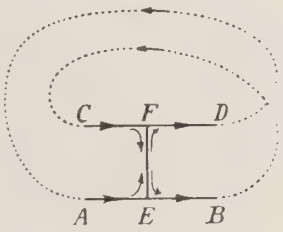
[1]) Damit ist also implicite gesagt, daß solche parallele Seitenstücke nur so lange „gegenüberliegend" heißen, als ihre senkrechten Verbindungslinien mit keiner anderen Seite des Treppenpolygons einen Punkt gemein haben.

[2]) D. h. also: nicht notwendig im Sinne der oben gegebenen Definition „gegenüberliegende".

[3]) Vgl. hierzu die Fußnote 1) auf p. 48.

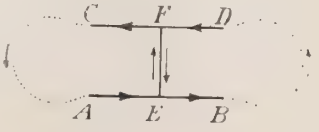
Richtung $A \ldots B$, bzw. $C \ldots D$ (d. h. in der Richtung der wachsenden Variablen) durchlaufen würden. Alsdann müßte bei einem in A beginnenden Umlauf die Fortsetzung von AB auf irgend einem Treppenwege zunächst in C, ebenso die Fortsetzung von CD schließlich wieder in A einmünden (wie dies in der Fig. X a durch die punktierten Linien schematisch angedeutet ist). Wird nun irgend ein Punkt E der Strecke AB mit dem senkrecht gegenüber liegenden Punkte F der Strecke $\overline{CD}$ geradlinig verbunden, so ließe sich ein bei A beginnender Umlauf über $AEFD$ und den dort anschließenden (durch die punktierte Linie angedeuteten) Weg wieder nach A zurückführen, ebenso ein bei C beginnender über $\overline{CFEB}$ und den dort anschließenden (punktierten) Weg nach C zurückführen. Das Treppenpolygon Π würde also in zwei gesonderte Treppenpolygone Π_1 und Π_2 zerfallen, deren jedes einen Überschuß von 4 gleichartigen Ecken haben müßte. Es müßte also, je nachdem diese zweimal 4 Ecken noch unter einander gleichartig sind oder nicht, ein Gesamtüberschuß von 8 gleichartigen Ecken oder überhaupt keiner vorhanden sein. Beide Annahmen sind aber unmöglich, da der ursprüngliche Eckenvorrat von Π einen Überschuß von 4 konvexen Ecken enthält und die neu hinzutretenden Ecken bei E und F sich auf Π_1 und Π_2 so verteilen würden, daß jedem dieser Polygone ein Paar ungleichartiger Ecken zufällt. Damit ist aber die ausgesprochene Behauptung bewiesen.

X a



Dies vorausgeschickt, seien jetzt $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ zwei gegenüberliegende Seiten bzw. Seitenstücke des Polygons Π, so wird eine Durchlaufung von $\overline{AB}$ in der Richtung $A \ldots B$ eine solche von $\overline{CD}$ in

X b



der entgegengesetzten Richtung $D \ldots C$ zur Folge haben[1]) und daher die Fortsetzung des Weges AB zunächst nach dem Punkte D, diejenige des Weges DC schließlich wieder nach A führen (wie durch die punktierten Linien in Fig. X b angedeutet wird). Zieht man jetzt wiederum den Querschnitt EF, so läßt sich ein bei A beginnender Umlauf über $AEFC$ und den dort anschließenden (punktierten) Weg nach A zurückführen, ebenso ein bei D beginnender über $DFEB$ usw. zurück nach D. Das Treppenpolygon Π zerfällt also durch den Querschnitt EF in zwei Treppenpolygone Π_1 und Π_2, und zwar werden die Innenpunkte, von Π abgesehen, von den nunmehr der Begrenzung angehörenden Punkten des Querschnittes $\overline{EF}$, auch zu Innenpunkten von Π_1 und Π_2, da ja der äußere, die unendlich fernen Punkte enthaltende Bereich von Π bei dem fraglichen Prozeß als solcher völlig unberührt bleibt und daher auch wiederum vollständig dem äußeren Bereiche von Π_1 bzw. Π_2 angehören muß. Es zerfällt also gleichzeitig mit der Begrenzung auch der innere Bereich von Π durch den Querschnitt EF in zwei getrennte Stücke.

Dieses Resultat erleidet keinerlei Änderung, wenn einer der beiden Endpunkte des Querschnittes oder auch jeder von beiden ein Eckpunkt sein sollte (der dann offenbar nur einer konkaven Ecke angehören kann). Man erkennt dies am einfachsten, wenn man dem Querschnitt zunächst eine minimale Verschiebung zu Teil werden läßt.

4. Lehrsatz IV. Von jedem Treppenpolygon, das nicht schon durch einen einzigen Querschnitt in zwei Rechtecke zerfällt[2]), lassen sich sowohl durch hori-

[1]) Man könnte dies natürlich auch unmittelbar aus dem in Nr. 1, Zusatz, ausdrücklich erwähnten Umstande folgern, daß bei einer Umlaufung des Polygons etwa in positivem Sinne der innere Bereich stets zur Linken bleiben muß. Es erschien mir indessen nicht ganz einwandfrei, die geometrische Anschauung in diesem Umfange zur Begründung der fraglichen Tatsache in Anspruch zu nehmen.

[2]) Dies tritt stets beim Sechseck ein, da dieses ja nur eine einzige konkave Ecke besitzt und daher überhaupt nur einen horizontalen

zontale, wie durch vertikale Querschnitte mindestens zwei freie Eckstücke abschneiden[1]).

Beweis. Ein Treppenpolygon mit $2m$-Seiten besitzt allemal $(m-2)$ konkave Ecken. Von jeder dieser letzteren aus läßt sich nach beliebiger Wahl ein Querschnitt in horizontaler, wie in vertikaler Richtung ziehen.

Man gehe nun von einer beliebig gewählten konkaven Ecke aus, etwa, um eine Festsetzung zu treffen, derjenigen konkaven Ecke C_1, welche als die erste auftritt, wenn man das Treppenpolygon von dem tiefsten linken Eckpunkt anfangend in positiver Richtung umläuft, und ziehe von C_1 zunächst einen horizontalen Querschnitt q_1, welcher also das Treppenpolygon Π in zwei solche zerlegt: ein „unteres", d. h. an die untere Seite des Querschnittes sich anschließendes, Π_1 und ein „oberes" $\overline{\Pi}_1$. Möglicherweise ist Π_1 dann schon ein Rechteck, also ein durch den Querschnitt q_1 abgeschnittenes freies Endstück von Π. Wenn nicht, so ziehe man von derjenigen konkaven Ecke C_2 aus, welche bei Fortsetzung des positiven Umlaufs als nächste zum Vorschein kommt, einen weiteren horizontalen Querschnitt q_2, durch welchen Π_1 in zwei Teilpolygone Π_1' und Π_2 zerfällt. Dabei soll Π_1' dasjenige Treppenpolygon bedeuten, dessen Begrenzung beide Querschnitte q_1 und q_2 enthält, während dann diejenige von Π_2 nur aus dem einen Querschnitte q_2, im übrigen aus lauter Seiten des ursprünglichen Polygons Π besteht. Da die konkave Ecke C_2

und einen vertikalen Querschnitt der fraglichen Art zuläßt; ferner, wenigstens in Bezug auf die eine Querschnittsrichtung, bei denjenigen Achtecken, deren zwei (einzigen) konkaven Ecken in einer horizontalen oder vertikalen Geraden liegen.

[1]) Dies ist nicht so zu verstehen, daß sich stets zwei Endstücke durch horizontale und zugleich zwei andere durch vertikale Querschnitte abtrennen lassen müßten. Vielmehr könnten diese beiden Arten von Endstücken teilweise zusammenfallen (vgl. § 1, p. 34, insbesondere das zu Fig. IV und VI—VIII gesagte), so daß lediglich die Wahl zwischen beiden freistünde.

bei dieser Operation vollständig verloren geht[1]), so besitzt Π_2 jedenfalls um mindestens eine konkave Ecke und infolge dessen um mindestens ein Eckenpaar weniger als Π_1 (da ja der Unterschied zwischen der Anzahl der vorhandenen konvexen und konkaven Ecken immer konstant, nämlich $= 4$, bleiben muß). Ist Π_2 noch kein Rechteck, so läßt sich in analoger Weise ein Treppenpolygon Π_3 davon abtrennen, dessen Begrenzung wiederum nur aus einem Querschnitt q_3, im übrigen aus Seiten des ursprünglichen Treppenpolygons besteht und mindestens ein Eckenpaar weniger enthält als Π_2. Da die Anzahl der von vornherein überhaupt vorhandenen Ecken eine endliche ist, andererseits jedes der sukzessive von Π_1 abgetrennten Treppenpolygone Π_2, Π_3 . . . noch einen Überschuß von 4 konvexen Ecken besitzt, so muß nach einer endlichen Anzahl der angedeuteten Operationen ein Treppenpolygon mit nur vier und zwar konvexen Ecken zum Vorschein kommen, also ein nur Innenpunkte des Treppenpolygons umschließendes Rechteck, dessen Begrenzung nur einen Querschnitt enthält, mit anderen Worten: ein durch diesen letzteren abgeschnittenes freies Endstück.

Die gleiche Schlußweise, auf das „obere" Treppenpolygon Π_1 angewendet, liefert dann die Existenz eines zweiten, gleichfalls durch einen horizontalen Querschnitt abzutrennenden Endstücks.

Ersetzt man in der vorstehenden Betrachtung die horizontalen Querschnitte durch vertikale, so ergibt sich in Bezug auf diese ein völlig gleichartiges Resultat. Damit ist aber der oben ausgesprochene Satz vollkommen bewiesen.

5. Als unmittelbare Folgerung des eben bewiesenen Satzes resultiert schließlich der folgende, das eigentliche Ziel dieser ganzen Untersuchung bildende Hauptsatz:

Jedes Treppenpolygon, das nicht schon durch einen einzigen Querschnitt in zwei Rechtecke

[1]) Die durch einen Querschnitt erzeugten neuen Ecken können offenbar immer nur konvexe sein.

zerfällt[1]), läßt sich (auf mehrfache Art) in der Weise aus Rechtecken zusammensetzen, daß um einen rechteckigen Kern sukzessive weitere Rechtecke angesetzt werden, wobei jedes neu hinzukommende Rechteck nur längs *einer* Seite ganz oder teilweise mit einem einzigen der bereits vorhandenen Rechtecke zusammenhängt.

Beweis. Zunächst lassen sich von dem Treppenpolygon etwa durch horizontale Querschnitte mindestens zwei, eventuell auch eine größere Anzahl von freien Endstücken abschneiden, die durchweg mit der Nummer 1 bezeichnet werden mögen. Jedes dieser Rechtecke stößt nur längs des Querschnittes, welcher eine Seite oder auch nur einen Teil einer Seite bildet (vgl. Fig. III—VII) an das übrig bleibende Treppenpolygon. Das letztere besitzt mindestens vier Ecken weniger, als das ursprünglich und gestattet, falls es nicht bereits ein Rechteck ist, oder schon durch einen Horizontalschnitt in zwei Rechtecke zerfällt, ein weiteres Abschneiden von mindestens zwei weiteren freien (genauer gesagt: durch die erste Operation frei gewordenen) Endstücken, die dann die Nummer 2 erhalten sollen. Fährt man in dieser Weise fort, so wird schließlich, etwa nach der $(k-1)^{\text{ten}}$ derartigen Operation ein einziges Rechteck übrig bleiben, dem also die Nummer k zukommen würde.[2]) Alsdann läßt sich aber offenbar das ursprüngliche Treppenpolygon in der Weise wieder herstellen, daß man an das Rechteck mit der Nummer k zunächst dasjenige oder diejenigen mit der Nummer $(k-1)$, an das so

[1]) Vgl. p. 48, Fußnote 2).

[2]) Man kann leicht eine obere Grenze für die Zahl k angeben. Bei jeder der ersten $(k-2)$ Operationen gehen mindestens 4 Ecken verloren, bei der $(k-1)^{\text{ten}}$ möglicherweise nur 2. Alsdann bleiben noch die 4 Ecken des mit k numerierten Kernrechtecks übrig. Darnach hat man, wenn mit $2m$ die Eckenzahl des gegebenen Treppenpolygons bezeichnet wird: $4(k-2)+2+4 \leq 2m$, also:

$$k < \frac{m+1}{2}.$$

entstandene Treppenpolygon die Rechtecke mit der Nummer $(k-2)$ ansetzt, u. s. f. Dabei hängt jedes neu hinzukommende Rechteck auf Grund seiner Entstehungsweise nur längs des Querschnittes, durch welchen es früher abgeschnitten wurde, mit einem einzigen Rechteck des bereits vorhandenen Komplexes zusammen.

In ganz analoger Weise kann man mit lauter vertikalen Querschnitten operieren. Das in diesem Falle zum Vorschein kommende Kernrechteck muß offenbar ein anderes sein, als das zuvor resultierende, da jenes frühere nur längs seiner horizontalen, das jetzige nur längs seiner vertikalen Seiten mit anderen Bestandteilen des Treppenpolygons zusammenhängt.

Schließlich kann man auch horizontale und vertikale Querschnitte beliebig kombinieren, insbesondere bei jeder einzelnen Operation alle überhaupt vorhandenen freien Endstücke abschneiden, soweit sich das durch Anwendung beider Arten von Querschnitten bewerkstelligen läßt.

§ 3.

Funktionentheoretische Anwendung.

Lehrsatz. Es sei x_0 ein beliebiger Punkt im Innern eines Treppenpolygons Π, $\mathfrak{P}_0(x\ x_0)$ eine für eine gewisse Umgebung von x_0 konvergierende Potenzreihe. Läßt sich diese auf jeder im Innern von Π verlaufenden gebrochenen Linie[1]) analytisch fortsetzen, so definiert das Funktions-Element $\mathfrak{P}_0(x\ x_0)$ eine im Innern von Π eindeutige und reguläre analytische Funktion.

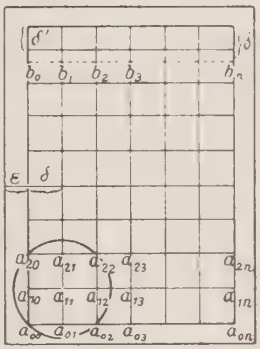
Beweis. Wir betrachten vorläufig den speziellen Fall, daß das Treppenpolygon sich auf ein einfaches Rechteck R reduziert. Man erkennt dann zunächst, daß der Konvergenzkreis von $\mathfrak{P}_0(x\ x_0)$ und jeder daraus abgeleiteten, um irgend einen Innenpunkt von R konvergierenden Potenzreihe sich zum

[1]) Es würde schon ausreichen, vorauszusetzen, daß die Fortsetzung auf jedem innerhalb Π verlaufenden Treppenwege möglich sein soll.

mindesten bis an die Begrenzung von R erstrecken muß. Denn auf jedem dieser Konvergenzkreise muß mindestens eine singuläre Stelle c der betreffenden Potenzreihe liegen, die andernfalls in das Innere von R fallen würde. Alsdann wäre es aber unmöglich, $\mathfrak{P}_0(x\ x_0)$ auf einem durch das Innere des betreffenden Konvergenzkreises gehenden Wege über c hinaus fortzusetzen.

Dies vorausgeschickt, denken wir uns nach Annahme einer beliebig kleinen positiven Zahl ε ein Rechteck R' konstruiert, dessen Seiten im Abstande ε parallel zu den Seiten von R und im Innern von R verlaufen. Hierauf teile man eine Seite von R' (etwa, wie in der nebenstehenden Fig. XI, die untere horizontale) in n gleiche Teile, deren Länge δ der Beziehung genügen soll

XI



$$(1)\quad \delta < (1+\sqrt{2})\,\varepsilon = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}-1},$$

und trage die Strecke δ auch auf einer der vertikalen Seiten ab, so oft es angeht (etwa, wie in der Figur, von unten beginnend). Zieht man sodann durch sämtliche Teilpunkte Parallelen zu den Seiten, so zerfällt das Rechteck R' in eine Anzahl von (horizontal gelagerten) Parallelstreifen, deren jeder aus n Quadraten von der Seitenlänge δ besteht, und eventuell einen letzten Parallelstreifen aus Rechtecken mit der Grundlinie δ und einer Höhe $\delta' < \delta$. Die Eckpunkte jener Quadrate mögen, von unten links beginnend, mit

$$\begin{array}{l} a_{00}\ a_{01}\ a_{02}\ \ldots\ a_{0n} \\ a_{10}\ a_{11}\ a_{12}\ \ldots\ a_{1n} \\ a_{20}\ a_{21}\ a_{22}\ \ldots\ a_{2n} \\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \end{array}$$

bezeichnet werden.

Man leite nun aus $\mathfrak{P}_0(x\ x_0)$ auf irgend einem in R' verlaufenden Wege eine Potenzreihe $\mathfrak{P}(x\ a_{11})$ ab, deren Konver-

genzradius nach dem oben gesagten mindestens den Wert $\delta + \varepsilon$ haben muß. Da aber aus Ungl. (1) folgt, daß:

$$\delta + \varepsilon > \sqrt{2} \cdot \delta,$$

so ist derselbe größer als die Diagonale der einzelnen Quadrate, so daß also ein um den Punkt a_{11} mit der Diagonale $\sqrt{2} \cdot \delta$ beschriebener Kreis einschließlich seiner Peripherie aus lauter Innenpunkten des Konvergenzbereiches von $\mathfrak{P}(x\ a_{11})$ besteht und somit die zwei ersten Quadrate des untersten und diejenigen des nächstfolgenden Parallelstreifens ganz in das Innere jenes Konvergenzbereiches fallen. Leitet man sodann aus $\mathfrak{P}(x|a_{11})$ sukzessive die Potenzreihen ab:

$$\mathfrak{P}(x\ a_{11}, a_{12}),\ \mathfrak{P}(x\ a_{11}, a_{12}, a_{13}) \ldots \mathfrak{P}(x\ a_{11}, a_{12}, \ldots a_{1,n-1}),$$

so wird der Konvergenzbereich einer jeden dieser Potenzreihen immer je ein Quadrat des unteren und des oberen Parallelstreifens mit dem Konvergenzbereiche der unmittelbar vorangehenden Potenzreihe gemein haben, und es definiert somit die obige Folge von Potenzreihen zunächst für die beiden untersten Parallelstreifen eine daselbst eindeutige analytische Funktion regulären Verhaltens.

Nun läßt sich aber aus $\mathfrak{P}(x\ a_{11})$ auch eine Potenzreihe $\mathfrak{P}(x\ a_{11}, a_{21})$ und aus dieser letzteren wiederum eine Folge von Potenzreihen ableiten

$$\mathfrak{P}(x\ a_{11}, a_{21}, a_{22}),$$
$$\mathfrak{P}(x\ a_{11}, a_{21}, a_{22}, a_{23}) \ldots \mathfrak{P}(x|a_{11}, a_{21}, a_{22} \ldots a_{2,n-1}),$$

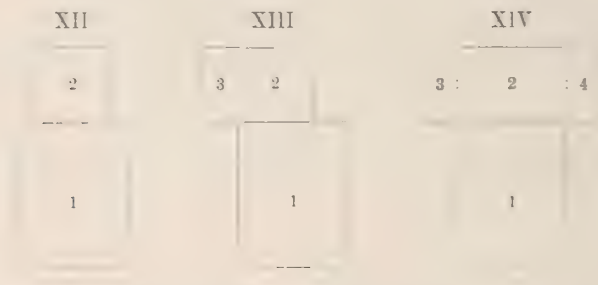
deren Konvergenzbereiche mit demjenigen von $\mathfrak{P}(x\ a_{11}, a_{21})$ zusammen den zweiten und dritten Parallelstreifen umfassen. Dabei hat der Konvergenzbereich der Reihe $\mathfrak{P}(x\ a_{11}, a_{21})$ das erste und zweite Quadrat des zweiten Parallelstreifens mit dem Konvergenzbereiche von $\mathfrak{P}(x\ a_{11})$ gemein, derjenige von $\mathfrak{P}(x\ a_{11}, a_{21}, a_{22})$ noch das zweite jener Quadrate mit dem Konvergenzbereiche der genannten Reihen und mit demjenigen von $\mathfrak{P}(x\ a_{11}, a_{12})$. Daraus folgt aber die Gültigkeit der Beziehung $\mathfrak{P}(x\ a_{11}, a_{21}) = \mathfrak{P}(x\ a_{11})$ für die beiden ersten Qua-

drate, diejenige der Beziehung $\mathfrak{P}(x \mid a_{11}, a_{21}, a_{22}) = \mathfrak{P}(x \mid a_{11}, a_{12})$ für das zweite und folglich auch für das (den Konvergenzbereichen dieser Reihen gleichfalls gemeinsame) dritte Quadrat des zweiten Parallelstreifens. So fortschließend findet man, daß die obige zweite Folge von Potenzreihen für den zweiten und dritten Parallelstreifen eine daselbst eindeutige und reguläre analytische Funktion definiert, welche im zweiten Parallelstreifen mit der bereits durch die erste Serie von Potenzreihen definierten vollständig übereinstimmt. Und durch Fortsetzung dieses Verfahrens läßt sich schließlich das ganze Rechteck R' mit einem System von Potenzreihen belegen, deren Konvergenzbereiche sich in analoger Weise teilweise überdecken. Dabei hat man nur bei der Ausdehnung der Entwicklungen auf den obersten Parallelstreifen, falls nicht zufällig $\delta' = \delta$ sein sollte, vielmehr der (allgemeine) Fall $\delta' < \delta$ eintritt, das Verfahren in der Weise zu modifizieren, daß man als Mittelpunkte der betreffenden Potenzreihen-Entwicklungen nicht die auf der letzten Teilungs-Horizontalen gelegenen Gitterpunkte, sondern diejenigen benützt, die auf einer im Abstande δ zur oberen Seite des Rechtecks R' gezogenen Parallelen liegen (in der Figur die Punkte $b_1, b_2 \ldots b_{n-1}$).

Die Gesamtheit der so hergestellten Potenzreihen definiert eine im Innern und auf der Begrenzung von R' eindeutige und reguläre analytische Funktion $f(x)$. Zu jeder Stelle von R' gehört ein und nur ein bestimmtes Funktionselement und, auf Grund des oben näher beschriebenen Ineinandergreifens der verschiedenen Potenzreihen, ist jedes andere auf jedem beliebigen, dem Bereiche R' angehörenden Wege daraus ableitbar. Insbesondere kann das nunmehr der Stelle x_0 zugehörige Funktionselement kein anderes sein, als die ursprünglich vorgelegte Potenzreihe $\mathfrak{P}_0(x\ x_0)$. Denn auf dem speziellen Wege, welcher zuerst dazu diente, $\mathfrak{P}_0(x\ x_0)$ in $\mathfrak{P}(x\ a_{11})$ überzuführen, ließe sich bekanntlich — allenfalls mit Einschaltung geeigneter Zwischenpunkte — auch die Rückbildung von $\mathfrak{P}(x\ a_{11})$ in $\mathfrak{P}_0(x\ x_0)$ bewerkstelligen. Da es ferner freisteht, den mit δ bezeichneten Abstand von R' und R unbegrenzt

zu verkleinern, so ist damit der oben ausgesprochene Satz zunächst für das Innere eines Rechtecks bewiesen.

Es hat keine Schwierigkeit, das zur Definition von $f(x)$ angewendete Verfahren auf den Fall auszudehnen, daß der Bereich, in dessen Innern die gemachten Voraussetzungen gelten sollen, durch Ansetzen eines „freien Endstücks" vergrößert wird, also eines Rechtecks, welches mit dem ursprünglichen eine Seite ganz oder teilweise gemein hat. Man hat dann nur, nachdem $f(x)$ in dem einen, als Anfangsbereich angesehenen (in den beigegebenen Figuren mit 1 bezeichneten) Rechteck definiert ist, einen gewissen Parallelstreifen dem benachbarten Rechteck, soweit es an die eine Seite des ursprünglichen anstößt, hinzuzufügen und die daselbst bereits bestehende Definition von $f(x)$ auf das Rechteck 2 (Fig. XII) bzw. das Teilrechteck 2 (Fig. XIII, XIV) auszudehnen und eventuell das analoge Verfahren zur weiteren Fortsetzung von $f(x)$ über das Teilrechteck 3 bzw. 4 anzuwenden.



Um nun schließlich den ausgesprochenen Satz für ein beliebiges Treppenpolygon Π zu beweisen, denke man sich dasselbe auf Grund des im vorigen Paragraphen abgeleiteten „Hauptsatzes" in ein Kernrechteck und eine Anzahl sukzessive daran anzusetzender freier Endstücke zerlegt. Ist dann das Funktionselement $\mathfrak{P}(x\ x_0)$ in einem der einzelnen Teilrechtecke vorgelegt, so hat man dasselbe auf irgend einem das betreffende Teilrechteck mit dem Kernrechteck verbindenden, im Innern von Π verlaufenden Treppenwege bis in das

Kernrechteck fortzusetzen. Hierauf läßt sich nach dem oben gelehrten Verfahren $f(x)$ zunächst für das Kernrechteck eindeutig definieren, und diese Definition kann sukzessive über sämtliche Teilrechtecke von Π in eindeutiger Weise fortgesetzt werden. Daß die so definierte, im Innern von Π eindeutige und reguläre Funktion $f(x)$ in der Umgebung der Stelle x_0 mit dem ursprünglich gegebenen Funktionselement $\mathfrak{P}(x\ x_0)$ übereinstimmt, folgt dann genau so, wie oben für den Fall des Rechtecks.

Damit ist der fragliche Satz vollständig bewiesen.

Nachtrag zu der vorstehenden Abhandlung.

Von **Alfred Pringsheim.**

Vorgetragen in der Sitzung am 6. März 1915.

1. Wie ich schon in einer der vorstehenden Abhandlung während der Drucklegung hinzugefügten Fußnote (s. p. 45) hervorgehoben habe, findet sich in dem Handbuche des mathematischen Unterrichts von W. Killing und H. Hovestadt, Bd. (1910) die von mir bisher vermißte Ergänzung zu dem Beweise des Satzes, daß die Summe der inneren Winkel eines beliebigen n-Ecks $(n-2)\pi$ beträgt. Nachdem ich inzwischen von den bezüglichen Auseinandersetzungen genauere Kenntnis genommen habe, scheint es mir zweckmäßig, daran noch die folgenden Bemerkungen zu knüpfen.

A. a. O. p. 66 ergibt sich der Satz: In jedem einfachen Polygon[1]) läßt sich mindestens eine *ganz im Innern* verlaufende *Diagonale* (d. h. zwei nicht benachbarte Eckpunkte verbindende Gerade) ziehen. Hieraus wird dann durch vollständige Induktion erschlossen, daß es in jedem einfachen n-Eck mindestens ein System von $(n-3)$ im Innern verlaufenden und daselbst sich nicht schneidenden Diagonalen gibt, durch welche dann das Polygon in $(n-2)$ Dreiecke zerlegt wird. Man erkennt nun aber des weiteren durch dieselbe Schlußweise, wie sie beim Beweise des Lehrsatzes IV über Treppenpolygone angewendet wurde (s. p. 49), daß immer

[1]) Ein Polygon heißt einfach, wenn jede Seite außer den beiden mit den zwei benachbarten Seiten gemeinsamen Eckpunkten keinen weiteren Punkt mit irgend einer anderen Seite gemein hat. Bei dieser Terminologie wären also die bisherigen „Treppenpolygone“ als einfache zu bezeichnen.

mindestens zwei Teildreiecke vorhanden sein müssen, deren Begrenzung nur je eine Diagonale, also je zwei Polygonseiten enthält (entsprechend den zwei abschneidbaren freien Endstücken beim Treppenpolygon), und daraus folgt dann wiederum die Möglichkeit, jedes einfache Polygon durch sukzessives Ansetzen von Dreiecken an ein Kerndreieck in der Weise zu erzeugen, daß jedes neu anzusetzende Dreieck nur längs einer Seite mit dem bereits vorhandenen Komplex zusammenhängt. Um dieses Ergebnis zur Übertragung des in § 3 der vorigen Abhandlung für ein Treppenpolygon bewiesenen Weierstraßschen Satzes auf ein beliebiges einfaches Polygon zu verwerten, hätte man den entsprechenden Beweis also nur für ein Dreieck zu führen. Dies läßt sich aber, in den Einzelheiten der Ausführung zwar etwas weniger einfach, jedoch prinzipiell in derselben Weise bewerkstelligen, wie es a. a. O. für ein Rechteck geschah.

2. Zu dem Weierstraßschen Satze über die Eindeutigkeit einer durch ein Funktionselement $\mathfrak{P}_0(x\ x_0)$ für das Innere eines einfach zusammenhängenden Bereiches B definierten analytischen Funktion $f(x)$ möchte ich noch die folgenden auf die Fassung der Voraussetzung sich beziehenden Bemerkungen machen. Diese Voraussetzung bestand in der Forderung, daß $\mathfrak{P}_0(x\ x_0)$ auf jedem innerhalb B verlaufenden Wege (bzw., was im Effekt auf dasselbe hinausläuft, auf jedem polygonalen oder auch nur auf jedem Treppenwege) analytisch fortsetzbar sein sollte. Daraus folgt dann auf Grund eines bekannten Satzes über den wahren Konvergenzbereich einer Potenzreihe, daß für keine der aus $\mathfrak{P}_0(x\ x_0)$ ableitbaren Reihen eine im Innern von B gelegene singuläre Stelle vorhanden sein kann, und diese Eigenschaft bildet die eigentliche Grundlage des weiteren Beweises. Nichtsdestoweniger dürfte es kaum als zweckmäßig erscheinen, dieselbe, wie manche Autoren tun, von vornherein in die Voraussetzung aufzunehmen. Will man nämlich ausreichend charakterisieren, in wieweit irgend eine Stelle als singuläre zu betrachten sei, so muß doch gesagt werden, es solle kein auf beliebigem innerhalb B verlaufenden Wege

aus $\mathfrak{P}_0(x\ x_0)$ ableitbares Funktionselement eine im Innern von B gelegene singuläre Stelle besitzen[1]). Diese Fassung enthält aber im Grunde genommen einen logischen Fehler. Denn ans der darin enthaltenen Forderung, daß überhaupt auf jedem beliebigem (innerhalb B verlaufenden) Wege immer wieder Funktionselemente ableitbar sein sollen, ergibt sich die Nichtexistenz innerhalb B liegender Singularitäten schon als notwendige Folgerung, während sie hier als besonderes Postulat erscheint. Immerhin würde auf diese Weise wenigstens nichts geradezu Unrichtiges gefordert. Das letztere ist dagegen tatsächlich der Fall, wenn die Voraussetzung so gefaßt wird[2]): es solle die (durch das Element $\mathfrak{P}_0(x\ x_0)$ definierte) Funktion $f(x)$ im Innern von B keine singulären Stellen haben. Denn der durch das Element $\mathfrak{P}_0(x\ x)$ bei Beschränkung der Fortsetzungswege auf den Bereich B erzeugte Zweig der Funktion $f(x)$ kann sehr wohl durchweg eindeutig und regulär verlaufen, andererseits aber die Funktion $f(x)$, bei Fortsetzung über B hinaus und schließlicher Rückkehr in diesen Bereich, daselbst beliebige Singularitäten besitzen[3]).

---

[1]) So. dem Sinne nach, bei C. Jordan, Cours d'Analyse 1 (1893), p. 346. Der Beweis läßt übrigens mancherlei zu wünschen. Erstens wird es dabei als selbstverständlich angesehen, daß man jedes Polygon durch Diagonalen in Dreiecke zerlegen könne, derart, daß jedes Dreieck mit dem nächstfolgenden eine Seite gemein hat, was doch keineswegs so selbstverständlich ist (vgl. oben Nr. 1 des Textes), zweitens scheint mir die infinitesimale Betrachtung, welche schließlich zum Beweise des fraglichen Satzes für den Fall eines Dreiecks angewendet wird, dem Wesen der Sache nicht recht zu entsprechen und ermangelt daher der schlagenden Beweiskraft.

[2]) S. z. B. Harkness and Morley, A Treatise of the Theory of Functions (1893), p. 152.

[3]) Vgl. das weiter unten gegebene Beispiel (letzter Absatz) Ein anderes einfaches Beispiel entsprechender Art liefert die Potenzreihe

$$\sum_1^\infty{}^{\nu}\,(-1)^{\nu-1}\,\frac{x^{\nu-1}}{\nu},$$

welche zunächst für $|x|<1$ den Hauptwert von $\frac{1}{x}\lg(1+x)$, also in der

Im Anschluß an die letzte Bemerkung verdient aber noch hervorgehoben zu werden, daß ein ähnlicher Vorgang auch innerhalb des Bereiches B sich vollziehen kann. D. h. es kann der Fall eintreten, daß bestimmte Innenpunkte von B bei Fortsetzung von $\mathfrak{P}_0(x\ x_0)$ auf gewissen (sogar auf unendlich vielen, überall dicht liegenden) Wegen sich als Punkte regulären Verhaltens erweisen, bei der Wahl anderer (sc. immer nur im Innern von B verlaufender) Wege aber als singuläre Punkte erscheinen. Hiernach würde es also nicht genügen, die Voraussetzung für die eindeutige Fortsetzbarkeit von $\mathfrak{P}_0(x\ x_0)$ über den Bereich B etwa in der Weise zu fassen: es solle für jeden Innenpunkt x' des Bereiches B ein Funktionselement $\mathfrak{P}_0(x\ x_0, \ldots x')$ auf irgend einem innerhalb B verlaufenden Wege aus $\mathfrak{P}_0(x\ x_0)$ ableitbar sein.

Die generelle Bestätigung für das wirkliche Vorhandensein von Fällen der oben bezeichneten Art liefert ein Blick auf die Riemannsche Theorie der algebraischen Funktionen, bzw. auf die Zusammenhangverhältnisse gewisser Riemannscher Flächen (worauf mich Herr Hartogs gelegentlich aufmerksam gemacht hat). Es erschien mir indessen für das volle Verständnis des vorliegenden, der elementaren Funktionentheorie angehörenden Weierstraßschen Satzes und namentlich mit Rücksicht auf Vorlesungszwecke wünschenswert, ein Beispiel zu konstruieren, welches ohne jedes kompliziertere Hilfsmittel das Erforderliche leistet, also eine Potenzreihe explizite anzuschreiben, von der sich durch eine Betrachtung sehr einfacher Art nachweisen läßt, daß sie im Innern eines gewissen Be-

---

Weierstraßschen Bezeichnung $\frac{1}{x}\lg(1+x)$ darstellte. Das gleiche gilt auch noch von der analytischen Fortsetzung des obigen Funktionselements für die ganze längs der reellen Achse von -1 bis $-\infty$ zerschnittenen Ebene, welche also hier den im Texte immer mit B bezeichneten Bereich vorstellt. Wird nun aber die Funktion weiter fortgesetzt auf Wegen, die den Schnitt $(-1, -\infty)$ beliebig oft in der einen oder in der anderen Richtung überschreiten, so entstehen Funktionszweige von der Form $\frac{1}{x}(\lg(1+x) \pm 2m\pi i)$, die an der Stelle $x=0$ einen Pol haben.

reiches B nach jedem Punkte analytisch fortsetzbar ist und dennoch keine in B eindeutige analytische Funktion definiert.

3. Wir betrachten die dreiwertige Funktion $y = f(x)$, welche definiert wird durch die kubische Gleichung:

$$y^3 - 3y - 2x = 0. \tag{1}$$

Die Cardanische Formel liefert alsdann für die drei Werte von $f(x)$ die Ausdrücke:

$$\left\{\begin{array}{l} y_1 = f_1(x) = \sqrt[3]{\sqrt{1+x^2}+x} - \sqrt[3]{\sqrt{1+x^2}-x} \\ \qquad\quad = u - v \\ y_2 = f_2(x) = au - a^2 v \\ y_3 = f_3(x) = a^2 u - av \end{array}\right\} \text{ wo: } a = e^{\frac{2\pi i}{3}}, \quad a^2 = e^{-\frac{2\pi i}{3}}. \tag{2}$$

Dabei sind zunächst für $x < 1$ unter den Radikalen die Hauptwerte der betreffenden Wurzeln zu verstehen, also speziell:

$$\begin{gathered} f_1(0) = 0 \qquad f_2(0) = a - a^2 = i \cdot \sqrt{3} \\ f_3(0) = a^2 - a = -i \cdot \sqrt{3}. \end{gathered} \tag{3}$$

Die Funktion $f(x)$ besitzt, wie die Substitution $x = \frac{1}{x'}$ lehrt, in $x = \infty$ einen Verzweigungspunkt, in welchem alle drei Werte der Funktion zusammenfallen. Da andererseits die Radikanden $\sqrt{1+x^2} \pm x$ für kein endliches x verschwinden, so kommen als etwaige weitere Verzweigungspunkte von $f(x)$ nur diejenigen von $\sqrt{1+x^2}$, also die Stellen $x = i$ und $x = -i$ in Betracht. Um das Verhalten von $f(x)$ in der Umgebung dieser Stellen zu untersuchen, machen wir die Substitution:

$$x = i \cdot \sin\vartheta, \qquad \text{also: } \sqrt{1+x^2} = \cos\vartheta, \tag{4}$$

so daß die Beziehungen (2) in die folgenden übergehen:

$$\begin{gathered} f_1(x) = 2i \cdot \sin\frac{\vartheta}{3} \qquad f_2(x) = 2i \cdot \sin\frac{\vartheta + 2\pi}{3} \\ f_3(x) = 2i \sin\frac{\vartheta - 2\pi}{3}. \end{gathered} \tag{5}$$

Es beschreibe jetzt ϑ den folgenden Weg: von 0 positiv bis $\frac{\pi}{2} - |\delta$, wo $|\delta > 0$ beliebig klein, sodann auf einem Halbkreise mit dem Radius δ von $\frac{\pi}{2} - |\delta$ bis $\frac{\pi}{2} + \delta|$, schließlich wieder reell positiv wachsend bis π. Da

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} \pm \delta\right) = \cos\delta = 1 - \frac{\delta^2}{2!} + \frac{\delta^4}{4!} - \cdots,$$

so wird x für $0 < \vartheta < \frac{\pi}{2} - \delta$ den rein imaginären Weg von 0 bis $i \cdot \cos \delta|$ durchlaufen. Da ferner $\cos\delta$ für hinlänglich kleine δ sich näherungsweise verhält wie $1 - \frac{\delta^2}{2}$, so wird, wenn ϑ einen Halbkreis mit dem Radius δ um $\frac{\pi}{2}$ beschreibt, $x(= i \cdot \cos\delta)$ eine nahezu kreisförmige geschlossene Kurve um den Punkt i beschreiben und sodann vom Werte $i \cdot \cos \delta$ wieder nach 0 zurücklaufen, wenn ϑ von $\frac{\pi}{2} + \delta|$ bis π wächst. Läßt man (lediglich der größeren Einfachheit der Notierung halber) δ gegen Null konvergieren, zieht also den von x beschriebenen Schleifenweg in den Weg (0, i, 0) zusammen, so ergibt sich mit Rücksicht auf die Beziehungen (5)

$$\left(\text{und wegen: } \sin\frac{\pi}{6} = \sin\frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}, \quad \sin\frac{\pi}{3} = \sin\frac{2\pi}{3} = \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$$

das folgende Schema:

(A)

$x = 0$	i	0
$\vartheta = 0$	$\frac{\pi}{2}$	π
$f_1(x) = 0$	i	$i \cdot \sqrt{3}$
$f_2(x) = i \cdot \sqrt{3}$	i	0
$f_3(x) = -i \cdot \sqrt{3}$	$-2i$	$-i \cdot \sqrt{3}$.

Die Stelle $x = i$ ist daher ein Verzweigungspunkt nur für $f_1(x)$ und $f_2(x)$, dagegen nicht für $f_3(x)$.

Analog ergibt sich für negative ϑ bzw. negativ imaginäre Werte von x das Schema:

$$\text{(B)}\qquad \begin{cases} x = 0 & -i & 0 \\ \vartheta = 0 & -\frac{\pi}{2} & -\pi \\ f_1(x) = 0 & -i & -i\cdot\sqrt{3} \\ f_2(x) = i\cdot\sqrt{3} & 2i & i\cdot\sqrt{3} \\ f_3(x) = -i\cdot\sqrt{3} & -i & 0, \end{cases}$$

so daß die Stelle $x = -i$ nur für $f_1(x)$ und $f_3(x)$, nicht aber für $f_2(x)$ als Verzweigungspunkt erscheint.

Nun lassen sich aber die für $|x| < 1$ bestehenden Potenzreihen-Entwicklungen von $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ leicht angeben. Für reelle ϑ des Intervalls $-\frac{\pi}{2} < \vartheta < \frac{\pi}{2}$ und beliebige reele λ bestehen bekanntlich die Reihendarstellungen[1]):

$$\text{(6)}\qquad \sin\lambda\vartheta = \lambda\cdot\sin\vartheta + \frac{\lambda(1^2-\lambda^2)}{3!}\sin^3\vartheta + \frac{\lambda(1^2-\lambda^2)(3^2-\lambda^2)}{3!}\sin^5\vartheta + \cdots$$

$$\text{(7)}\qquad \cos\lambda\vartheta = 1 - \frac{\lambda^2}{2!}\sin^2\vartheta + \frac{\lambda^2(2^2-\lambda^2)}{4!}\sin^4\vartheta - \frac{\lambda^2(2^2-\lambda^2)(4^2-\lambda^2)}{6!}\sin^6\vartheta + \cdots$$

Setzt man speziell $\lambda = \frac{1}{3}$ und substituiert in (6) mit Rücksicht auf Gleichung (4): $\sin\vartheta = \frac{x}{i}$, so ergibt sich auf Grund der ersten Gleichung (5):

[1]) S. z. B. Schlömilch, Algebr. Analysis (4. Aufl. 1868), § 60 (p. 263), Gl. (18), (16). — Hattendorf, Algebr. Analysis (1877), § 47 (p. 133), Gl. (7), (8) ... Auch: Stolz-Gmeiner, Einl. in die Funktionentheorie, II (1905), p. 383, Gl. (18), (19), (wenn daselbst $\arcsin x = \vartheta$ gesetzt wird).

$$f_1(x) = \mathfrak{P}_1(x) = 2\,\mathfrak{P}(x),$$

wo:

$$(8)\quad \mathfrak{P}(x) = \frac{x}{3} - \frac{(1^2\cdot 3^2-1)}{3!}\cdot\left(\frac{x}{3}\right)^3 + \frac{(1^2\cdot 3^2-1)(3^2\cdot 3^2-1)}{5!}\left(\frac{x}{3}\right)^5 - \cdots,$$

zunächst für reelle x des Intervalls $-1 < x < +1$, dann aber wegen des analytischen Charakters von $f_1(x)$ ohne weiteres für komplexe x des Bereiches $|x| \leq 1$.

Man hat ferner:

$$\sin\frac{\vartheta \pm 2\pi}{3} = \sin\frac{\vartheta}{3}\cos\frac{2\pi}{3} \pm \cos\frac{\vartheta}{3}\sin\frac{2\pi}{3}$$
$$= \frac{1}{2}\left(-\sin\frac{\vartheta}{3} \pm \sqrt{3}\cdot\cos\frac{\vartheta}{3}\right).$$

Substituiert man auch in Gleichung (7): $\sin\vartheta = \frac{x}{i}$ und bezeichnet die für $\lambda = \frac{1}{2}$ resultierende Potenzreihe mit $Q(x)$, so daß also:

$$(9)\quad \mathfrak{Q}(x) = 1 + \frac{1}{2!}\left(\frac{x}{3}\right)^2 + \frac{(2^2\cdot 3^2-1)}{4!}\cdot\left(\frac{x}{3}\right)^4 + \frac{(2^2\cdot 3^2-1)(4^2\cdot 3^2-1)}{6!}\cdot\left(\frac{x}{3}\right)^6 + \cdots,$$

so ergibt sich weiter mit Berücksichtigung von (5):

$$f_2(x) = \mathfrak{P}_2(x) = -\mathfrak{P}(x) + i\cdot\sqrt{3}\cdot Q(x)$$
$$f_3(x) = \mathfrak{P}_3(x) = -\mathfrak{P}(x) - i\cdot\sqrt{3}\cdot Q(x).$$

Aus den vorausgeschickten Betrachtungen über das Verhalten von $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ in Bezug auf die Stellen $x = \pm i$ folgt dann, daß für das Funktionselement $\mathfrak{P}_1(x)$ die beiden Stellen $x = \pm i$ singuläre sind, dagegen für $\mathfrak{P}_2(x)$ nur die Stelle $x = i$, für $\mathfrak{P}_3(x)$ nur $x = -i$.

Bedeutet also B irgend einen einfach zusammenhängenden Bereich, der die beiden Stellen $x = \pm i$ im Innern enhält, so wird das Funktionselement $\mathfrak{P}_1(x)$ bei analytischer Fortsetzung über einen den Punkt $x = i$ einmal umlaufenden Schleifenweg, wie das Schema (A) zeigt, in $\mathfrak{P}_2(x)$ übergehen. Wird sodann vom Punkte i aus ein Schnitt längs der imaginären Achse in

der Richtung nach oben gezogen, so existiert in dem so zerschnittenen Bereich B' für $\mathfrak{P}_2(x)$ keine singuläre Stelle, und es ist daher $\mathfrak{P}_2(x)$ auf jedem beliebigen innerhalb B' verlaufenden Wege analytisch fortsetzbar. Das analoge findet statt, wenn man $\mathfrak{P}_1(x)$ durch analytische Fortsetzung über einen die Stelle $x = -i$ umlaufenden Schleifenweg zunächst in $\mathfrak{P}_3(x)$ überführt (s. das Schema (B)) und sodann einen Schnitt vom Punkte $-i$ n der negativen Richtung der imaginären Achse führt.

Es zeigt sich also, daß das Funktionselement $\mathfrak{P}_1(x)$ auf unendlich vielen überall dicht liegenden Wegen nach jedem inneren Punkte von B analytisch fortsetzbar ist, ohne indessen einen im Bereiche B eindeutigen und regulären Zweig einer analytischen Funktion zu definieren.

Schließlich sei mit Rücksicht auf eine in Nr. 2 (s. p. 60 am Schlusse und Fußn. 3) gemachte Bemerkung noch folgendes erwähnt: Enthält der Bereich B nur eine der Stellen $x = \pm i$ im Innern, z. B. nur die Stelle $x = i$, so definiert offenbar das Funktionselement $\mathfrak{P}_3(x)$ einen im Innern von B eindeutigen und regulären Funktionszweig, obschon der Bereich die singuläre Stelle i der betreffenden analytischen Funktion im Innern enthält.

Eine neue Lösung der Grundaufgabe der Luftphotogrammetrie.

Von **S. Finsterwalder.**

Vorgetragen in der Sitzung am 6. März 1915.

Die Grundaufgabe der Photogrammetrie, von der hier die Rede ist, betrifft die Wiederherstellung des dargestellten Gegenstandes aus zwei Bildern, die mit bekannten Apparaten (bekannter innerer Orientierung) aufgenommen wurden, deren Standpunkte aber unbekannt sind. Zur Wiederherstellung der Form des auf beiden Bildern dargestellten Gegenstandes reichen diese Bilder auch ohne jede Kenntnis der Standpunkte aus, ja die Standpunkte können in ihrer Lage zu dem Gegenstande mitbestimmt werden.[1]) Nur um die Größe des dargestellten Gegenstandes festzulegen, ist eine Längenabmessung an ihm notwendig. In den meisten Fällen, insbesondere bei Geländeaufnahmen, ist es jedoch nicht bloß die Größe und Form des dargestellten Gegenstandes, die man haben will, sondern auch noch die Lage gegen die Lotrichtung, ohne deren Kenntnis die gefundene Geländeform fast wertlos wäre. Dazu braucht man aber die Lage und Höhe dreier Punkte des zu findenden Geländes und man kann die Kenntnis derselben als notwendige Voraussetzung für die Lösung der Grundaufgabe in einem solchen Falle ansehen. Ist diese Voraussetzung gegeben, so ist die Lösung vom theoretischen Standpunkt aus ganz wesent-

[1]) S. Finsterwalder, Die geom. Grundlagen der Photogrammetrie. Jahresber. der Deutsch. Math. Vereinigung, 6. Bd., 1899, S. 15.

lich vereinfacht. Während man im anderen Falle die Grundaufgabe bloß auf die vom theoretischen Standpunkt aus fast hoffnungslos verwickelte Aufgabe, zwei sphärische Fünfecke auf der Kugel perspektiv in Bezug auf ein Zentrum zu legen, zurückführen kann,[1]) hat man bei der genannten Voraussetzung nur zweimal die Aufgabe 4. Grades zu lösen, welche in dem räumlichen Rückwärtseinschneiden eines Standpunktes nach den drei gegebenen Festpunkten besteht[2]) und kann dann mittels der ganz elementaren Methode des Vorwärtseinschneidens den abgebildeten Gegenstand punktweise wiederherstellen. Alle hiezu nötigen Verfahren sind längst ausgearbeitet; allein, wenn man sie mit der wünschenswerten Genauigkeit anwenden will, erfordern sie trotz mancher Vereinfachung im einzelnen im ganzen doch sehr viel Mühe und Zeit, so daß nur selten der Wert des Erzielten mit dem dazu nötigen Aufwand in entsprechendem Verhältnis steht. Auch dort, wo der schließliche Wert des Ergebnisses außer Frage steht, schon, weil es auf anderm Wege gar nicht zu erzielen ist, bildet die zu seiner Erzielung notwendige Zeit ein ernstes Hindernis. Außerdem wird die Genauigkeit der lotrechten Abmessungen des Gegenstandes vielfach dadurch ungünstig beeinflußt, daß sie aus den Differenzen großer Zahlen, nämlich der Höhenunterschiede des gesuchten Punktes gegenüber den Standpunkten hervorgehen, wodurch mindestens die Anforderungen an die Rechengenauigkeit unliebsam gesteigert werden. Allen diesen Mißständen geht das folgende Verfahren aus dem Wege, das vorläufig für solche Verhältnisse ausgearbeitet wurde, bei denen Bilder kleinen Gesichtsfeldes vorliegen, wie sie z. B. die heutzutage allein anwendbaren lichtstarken Apparate für Flugzeuge und Lenkballone zulassen. Unter Voraussetzung einen kleinen Gesichtsfeldes versagen übrigens praktisch die früheren Methoden, welche auf der gegenseitigen Orientierung zweier Bilder mittels der

[1]) S. Finsterwalder, Eine Grundaufgabe der Photogrammetrie. Abhandlungen d. K. B. Akad. d. Wiss., II. Kl., 22. Bd., 2. Abt., 1903. S. 231 Anmerkung.

[2]) Vgl. das Zitat auf der vorigsn Seite.

gegnerischen Kernpunkte beruhen, während das Rückwärtseinschneiden noch immer genügend genaue Ergebnisse zuläßt.

Wir wollen zunächst das Verfahren für den einfachen Fall auseinandersetzen, wo die drei Festpunkte in einer wagrechten Ebene liegen und die Änderungen, die für den allgemeinen Fall nötig werden, am Schlusse angeben. Das Verfahren besteht aus zwei Teilen: Erstens die Aufsuchung der Standpunkte durch Rückwärtseinschneiden, zweitens die Herstellung des Gegenstandes durch Vorwärtseinschneiden. Für beide Teile kann man mit Erfolg eine optisch-mechanische Projektionsart heranziehen, die von dem ideenreichen Verfechten der Luftphotogrammetrie Th. Scheimpflug[1]) stammt und welche ich kurz als Scheimpflugprojektion bezeichnen will. Sie beruht darauf, daß ein richtig zeichnendes Weitwinkelobjektiv jede Ebene scharf und perspektivisch richtig in eine bestimmte andere ihr konjugierte Ebene abbildet, deren Lage einfach anzugeben ist.

Es sei O die Linse mit ihren Brennpunkten B_1 und B_2 und es sei der Einfachheit halber angenommen, daß ihre beiden Hauptpunkte in O zusammenfallen. Die Brennweite sei: $OB_1 = OB_2 = f$, die Punkte A_1 und A_2 befinden sich auf der optischen Achse in doppelter Brennweite. Die Linse bildet dann die Ebene durch A_1 senkrecht zur Achse kongruent in die parallele Ebene durch A_2 und z. B. den Punkt C_1 in C_2 ab. Der in der Brennebene gelegene Punkt F_1 geht in den unendlich fern

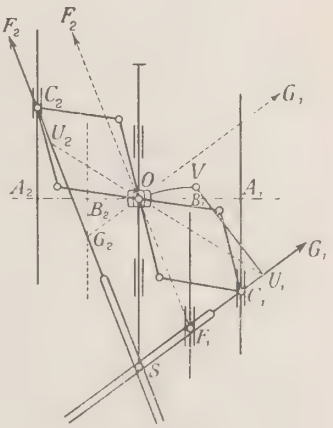


Fig. 1.[2])

[1]) Die Herstellung von Karten und Plänen auf photographischem Wege. Sitzungsber. d. K. Akad. d. Wiss. in Wien, math.-naturw. Kl., 114. Bd., Abt. IIa, 1907, S. 6.

[2]) In Fig. 1 ist der Bogen OV aus Versehen angezogen, statt punktiert.

gelegenen Punkt F_2 und die Gerade C_1F_1 in C_2F_2 parallel zu OF_1 über. C_1F_1 und C_2F_2 schneiden sich im Punkte S und es ist $SF_1 = F_1C_1$. Gleich wie die Geraden C_1F_1 und C_2F_2 in der Zeichenebene bilden sich auch die durch sie gehenden, zur Zeichenebene senkrecht stehenden Ebenen durch die Linse ineinander ab. Sie sind ein Paar konjugierter Ebenen und können leicht mechanisch mittels folgender Vorrichtungen miteinander in Verbindung gebracht werden. Man macht die Ebenen um Achsen durch C_1 bzw. C_2 senkrecht zur Zeichenebene drehbar. Diese Achsen werden parallel auf den Geraden A_1C_1 und A_2C_2 geführt und außerdem werden C_1 und C_2 durch eine symmetrische „Nürnberger Schere" mit dem Drehpunkt in O miteinander verbunden. In der Fortsetzung der Ebenen sind geschlitzte Schienen, die einen Stift S umschließen, der selbst wieder auf einer Geraden OS senkrecht zur optischen Achse der Linse geführt wird. Trägt nun die Ebene C_1F_1 ein Negativ und die Ebene F_2C_2 einen Projektionsschirm, so wird die Linse innerhalb ihres nutzbaren Bildwinkels ($60^0 - 90^0$) eine scharfe, perspektivisch richtige Projektion liefern. Das Negativ kann dabei in seiner Ebene beliebig verschoben und gedreht werden. Die Scheimpflug-Projektion gibt (natürlich mit Rücksicht auf die praktischen Grenzen) sämtliche ∞^5 der Form und Größe nach verschiedenen Perspektiven eines ebenen Objektes. Die Lage der Ebene C_1F_1 ist offenbar von zwei, jene des Negativs in der Ebene von drei Größen abhängig. Ist von dem Aufnahmeapparat die innere Orientierung, also Hauptpunkt und Bildweite der damit erzeugten Bilder bekannt, so kommen von den ∞^5 Perspektiven, die die Scheimpflug-Projektion gibt, nur ∞^3 in Betracht, da ein vorgegebenes Strahlenbündel ja nur von ∞^3 Ebenen geschnitten werden kann. Man muß also die Beweglichkeit der vorhin geschilderten Koppelung von Negativ- und Schirmebene vermindern, wenn man die Projektion auf jene Fälle einschränken will, die bei der Aufnahme mit einem bekannten Apparat allein möglich sind. Wir wollen zuerst die einfachen Zusammenhänge zwischen den Abmessungen des Projektions-

apparates und den Angaben über die Art der Bildaufnahme kennen lernen. Es werde eine Kamera von der Bildweite F aus der Höhe h unter der Neigung α gegen die wagrechte Ebene der drei Festpunkte gerichtet. Die Figur 2 bezieht sich auf die Hauptvertikalebene der Aufnahme. M sei der Aufnahmestandpunkt, A der Hauptpunkt der photographischen Platte, also MA die optische Achse der Aufnahme und zugleich die Bildweite F. Dem Punkte K entspricht die Schnittlinie der Bildebene AHK mit der Ebene der Festpunkte, dem Punkte H der Horizont der Aufnahme. Die Entfernungen KH und $KN = HM$ des Horizonts H und der Verschwindungslinie N von der Schnittlinie K drücken sich durch h und α folgendermaßen aus:

$$MN = HK = h : \cos\alpha \qquad NK = MH = F : \cos\alpha$$
$$AH = F \cdot \operatorname{tg}\alpha.$$

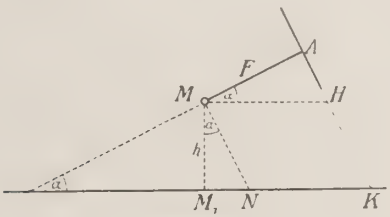


Fig. 2.

In der Scheimpflug-Projektion Fig. 1 entspricht der Punkt F_1 dem Punkte H, der Punkt G_2 dem Punkte N, und der Punkt K dem Punkte S. Damit nun die Scheimpflug-Projektion die Abbildung der Festpunktebene auf die Bildebene der photographischen Kamera wiedergibt, müssen folgende Bedingungen erfüllt sein. Der Punkt U des Diapositivs, welcher dem Hauptpunkt A der Bildebene entspricht, muß in der Symmetrieebene der Scheimpflug-Projektion (Zeichenebene von Fig. 1) liegen. Der in der Entfernung F von A befindliche Punkt M fällt in der Scheimpflug-Projektion nach V und somit nicht mit der Projektionslinse O zusammen.

Ferner muß sein:

$$OG_2 = F_1S_1 = HK = h\colon \cos\alpha$$
$$G_2S = OF_1 = NK = F\colon \cos\alpha$$
$$U_1F_1 = AH = F \cdot \operatorname{tg}\alpha.$$

Da $VF_1 = \sqrt{F^2 + (F_1U_1)^2} = F\colon \cos\alpha$ ist, so wird es gleich OF_1[1]) und der mit U_1 in der Entfernung F verbundene Punkt V muß so geführt werden, daß stets $F_1O = F_1V$ ist. Das ist auf verschiedene Weise möglich, am sichersten mit einem sogenannten Froschschenkelmechanismus (Fig. 3), welcher bewirkt, daß die Punkte OVF_1 in jeder möglichen Lage ein gleichschenkliges Dreieck bilden, wobei auch noch O und V ihre gegenseitige Lage zur Mittellinie des Systems ohne Durchgang durch einen Todpunkt des Mechanismus vertauschen können. Mittels eines derartigen Mechanismus kann ein Gleitschieber, der das um seinen Hauptpunkt U_1 in seiner Ebene drehbar gelagerte Negativ trägt, am Ende V seines zu seiner Ebene senkrechten Fortsatzes U_1V so bewegt werden, daß die Scheimpflug-Projektion nur jene ∞^3 Perspektiven ergibt, welche den möglichen Aufnahmen der Festpunktebene mittels des vorgegebenen photographischen Kamera entspricht. Wird nun das Dreieck der drei Festpunkte auf dem Projektionsschirm des Apparates verschiebbar gelagert und das Negativ innerhalb der noch vorhandenen Möglichkeiten verschoben und gedreht, bis das Bild der Festpunkte auf dem Projektionsschirm

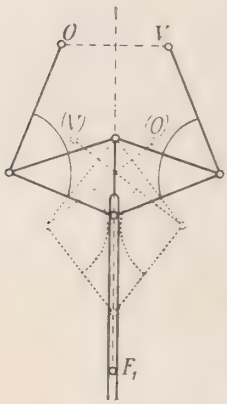


Fig. 3

[1]) Diese Gleichheit kann auch nach dem bekannten Satze der Perspektive eingesehen werden, wonach das perspektivische Zentrum sich auf einem Kreise mit der Fluchtlinie F_1 (Fig. 2) als Achse verschiebt, wenn die Gegenstandsebene (hier Projektionsschirm) um die Achse der Perspektive (S in Fig. 1, K in Fig. 2) bei feststehender Bildebene (Ebene des Negativs) gedreht wird.

mit dem Dreieck zur Deckung kommt, so hat man durch Probieren die Perspektive vermittelt, welche bei der photographischen Aufnahme das Festpunktdreieck auf die Platte abbildete. An den Teilungen der Schienen $C_1 S$ und $C_2 S$ können die Beträge:

$$C_1 S = 2\,C_1 F_1 = 2\,h : \cos\alpha \quad \text{und} \quad C_2 S = 2\,G C_2 = 2\,F : \cos\alpha$$

abgelesen und hieraus h und α berechnet werden.[1])

Macht man in der schließlichen Stellung des Apparates eine photographische Aufnahme des Projektionsbildes und sorgt man dafür, daß dabei auch der Hauptpunkt U_1 und die (in der Zeichenebene von Fig. 1 gelegene) Hauptvertikale des Negativs zur Abbildung gelangt, so kann man vom Punkte U_2 auf dem Projektionsbild der Hauptvertikalen ausgehend unschwer zum Fußpunkt des Lotes vom Standpunkt auf die Festpunktebene gelangen, der von U_2 um die Strecke: $h : \operatorname{tg}\alpha$ entfernt liegt. In ähnlicher Weise läßt sich der zweite Standpunkt gegen das Dreieck der drei Festpunkte festlegen.

Hat man auf solche Weise die Standpunkte bestimmt und die Projektionen des Geländes auf die Ebene der drei Festpunkte von beiden Standpunkten aus photographisch festgelegt, so gestaltet sich die Wiederherstellung des Geländes folgendermaßen sehr einfach. Man denkt sich die beiden Projektionen des Geländes so aufeinander gelegt, daß die Projektionen der drei Festpunkte sich decken. Wäre das Gelände eben, so müßten sich die Projektionen sämtlicher Punkte decken. Bei nicht ebenem Gelände decken sich dagegen nur die Projektionen jener Punkte, die mit den drei Festpunkten in einer Ebene gelegen sind. Für die übrigen Punkte fallen sie auseinander, liegen aber so, daß ihre Verbindungslinie $P' P''$ (Fig. 4) durch einen festen Punkt K geht, nämlich jenen, in welchen die Verbindungslinie der Standpunkte MO die Ebene der drei Festpunkte schneidet. Den Lotriß P_1 eines Punktes P auf die eben ge-

[1]) Da sich die Neigung α für kleine Werte aus $\cos\alpha$ schlecht bestimmt, kann man das Maß von $U_1 F_1 = F \operatorname{tg}\alpha$ zur Berechnung von α verwenden.

nannte Ebene erhält man, wenn man jede seiner beiden Scheimpflug-Projektionen $P'P''$ mit dem Lotriß O_1 bzw. M_1 des zugehörigen Standpunktes O bzw. M verbindet und die beiden Verbindungslinien in P_1 zum Schnitt bringt. Denkt man sich endlich über den Lotrissen $O_1 M_1$ der beiden Standpunkte diese selbst nach den vorhin ermittelten Höhen aufgetragen und dann mit den Scheimpflug-Projektionen eines Raumpunktes verbunden, so schneiden sich diese räumlichen Verbindungslinien OP' und MP'' in dem gesuchten Raumpunkte P selbst und die Höhe PP_1 des Raumpunktes über der Ebene der Festpunkte kann unmittelbar abgemessen werden.

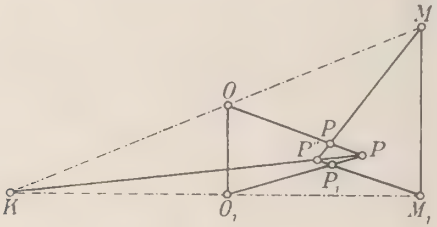


Fig. 4.

Die soeben beschriebene Konstruktion ist nur gedacht und kann in der angegebenen Form praktisch kaum ausgeführt werden, weil das Übereinanderlegen und Auseinanderhalten der beiden Scheimpflug-Projektionen nicht gut möglich ist. Ehe die einfache Abänderung, die zu einer praktischen Konstruktion führt, angegeben wird, soll der Vorgang besprochen werden, den man am besten einhält, wenn die drei Festpunkte nicht in einer wagrechten Ebene gelegen sind. Es wäre nämlich praktisch sehr umständlich, wenn man den theoretisch einfachsten Weg einschlagen würde, der offenbar darin besteht, die Wiederherstellung zuerst in Bezug auf die geneigte Ebene der Festpunkte durchzuführen und schließlich die gefundene Geländeform so zu drehen, daß die Ebene der Festpunkte die geforderte Stellung gegen die Lotrichtung einnimmt. Man verfährt vielmehr besser folgendermaßen: Man wählt eine

wagrechte Ausgangsebene, deren Höhenlage so angenommen wird, daß alle vorkommenden Geländepunkte darüber liegen. In Bezug auf diese Ausgangsebene bestimmt man dann die Lage der beiden Standpunkte M und O. Das kann auf dem Wege der darstellenden Geometrie unschwer geschehen, wenn die Lage der Standpunkte gegen das Festpunktsdreieck aus dem Einpassen der beiden Scheimpflug-Projektionen in jenes Dreieck vorher bekannt war. Nun werden die gegebenen Festpunkte von den neu gewonnenen Standpunkten auf die wagrechte Ausgangsebene projiziert und so für jeden Standpunkt ein neues wagrechtes Festpunktsdreieck gewonnen. Wenn die Höhen der Festpunkte über der Ausgangsebene klein sind gegenüber jener der Standpunkte, so werden sich das neue wagrechte und das ursprüngliche geneigte Festpunktsdreieck überhaupt nur wenig unterschieden und die geringfügigen Unterschiede können ohne merklichen Schaden statt aus der wahren Lage des betreffenden Standpunktes gegen die Ausgangsebene auch aus der nur wenig verschiedenen Lage gegen die ursprüngliche Festpunktsebene bestimmt werden. Man spart dabei die Konstruktion der Lage der Standpunkte gegen die Ausgangsebene.

Hat man nun so auf dem einen oder anderen Wege für jeden Standpunkt ein neues wagrechtes Festpunktsdreieck ermittelt, so wird eine Scheimpflug-Projektion der zugehörigen Aufnahme auf dieses Dreieck ausgeführt.

Die auf zwei verschiedene Festpunktsdreiecke ausgeführten Scheimpflug-Projektionen müßten nun für die Herstellung des Lageplanes so übereinandergelegt werden, daß die Grundrisse des ursprünglichen Festpunktsdreieckes, aus dem die neuen durch Korrektion entstanden waren, sich decken. Die weitere Konstruktion des Lageplanes und der Höhen über der gewählten Vergleichsebene geschieht auf genau demselben Wege wie vorher; es besteht nur der Unterschied, daß die Festpunkte nicht mehr die Höhe Null, sondern die gegebenen Höhen erhalten.

Wie schon früher erwähnt, ist das Aufeinanderlegen der

beiden Scheimpflug-Projektionen für die praktische Durchführung der Wiederherstellung nicht gut möglich, schon aus dem Grunde, weil man die Projektionen auf Glas als Diapositive herstellen wird. Das einfache Mittel zur Überwindung dieser Schwierigkeit ist in Fig. 5 angedeutet. Man verschiebt die beiden Scheimpflug-Projektionen $P' P''$ aus ihrer Deckstellung parallel zu sich selbst, um verschiedene Beträge $P' P'_0$ bzw. $P'' P''_0$, so daß sie nebeneinander zu liegen kommen und im durchfallenden Licht bequem beleuchtet werden können. Durch einen passenden Mechanismus sorgt man dafür, daß entsprechende Punkte P'_0 und P''_0, die durch optische Hilfsmittel (Lupe mit Fadenkreuz oder Mikroskop) einzustellen sind, wieder

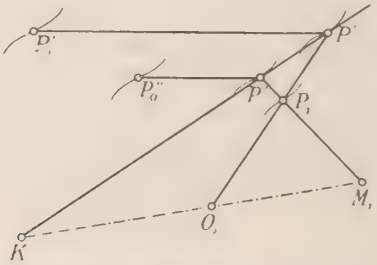


Fig. 5.

um die genannte Verschiebung nach P' und P'' zurückgebracht werden und dort als Anhaltspunkte für Konstruktion des Grundrisses durch Vorwärtseinschneiden von den vorher ermittelten Grundrissen $M_1 O_1$ der Standpunkte aus dienen. Sorgt man noch dafür, daß die beiden parallel zurückverschobenen Punkte auf einer Geraden durch den Punkt K, den Schnitt der verlängerten Standlinie MO im Raum mit der Bildebene liegen, so werden die Lupen, welche zur Punkteinstellung auf den Scheimpflug-Projektionen dienen, von selber so geführt, daß sie nur auf solche Punkte zeigen, deren Vorwärtsschnitt nicht bloß im Grundriß P_1, sondern auch im Raume P selbst eintritt und für die also die Höhe $P_1 P$ von beiderlei Standpunkten M und O aus gerechnet gleich groß ausfällt. Mittels

einer solchen Einrichtung lassen sich dann nicht bloß einzelne Punkte, sondern auch zusammengehörige Linien ohne erkennbare zusammengehörige Punkte festlegen. Man braucht nur die eine Lupe P_0' auf dem ersten Bild l' der Linie entlang laufen lassen, während die andere P_0'' mit der ihr noch verbleibenden Beweglichkeit auf dem zweiten Bilde der Linie l'' gehalten wird. Durch den Zwang, der $P'P''$ stets durch K führt, kommen dabei P_0' und P_0'' stets auf zusammengehörige Stellen der Bilder l' und l''.

Zum Schlusse möge noch kurz die Reihenfolge der Verkehrungen aufgezählt werden, die bei der Wiederherstellung des Gegenstandes aus zwei seiner Bilder nach der angegebenen Weise zu treffen sind, wobei ich mich auf den Fall beschränke, daß die Höhenunterschiede des Gegenstandes klein gegenüber den Höhen der Standpunkte sind.

1. Genähertes Einpassen jedes der beiden Negative auf das Grundrißdreieck $A_1 B_1 C_1$ der 3 Festpunkte ABC und Berechnung der genäherten Lage der Standpunkte M und O aus den Ablesungen der Teilungen des Projektionsapparates.

2. Wahl einer genügend tief gelegenen Ausgangsebene und Aufsuchung der beiden von den genäherten Standpunkten O und M auf diese Ausgangsebene projizierten Dreiecke $A'B'C'$ und $A''B''C''$.

3. Herstellung der Scheimpflug-Projektionen der beiden Negative auf die beiden Dreiecke $A'B'C'$, $A''B''C''$ und Berechnung der endgiltigen Lage der Standpunkte gegenüber der Ausgangsebene aus den Teilungen des Projektionsapparates.

4. Eintragung des Grundrißdreieckes $A_1 B_1 C_1$ in jede der beiden Scheimpflug-Projektionen.

5. Einlegen der beiden Scheimpflug-Projektionen in den Auftragapparat, wobei die beiden Grundrißdreiecke $A_1 B_1 C_1$ parallel in der Verschiebungsrichtung $P'P_0'$ des Apparates zu liegen kommen.

6. Einstellung des Auftragapparates auf die Punktepaare $A_0' A_0''$, $B_0' B_0''$, $C_0' C_0''$ und Auftrag der parallel verschobenen

Punkte auf die Zeichenebene, daran anschließend Eintragung der Grundrisse der Standpunkte $O_1 M_1$ und Einstellung ihrer räumlichen Lagen OM sowie des Punktes K auf $O_1 M$.

Nunmehr kann die punkt- und linienweise Wiederherstellung des Gegenstandes beginnen. Über die technischen Einzelheiten des Projektions- und Auftragapparates, sowie über die Aushilfen, welche bei Unzugänglichkeit des Punktes K getroffen werden können, endlich über die erreichbare Genauigkeit soll bei anderer Gelegenheit berichtet werden.

Zum Schlusse sei noch darauf aufmerksam gemacht, daß die Anwendung des Verfahrens nicht darauf beschränkt ist, daß für die Festlegung eines jeden der beiden Standpunkte dasselbe Festpunktsdreieck benützt werden kann. Es ist dann nur notwendig, die gegenseitige Lage der verwendeten Festpunktsdreiecke zu kennen. Ferner läßt sich durch eine unbedeutende Erweiterung des Auftragsapparates die Verwendung von drei und mehr Aufnahmen zur Vervollständigung und Prüfung der Wiederherstellung eines Gegenstandes, der von zwei Punkten aus nicht voll eingesehen werden kann, in die Wege leiten.

Zur Theorie der Wirbelschichten.

Von **Max Lagally.**

Vorgelegt von S. Finsterwalder in der Sitzung am 6. März 1915.

Einleitung.

Die Theorie der Wirbelschichten hat Helmholtz in seiner berühmten Abhandlung[1]) „Über Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche den Wirbelbewegungen entsprechen", in die mathematische Physik eingeführt: in einer zweiten Abhandlung „Über diskontinuierliche Flüssigkeitsbewegungen"[2]) macht er auf die Bedeutung der Wirbelschichten für die Strahlbildung in Flüssigkeiten aufmerksam. Das dort gegebene erste Beispiel einer Strahlbildung läßt aber die Wirbelschicht analytisch nicht in Erscheinung treten, ebensowenig wie die später von Kirchhoff[3]) ausgebildete Methode der konformen Abbildung zur Bestimmung der Strahlgrenzen. Beide Autoren betrachten eine Stromlinie, längs der die Strömung konstante Geschwindigkeit und konstanten Druck hat, als mögliche freie Grenze einer stationären Strömung und schließen auf der anderen Seite dieser Stromlinie ruhende Flüssigkeit nicht-analytisch an.

Jede in einer Flüssigkeit vorhandene Wirbelschicht bringt in der übrigen Flüssigkeit ein Geschwindigkeitspotential und

[1]) Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 55, 1858, S. 25—55.

[2]) Monatsberichte der K. Akademie der Wissenschaften, Berlin 1868, S. 215—228.

[3]) Mechanik, 22. Vorlesung.

damit Bewegung hervor, kann also als Ursache der ganzen Strömung betrachtet werden. Diese Darstellung ist als Gegenstück zu der quellenmäßigen Darstellung einer Flüssigkeitsbewegung aufzufassen.[1]) Von der Bewegung ist die Wirbelschicht selbst nicht ausgeschlossen: während die Normalkomponente der Geschwindigkeit an der Wirbelschicht keine Unterbrechung der Stetigkeit erleidet, ist das für die Tangentialkomponente der Fall. Die Tangentialkomponente der Geschwindigkeit der Wirbelschicht selbst ist dem arithmetischen Mittel der Tangentialkomponenten auf beiden Seiten gleich.[2]) Soll die Wirbelschicht stationär sein und als Grenze eines Flüssigkeitsstrahles dienen können, so muß ihre Geschwindigkeit an allen Stellen die gleiche und folglich auch ihre Wirbeldichte konstant sein.

Der Grund, warum weder Helmholtz noch Kirchhoff die Wirbelschichten, die sie doch sachlich zur Erklärung der Strahlbildung verwenden, auch analytisch zu ihrer Darstellung heranziehen, liegt wohl in der Umständlichkeit der analytischen Ausdrücke. Im folgenden ist der Versuch nur für die allereinfachsten Formen einer Wirbelschicht, nämlich für geradlinige und kreisförmige[3]) ebene Wirbelschichten durchgeführt.

Trotz der geometrischen Einfachheit dieser Strömungen sind die Ergebnisse nicht uninteressant. Zunächst gelingt es für einige diskontinuierliche Strömungen, die man bisher in jedem Teilgebiet durch eine andere Funktion darstellen mußte, deren Geltungsbereich man willkürlich begrenzte, analytische Ausdrücke zu finden, die in sämtlichen Teilgebieten gelten. Erwähnt sei die Bildung eines unendlich langen Strahles in einer unbegrenzten ruhenden Flüssigkeit, der geradlinig begrenzt ist, und eines ruhenden Streifens in bewegter Flüssig-

[1]) Lamb, Hydrodynamik, S. 71 u. f., S. 252 u. f. Ein Beispiel, die Bewegung einer Kugel in einer Flüssigkeit, ist S. 254 wirbelmäßig dargestellt.

[2]) Helmholtz, Über Integrale usw., S. 44.

[3]) Geschlossene Strahlformen hat W. Wien dargestellt. Lehrbuch der Hydrodynamik, S. 115 u. f.

keit, der als Idealform des toten Wassers aufzufassen ist. Ferner die Strömung im Inneren oder Äußeren eines festen Kreises, sowie in einem ringförmigen Kanal. Da bei diesen Strömungen das Vorhandensein einer Wirbelschicht die treibende Ursache ist, liegt es nahe, einen Zusammenhang mit der Prandtlschen Grenzschicht[1]) zu suchen. Dadurch wird die Frage gestreift, bis zu welchem Grad der Annäherung die Vorgänge in reibenden Flüssigkeiten durch die Hydrodynamik einer idealen Flüssigkeit dargestellt werden können. Die Annahme, daß in der Grenzschicht durch Reibung an der Wand Wirbel entstehen können, führt zu einer mathematischen Unstimmigkeit. Man muß umgekehrt annehmen, daß eine an der Wand vorhandene Wirbelschicht die Ursache der Reibung ist, welche nicht vernachlässigt werden darf, wenn man mit den physikalischen Tatsachen im Einklang bleiben will. Diese Reibung bewirkt einerseits eine Verringerung der Wirbelstärke und damit eine Verlangsamung der Potentialbewegung, anderseits verursacht sie in bekannter Weise die Ablösung der Prandtlschen Wirbelschicht vom Körper. Es entsteht nun die Frage, wie sich in einer idealen Flüssigkeit Wirbelschichten bilden können, was infolge des Lagrangeschen Satzes über die Konstanz der Wirbelstärke jedes Flüssigkeitsteilchens nicht möglich zu sein scheint. Eine Lücke im Beweis dieses Satzes läßt die Möglichkeit der gleichzeitigen Entstehung zweier Wirbelschichten, die von demselben Punkt ausgehen, erkennen.

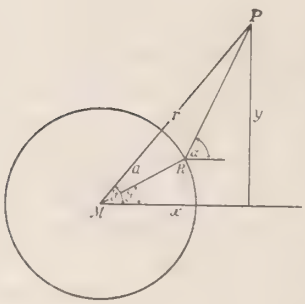
Weiter ist der Einfluß einer Störung, die eine periodische Funktion des Ortes ist, auf eine geradlinige Wirbelschicht untersucht. Es ergibt sich, daß die Folge eine zunehmende Verdichtung der wirbelnden Teilchen an einzelnen Punkten ist, die als Anfang der Bildung einzelner spiralig aufgerollter Wirbel aufzufassen ist. Man kommt so zu Wirbelreihen, welche mit den von v. Kármán[2]) untersuchten geometrisch, aber nicht

[1]) L. Prandtl, Über Flüssigkeitsbewegungen bei sehr kleiner Reibung. Verh. des III. Internat. Math. Kongresses in Heidelberg 1904, S. 484 u. f.

[2]) Th. v. Kármán, Über den Mechanismus des Widerstandes, den ein bewegter Körper in einer Flüssigkeit erfährt. Nachr. der Ges. der

der Entstehung nach übereinstimmen. Sie bilden sich gleichzeitig und ohne jeden Einfluß der Reibung, während die Kármánschen Wirbel nacheinander, durch Aufrollen je eines Stückes der Prandtlschen Wirbelschicht entstehen. Doch ist auch in diesem häufigeren Fall die Reibung nach der Ablösung der Wirbelschicht ohne weiteren Einfluß, und in gewissen Fällen, deren einer von F. Klein[1]) angegeben wurde, kann sich auch diese Ablösung ohne Reibung vollziehen. Dagegen scheint zu ihrer Ablösung eine periodische Schwingung des Hindernisses notwendig zu sein.

Eine kreisförmige Wirbelschicht.



Es seien ∞ viele Wirbel[2]) gleichmäßig auf dem Umfang eines Kreises vom Radius a verteilt. Die auf das Bogenelement $a\,d\vartheta$ entfallende Wirbelstärke sei $\lambda a\,d\vartheta$, wo λ die Wirbelstärke bedeutet, die auf die Bogenlänge „Eins" trifft und einen endlichen Wert haben soll.

Diese Wirbelschicht bringt in einem Punkt $P(x, y)$ ein Geschwindigkeitspotential

$$1) \qquad \varphi = \lambda a \int_0^{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{y - a\sin\vartheta}{x - a\cos\vartheta}\, d\vartheta = \lambda a \cdot J$$

hervor, dessen Wert in den 3 Fällen, daß P auf dem Kreis-

Wissenschaften zu Göttingen 1911, S. 509 u. f. — Th. v. Kármán und H. Rubach, Über den Mechanismus des Flüssigkeits- und Luftwiderstandes. Physikalische Zeitschrift 1912, S. 49.

[1]) F. Klein, Über die Bildung von Wirbeln in reibungslosen Flüssigkeiten. Zeitschr. für Mathematik und Physik 1910, Bd. 58, S. 259–262.

[2]) Die Bewegung einer endlichen Anzahl von Wirbeln in gleichmäßiger Verteilung auf einem Kreis hat J. J. Thomson, A Treat. on the motion of vortex rings, London 1883, untersucht.

umfang, außerhalb und innerhalb des Kreises liegt, untersucht werden soll. Führt man für P Polarkoordinaten r, ϑ_0 (in der Figur versehentlich ϑ statt ϑ_0) ein, so handelt es sich um die Auswertung des Integrals

$$J = \int_0^{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{r \sin \vartheta_0 - a \sin \vartheta}{r \cos \vartheta_0 - a \cos \vartheta} \, d\vartheta.$$

1. Wenn $r = a$ ist, wird

$$J = \int_0^{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{\sin \vartheta_0 - \sin \vartheta}{\cos \vartheta_0 - \cos \vartheta} \, d\vartheta = \int_0^{2\pi} \operatorname{arctg} \left(- \operatorname{cotg} \frac{\vartheta_0 + \vartheta}{2} \right) d\vartheta$$

$$J = - \int_0^{2\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\vartheta_0 + \vartheta}{2} \right) d\vartheta = \left[- \frac{\pi + \vartheta_0}{2} \vartheta + \frac{\vartheta^2}{4} \right]_0^{2\pi} = \pi \vartheta_0.$$

Das Geschwindigkeitspotential nimmt auf dem Kreis den Wert

$$2) \qquad \varphi = \lambda a \pi \vartheta_0 = \lambda a \pi \cdot \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$$

an. Würde man im Mittelpunkt des Kreises einen einzelnen Wirbel von der Wirbelstärke $\mu = \lambda a \pi$ anbringen, so brächte er ein Geschwindigkeitspotential hervor, das auf dem Kreis vom Radius a mit dem eben berechneten Wert übereinstimmt.

Die kreisförmige Wirbelschicht bewegt sich also in sich selbst mit konstanter Geschwindigkeit $\lambda \pi$, die nur von der Wirbeldichte λ, nicht aber vom Radius des Kreises abhängt.

2. Wenn $r > a$ ist, wird

$$\operatorname{arctg} \frac{r \sin \vartheta_0 - a \sin \vartheta}{r \cos \vartheta_0 - a \cos \vartheta} = a$$

zum Ausgangswert zurückkehren, wenn R den Kreis durchläuft, also ϑ um 2π wächst. Nun soll als untere Grenze der Integration der Polarwinkel $\vartheta_0 - \pi$ eingeführt werden; dann wird

$$J = \int_{\vartheta_0 - \pi}^{\vartheta_0 + \pi} \operatorname{arctg} \frac{r \sin \vartheta_0 - a \sin \vartheta}{r \cos \vartheta_0 - a \cos \vartheta} \, d\vartheta.$$

Dieses Integral wird in zwei Teile zerlegt

$$J = \int_{\vartheta_0-\pi}^{\vartheta_0+\pi} = \int_{\vartheta_0-\pi}^{\vartheta_0} + \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_0+\pi}$$

und im 1. Teil $\beta = \vartheta_0 - \vartheta$, im 2. Teil $\beta = \vartheta - \vartheta_0$ als Integrationsvariable eingeführt; dabei sollen immer Punkte, die zu MP symmetrisch liegen, gleichzeitig betrachtet werden.

Dann wird

$$(3)\qquad \begin{aligned} J = &-\int_{\beta=\pi}^{\beta=0} \operatorname{arctg} \frac{r\sin\vartheta_0 - a\sin(\vartheta_0-\beta)}{r\cos\vartheta_0 - a\cos(\vartheta_0-\beta)}\, d\beta \\ &+ \int_{\beta=0}^{\beta=\pi} \operatorname{arctg} \frac{r\sin\vartheta_0 - a\sin(\vartheta_0+\beta)}{r\cos\vartheta_0 - a\cos(\vartheta_0+\beta)}\, d\beta. \end{aligned}$$

Aus der Anschauung oder durch Rechnung erkennt man, daß

$$(4)\qquad \begin{aligned} &\operatorname{arctg} \frac{r\sin\vartheta_0 - a\sin(\vartheta_0-\beta)}{r\cos\vartheta_0 - a\cos(\vartheta_0-\beta)} \\ &+ \operatorname{arctg} \frac{r\sin\vartheta_0 - a\sin(\vartheta_0+\beta)}{r\cos\vartheta_0 - a\cos(\vartheta_0+\beta)} = 2\vartheta_0 \end{aligned}$$

ist; also wird

$$J = \int_{\beta=0}^{\beta=\pi} 2\vartheta_0\, d\beta = 2\pi\vartheta_0$$

folglich das Potential

$$5)\qquad \varphi = 2\lambda a\pi\vartheta_0 = 2\lambda a\pi \operatorname{arctg}\frac{y}{x}.$$

Außerhalb des Kreises ist also die Strömung dieselbe, wie sie ein einzelner Wirbel im Mittelpunkt des Kreises, in dem die ganze Wirbelstärke $2\lambda a\pi$ vom Umfang des Kreises vereinigt wäre, hervorbringen würde.

3. Wenn $r < a$ ist, wächst

$$\operatorname{arctg} \frac{r\sin\vartheta_0 - a\sin\vartheta}{r\cos\vartheta_0 - a\cos\vartheta}$$

um 2π, wenn ϑ um 2π wächst.

Die Gleichung (3)

$$J = \int_{\beta=0}^{\beta=\pi} \left[\operatorname{arctg} \frac{r \sin \vartheta_0 - a \sin(\vartheta_0 - \beta)}{r \cos \vartheta_0 - a \cos(\vartheta_0 - \beta)} + \operatorname{arctg} \frac{r \sin \vartheta_0 - a \sin(\vartheta_0 + \beta)}{r \cos \vartheta_0 - a \cos(\vartheta_0 + \beta)} \right] d\beta$$

bleibt zwar erhalten; aber die Summe der beiden arctg hat den Wert $2\vartheta_0$ wie in (4), nur so lange $0 < \beta < \vartheta_0$ ist; für größere Werte von β, für welche $\vartheta_0 < \beta < \pi$ ist, hat sie den Wert $2\vartheta_0 + 2\pi$. Also wird

$$J = \int_{\beta=0}^{\beta=\vartheta_0} 2\vartheta_0 \, d\beta + \int_{\beta=\vartheta_0}^{\beta=\pi} (2\vartheta_0 + 2\pi) \, d\beta = 2\pi^2.$$

Das Potential nimmt den konstanten Wert

6) $$\varphi = 2\lambda a \pi^2$$

an; daraus folgt, daß die Flüssigkeit im Innern des von der Wirbelschicht gebildeten Kreises in Ruhe bleibt.

Gleichung (1) kann also als Potential der Zirkulation um ein kreisförmiges Hindernis aufgefaßt werden; und zwar stellt sie als Ursache der Bewegung die Wirbelschicht hin, die am Rand des Hindernisses auftritt. Daß die Zirkulationsgeschwindigkeit, die unmittelbar außerhalb der Wirbelschicht den Wert $2\lambda\pi$ hat, an der Wirbelschicht selbst sprungweise auf die Hälfte sinkt, steht in Übereinstimmung mit der Helmholtzschen Theorie.[1]) Die wirbelnden Flüssigkeitselemente verhalten sich wie kleine Räder, die auf dem festen Kreis rollen und auf denen die wirbelfreie Flüssigkeit mitgeführt wird.[2])

In ähnlicher Weise läßt sich die Bewegung im Innern eines Kreises darstellen. Setzt man

[1]) Helmholtz, Über Integrale usw., S. 43, 44.

[2]) Dieser Vergleich findet sich auch bei Lanchester, Aerodynamik, Bd. I, S. 118 im Anschluß an W. Thomson, ist dort aber mehr durch Anschauung als durch die mathematische Untersuchung begründet.

$$7) \qquad \varphi = 2\lambda a \pi \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - \lambda a \int_0^{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{y - a\sin\vartheta}{x - a\cos\vartheta}\, d\vartheta,$$

so hat man im Mittelpunkt des Kreises einen Wirbel von der Stärke $2\lambda a\pi$; die gleiche Wirbelstärke ist, mit entgegengesetzter Drehrichtung, auf der Peripherie des Kreises vom Radius a verteilt. Im Innern des Kreises herrscht nur die Bewegung, die der Wirbel im Mittelpunkt hervorbringt; außerhalb ist die Flüssigkeit in Ruhe. Die Wirbelschicht selbst bewegt sich mit der halben Geschwindigkeit wie die Flüssigkeit an ihrem inneren Rand.

Verteilt man auf zwei konzentrischen Kreisen von den Radien a_1 und a_2 gleiche Wirbelstärken von entgegengesetzter Drehrichtung, so erhält man die Bewegung in einer Ringfläche. Es sei

$$2a_1\pi\lambda_1 = -2a_2\pi\lambda_2 = M,$$

$$\lambda_1 a_1 = -\lambda_2 a_2 = \frac{M}{2\pi},$$

so nimmt das Potential

$$7') \qquad \varphi = \frac{M}{2\pi}\left[\int_0^{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{y - a_1\sin\vartheta}{x - a_1\cos\vartheta}\, d\vartheta - \int_0^{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{y - a_2\sin\vartheta}{x - a_2\cos\vartheta}\, d\vartheta\right]$$

folgende Werte an:

$$\varphi = \begin{cases} -M\operatorname{arctg}\frac{y}{x} + M\operatorname{arctg}\frac{y}{x} = 0 & \text{im Außenraum} \\ -\frac{M}{2}\operatorname{arctg}\frac{y}{x} + M\operatorname{arctg}\frac{y}{x} = +\frac{M}{2}\operatorname{arctg}\frac{y}{x} & \text{auf dem äußeren Kreis} \\ -M\pi + M\operatorname{arctg}\frac{y}{x} & \text{im Ring} \\ -M\pi + \frac{M}{2}\operatorname{arctg}\frac{y}{x} & \text{auf dem inneren Kreis} \\ -M\pi + M\pi = 0 & \text{im Innenraum,} \end{cases}$$

wenn $a_2 > a_1$ vorausgesetzt ist. Die Geschwindigkeit ist im

Ring dieselbe, die ein Wirbel M im Mittelpunkte hervorbringen würde; an den Grenzen sinkt sie sprungweise auf die Hälfte; im Innen- und Außenraum ist sie Null.

Die Grenzen des so erhaltenen ringförmigen Strahles sind labil wie alle Wirbelschichten; man kann, um eine stabile Bewegung zu erhalten, sich eine Strömung in einem ringförmigen Kanal vorstellen. Veranlassung der Bewegung bilden nach der hier entwickelten Theorie die wirbelnden Flüssigkeitselemente, die auf den Wänden des Kanals rollen. Um die Kluft zu überbrücken, die zwischen den mathematischen Eigenschaften einer idealen Flüssigkeit und den physikalischen Eigenschaften einer reibenden zähen Flüssigkeit besteht, stellt man sich häufig vor, daß letztere nahezu reibungslos in ihrem Innern angenommen werden darf, während ihre Reibung an den Wänden nicht vernachlässigt werden darf; sie soll zur Bildung einer Wirbelschicht Veranlassung geben, während sich Wirbel in einer idealen Flüssigkeit nicht bilden können. Die jetzt naheliegende Vermutung, daß sich die Wirbelstärke der Randschicht mit der Zeit infolge der Reibung vermehrt, würde aber zu einem Widerspruch mit unserer Theorie führen, welche dann auch eine rascher werdende Zirkulation der Flüssigkeit in dem Kanal ergeben würde. Wir müssen uns also das allmähliche Erlöschen der Flüssigkeitsbewegung durch Reibung so vorstellen, daß die wirbelnden Teilchen der Randschicht durch Reibung aneinander oder durch rollende Reibung an der Wand lebendige Kraft verlieren, und daß mit ihrer Wirbelstärke auch die Geschwindigkeit der Strömung abnimmt. Also die Reibung an der Wand veranlaßt nicht die Bildung der wirbelnden Randschicht — diese ist auch bei nicht reibender Flüssigkeit vorhanden — sondern sie vernichtet die Wirbelbewegung an der Wand und damit die ganze Strömung.

Das häufig vorkommende Entstehen von Wirbeln im Innern einer reibungslosen Flüssigkeit wäre dann damit zu erklären, daß sich die randliche Wirbelschicht infolge der durch Reibung auftretenden Spannungszustände an einzelnen Stellen von der

Wand ablöst[1]) und dann durch spiraliges Aufrollen in einzelne Wirbel zerfällt.

Jetzt ergibt sich aber als neue Schwierigkeit die Frage, wie eine Wirbelschicht in einer reibungslosen Flüssigkeit entstehen kann. F. Klein[2]) hat darauf aufmerksam gemacht, daß die Beweise für die Unmöglichkeit des Entstehens oder Vergehens von Wirbeln in einer idealen Flüssigkeit gewisse Stetigkeitsbedingungen stillschweigend voraussetzen; für die tatsächliche Möglichkeit der Wirbelbildung gibt er folgendes Beispiel. Ein Ruder, das in eine ideale Flüssigkeit eingetaucht und in ihr bewegt wird, veranlaßt eine Potentialströmung, deren Geschwindigkeit längs des Ruderblattes auf beiden Seiten verschiedene Richtung hat. Man könnte also, um einen analytischen Ausdruck für diese übrigens einfache und wohlbekannte Strömung zu finden, an Stelle des Ruderblattes eine Wirbelschicht annehmen. Daß diese Wirbelschicht nicht nur analytisch, sondern tatsächlich existiert, zeigt sich beim Herausnehmen des Ruders: Die Wirbelschicht rollt sich zu zwei endlichen Wirbeln spiralig auf.

Wenn eine Strömung ein Hindernis umfließt, so gibt es eine Stromlinie, die auf das Hindernis aufstößt, sich dort teilt und das Hindernis beiderseits umschließt; zu einer Wiedervereinigung, die in einer idealen Flüssigkeit stattfinden würde, kommt es im allgemeinen tatsächlich nicht, weil sich infolge der Reibung zwei Prandtlsche Wirbelschichten von dem Hindernis ablösen. Daß die Wirbelschichten auch in idealen Flüssigkeiten existieren, zeigt die Möglichkeit, die Strömung als Folge des Geschwindigkeitspotentials einer auf dem Rand des Hindernisses befindlichen Wirbelschicht darzustellen. Man kommt so zu der Vorstellung, die analytisch noch näher zu begründen wäre, daß jedes Flüssigkeitselement der erwähnten Stromlinie, das auf das Hindernis aufstößt, dort in zwei wirbelnde Teile

[1]) L. Prandtl, Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung. Verhandlungen des III. Internat. Mathem. Kongresses in Heidelberg 1904, S. 484 u. f.

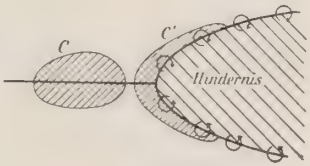
[2]) F. Klein, vgl. Anmerkung (1), S. 82.

von gleicher, der Richtung nach entgegengesetzter Wirbelstärke zerfällt.

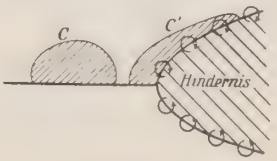
Von den Beweisen des Lagrangeschen Satzes, wonach die Wirbelstärke eines Elementes einer idealen Flüssigkeit mit der Zeit unveränderlich ist, ist der Kelvinsche[1]) wohl der schärfste. Er geht von der Tatsache aus, daß die Zirkulation

$$\int [u\,dx + v\,dy + w\,dz]$$

längs jeder geschlossenen Kurve C, die sich mit der Flüssigkeit bewegt und dabei in eine Kurve C' übergeht, mit der Zeit unveränderlich ist. Da diese Zirkulation anderseits das Maß für die algebraische Summe aller in der Kurve eingeschlossenen Wirbel ist, folgt daraus der Lagrangesche Satz. Doch scheint die Möglichkeit übersehen worden zu sein, daß zwei gleich starke, der Richtung nach entgegengesetzte Wirbel in dem gleichen Punkte entstehen, so daß es nicht möglich ist, vor ihrer Bildung eine geschlossene Kurve zu ziehen, welche nachher nur den einen der beiden Wirbel umfaßt. Die Entstehung unserer Wirbelschichten ist also durchaus möglich, obwohl sie einen Durchbruch des Lagrangeschen Satzes darstellt.



Schwierigkeiten entstehen, wenn man nach der Bildung der Wirbelschichten eine geschlossene Kurve C' zieht, welche nur Teile der einen Wirbelschicht enthalten soll, und die Formänderung derselben rückwärts verfolgt. Man erhält dann eine Kurve C, welche in ihrer Begrenzung einen Teil der ursprünglichen Stromlinie enthält. Soll auch jetzt die



[1]) W. Thomson, On Vortex Motion, Edinb. Trans. 25, 1869. Vgl. Lamb, Hydrodynamik, S. 43 und 240.

Zirkulation mit der Zeit unveränderlich sein, so muß man die Stromlinie als doppelte Wirbelschicht auffassen, schon bevor sie in 2 Wirbelschichten zerfällt, und die Wirbel der einen Drehrichtung in C einschließen. Die Vereinigung zweier Wirbelschichten in einer idealen Flüssigkeit zu einer Stromlinie wird nur ausnahmsweise möglich sein, insbesondere dann, wenn sie durch Trennung aus einer Stromlinie entstanden sind.

Zusammenfassend kommen wir also zu folgenden Vorstellungen: Wenn eine Stromlinie an einem Hindernis endet, entstehen zwei Helmholtzsche Wirbelschichten. Beim Umfließen des Hindernisses ist die Reibung der Wirbelteilchen nicht zu vernachlässigen; sie bringt Spannungen hervor, welche die Loslösung der Wirbelschicht als Prandtlsche Wirbelschicht zur Folge hat. Durch Aufrollen der in die Flüssigkeit ausgetretenen Wirbelschicht entstehen spiralige Wirbel; diese können sich unter Umständen auch ganz ohne Mitwirkung der Reibung bilden, wenn man das Hindernis entfernt.

Eine geradlinige Wirbelschicht.

Die von einer geradlinigen Wirbelschicht hervorgerufene Bewegung könnte man vielleicht aus dem vorigen durch Grenzübergang erhalten; hier soll jedoch die Untersuchung direkt geführt werden.

Die x Achse sei die Wirbelschicht: das Potential, das sie hervorruft, ist

$$8) \qquad \varphi = \lambda \int_{a=-\infty}^{a=+\infty} \operatorname{arctg} \frac{y}{x-a}\, da.$$

Durch Anwendung partieller Integration findet man

$$\varphi = -\lambda y \left[\frac{x-a}{y} \operatorname{arctg} \frac{y}{x-a} + \tfrac{1}{2} \lg \frac{(x-a)^2+y^2}{y^2} \right]_{a=-\infty}^{a=+\infty}$$

Wir berechnen φ zunächst zwischen endlichen Grenzen $-c$ und c und lassen c hierauf ins Unendliche wachsen:

$$\varphi = -\lambda y \lim_{c=\infty} \left[\frac{x-c}{y} \operatorname{arctg} \frac{y}{x-c} + \tfrac{1}{2} \lg \frac{(x-c)^2+y^2}{y^2} - \frac{x+c}{y} \operatorname{arctg} \frac{y}{x+c} - \tfrac{1}{2} \lg \frac{(x+c)^2+y^2}{y^2} \right]$$

$$= -\lambda y \lim_{c=\infty} \left[\frac{x}{y} \left(\operatorname{arctg} \frac{y}{x-c} - \operatorname{arctg} \frac{y}{x+c} \right) - \frac{c}{y} \left(\operatorname{arctg} \frac{y}{x-c} + \operatorname{arctg} \frac{y}{x+c} \right) + \tfrac{1}{2} \lg \frac{(x-c)^2+y^2}{(x+c)^2+y^2} \right].$$

Von den 3 hier auftretenden Grenzwerten ist der letzte Null

$$\lim_{c=\infty} \lg \frac{(x-c)^2+y^2}{(x+c)^2+y^2} = 0,$$

also

$$\varphi = -\lambda x \lim_{c=\infty} \left(\operatorname{arctg} \frac{y}{x-c} - \operatorname{arctg} \frac{y}{x+c} \right) + \lambda \lim_{c=\infty} c \left(\operatorname{arctg} \frac{y}{x-c} + \operatorname{arctg} \frac{y}{x+c} \right).$$

Der zweite Grenzwert

$$\lim_{c=\infty} c \left(\operatorname{arctg} \frac{y}{x-c} + \operatorname{arctg} \frac{y}{x+c} \right)$$

nimmt die Form $\infty \cdot 0$ an; er ändert sich um eine Konstante $c\pi$, die an der Grenze ∞ wird, aber auf die Geschwindigkeit ohne Einfluß bleibt, wenn man statt des Hauptwertes des arctg einen anderen Wert nimmt. $\operatorname{arctg} \frac{y}{x \pm c}$ ist an der Stelle $\frac{y}{x \pm c} = 0$; $c = \infty$ in eine Reihe entwickelbar:

$$\lim_{c=\infty} c \left(\operatorname{arctg} \frac{y}{x-c} + \operatorname{arctg} \frac{y}{x+c} \right)$$

$$= \lim_{c=\infty} c \left(\frac{y}{x-c} + \frac{y}{x+c} + \text{Glieder höherer Ordnung} \right) = 0.$$

Somit ergibt sich

$$\varphi = -\lambda x \lim_{c=\infty} \left(\operatorname{arctg} \frac{y}{x-c} - \operatorname{arctg} \frac{y}{x+c} \right).$$

Wenn y positiv ist und der variable Punkt A die x Achse von $+\infty$ bis $-\infty$ durchläuft, nimmt $\operatorname{arctg} \frac{y}{x-a}$ um π von 0 bis $-\pi$ ab. Ist y negativ, so nimmt $\operatorname{arctg} \frac{y}{x-a}$ um π von 0 bis $+\pi$ zu. Liegt P auf der x Achse selbst, so ist $\operatorname{arctg} \frac{y}{x-a}$ stets Null.

Man hat also 3 Fälle zu unterscheiden

1. $y > 0$ $\quad \varphi = -\lambda \pi x$
2. $y = 0$ $\quad \varphi = 0$
3. $y < 0$ $\quad \varphi = \lambda \pi x.$

Die Flüssigkeit strömt beiderseits mit konstanter Geschwindigkeit der x Achse parallel, aber in entgegengesetzten Richtungen; auf der x Achse ist die Geschwindigkeit Null. Die Geschwindigkeit u ist in den 3 betrachteten Fällen

1. $y > 0$ $\quad u = -\lambda \pi$
2. $y = 0$ $\quad u = 0$
3. $y < 0$ $\quad u = \lambda \pi.$

Die Geschwindigkeitsänderung beim Übergang über die Wirbelschicht beträgt $2\lambda\pi$ und hängt von der Wirbeldichte λ ab; sie hat denselben Wert wie bei einer kreisförmigen Wirbelschicht von beliebigem Radius, bei der, wie bemerkt, die Krümmung ohne Einfluß ist.

Durch Überlagerung einer gleichmäßigen Geschwindigkeit in Richtung der x Achse kann man die Bewegung in der einen Halbebene aufheben.

9) $$\varphi = \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{arctg} \frac{y}{x-a} \, da - \lambda \pi x$$

gibt eine Strömung in der positiven Halbebene, die man als Strömung längs einer Wand auffassen kann, und zwar

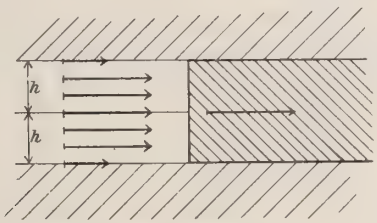
1.	$y > 0$	$\varphi = -2\lambda\pi x$	$u = -2\lambda\pi$
2.	$y = 0$	$\varphi = -\lambda\pi x$	$u = -\lambda\pi$
3.	$y < 0$	$\varphi = 0$	$u = 0.$

Nimmt man 2 Wirbelschichten von gleicher Wirbeldichte, aber entgegengesetzter Drehrichtung, parallel zur x Achse in gleichem Abstand $\pm h$, so erhält man ein Geschwindigkeitspotential

$$9') \qquad \varphi = \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{arctg} \frac{y-h}{x-a}\, da - \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{arctg} \frac{y+h}{x-a}\, da,$$

das in den verschiedenen Teilen der Ebene die in folgender Übersicht, die auch die Geschwindigkeiten enthält, angegebenen Werte besitzt:

1.	$y > h$	$\varphi = -\lambda\pi x + \lambda\pi x = 0$	$u = 0$
2.	$y = h$	$\varphi = 0 + \lambda\pi x = \lambda\pi x$	$u = \lambda\pi$
3.	$-h < y < h$	$\varphi = \lambda\pi x + \lambda\pi x = 2\lambda\pi x$	$u = 2\lambda\pi$
4.	$y = -h$	$\varphi = \lambda\pi x + 0 = \lambda\pi x$	$u = \lambda\pi$
5.	$y < -h$	$\varphi = \lambda\pi x - \lambda\pi x = 0$	$u = 0.$



Geschwindigkeitsverteilung.

Die Bewegung stellt einen geradlinigen Strahl in einer unbegrenzten Flüssigkeit dar, und zwar stellt der analytische Ausdruck wieder die am Rand des Strahles auftretenden Wirbel als Ursache der Bewegung hin. Einen solchen Strahl kann man sich dadurch ent-

standen denken, daß man einen sehr langen, von parallelen Wänden begrenzten Körper in der Flüssigkeit bewegt. Er stellt eine Idealform des Kielwassers dar, von dem er sich vor allem durch seine unendlich große lebendige Kraft unterscheidet, die er infolge der Bewegung eines ∞ langen Körpers vor ihm her besitzt, dessen Fortsetzung er bildet; auf den Zerfall der begrenzenden Wirbelschichten, die in wirklichen Flüssigkeiten sehr schnell eintritt, soll nachher noch eingegangen werden. Auch die Strömung in einem von parallelen Wänden begrenzten Kanal von gleichmäßiger Tiefe kann durch obigen Ausdruck dargestellt sein.

Nimmt man noch eine Parallelströmung in der ganzen Ebene hinzu, die die Geschwindigkeit des Strahles gerade aufhebt, so erhält man einen unbewegten Flüssigkeitsstreifen in gleichmäßig parallel bewegter Flüssigkeit

$$9'') \quad \varphi = \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{arctg} \frac{y-h}{x-a}\, da - \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{arctg} \frac{y+h}{x-a}\, da - 2\lambda\pi x.$$

Die so dargestellte Strömung gibt eine Idealform des toten Wassers, wie es sich hinter einem ∞ langen von parallelen Wänden begrenzten Hindernis ausbilden würde.

Anstelle des Geschwindigkeitspotentials könnte man auch die Geschwindigkeitkomponenten berechnen, welche die Wirbelschicht in einem Punkt hervorruft. Man findet für

$$10) \quad \begin{aligned} u &= -\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y}{(x-a)^2+y^2}\, da \\ v &= \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x-a}{(x-a)^2+y^2}\, da \end{aligned}$$

ohne nennenswerte Schwierigkeit die schon bekannten Werte wieder.

Einfluss einer periodischen Störung auf eine Wirbelschicht.

Eine geradlinige Wirbelschicht, die in der x Achse angenommen wird, soll durch störende Einflüsse so deformiert werden, daß an der Stelle $x = a$ ein Ausschlag $\delta b = \varepsilon f(a)$ entsteht, wo ε eine kleine Konstante bedeutet. Dabei wird, wenn die Bewegung aus der Anfangslage nicht senkrecht zur Wirbelschicht erfolgt, auch die ursprünglich konstante Wirbeldichte verändert:

$$\lambda(a) = \mu + \varepsilon g(a).$$

Dabei bedeutet μ eine Konstante, $g(a)$ eine Funktion von a.

Das Potential in einem beliebigen Aufpunkt ist dann

$$11) \qquad \varphi = \int_{-\infty}^{+\infty} (\mu + \varepsilon g(a)) \operatorname{arctg} \frac{y - \varepsilon f(a)}{x - a} \, da.$$

Die Geschwindigkeitskomponenten sind

$$11') \qquad \begin{aligned} u &= -\int_{-\infty}^{+\infty} (\mu + \varepsilon g(a)) \frac{y - \varepsilon f(a)}{(x-a)^2 + (y - \varepsilon f(a))^2} \, da \\ v &= \int_{-\infty}^{+\infty} (\mu + \varepsilon g(a)) \frac{x - a}{(x-a)^2 + (y - \varepsilon f(a))^2} \, da. \end{aligned}$$

In einem Punkte der Wirbelschicht selbst ist $y = \varepsilon f(x)$; also ergeben sich als Komponenten der Geschwindigkeit, mit der sich die Wirbelschicht verändert, die Ausdrücke:

$$12) \qquad \begin{aligned} u_0 &= -\int_{-\infty}^{+\infty} (\mu + \varepsilon g(a)) \frac{\varepsilon (f(x) - f(a))}{(x-a)^2 + \varepsilon^2 (f(x) - f(a))^2} \, da \\ v_0 &= \int_{-\infty}^{+\infty} (\mu + \varepsilon g(a)) \frac{x - a}{(x-a)^2 + \varepsilon^2 (f(x) - f(a))^2} \, da. \end{aligned}$$

Die Funktion $f(x)$ ist im Endlichen überall endlich und stetig vorausgesetzt: also werden die Zähler unter den Integralen überall endlich sein. Dagegen nehmen die Ausdrücke unter den Integralen an der Stelle $x = a$ die Form $\frac{0}{0}$ an und haben dort Pole 1. Ordnung. Denn setzt man

$$f(x) - f(a) = (x - a) f'(x + \vartheta (x - a)),$$

wo $0 \leq \vartheta \leq 1$ ist, so wird

$$\frac{f(x) - f(a)}{(x-a)^2 + \varepsilon^2 (f(x) - f(a))^2} = \frac{1}{x - a} \cdot \frac{f'(x + \vartheta (x - a))}{1 + \varepsilon^2 f'^2 (x + \vartheta (x - a))}$$

$$\frac{x - a}{(x-a)^2 + \varepsilon^2 (f(x) - f(a))^2} = \frac{1}{x - a} \cdot \frac{1}{1 + \varepsilon^2 f'^2 (x + \vartheta (x - a))}.$$

Diese Stellen sind von der Integration auszuschließen; physikalisch findet das darin seine Berechtigung, daß ein Wirbelteilchen für seine eigene Translationsbewegung keine Komponente beiträgt.

Unter Voraussetzung eines hinreichend kleinen ε läßt sich

$$\frac{1}{(x-a)^2 + \varepsilon^2 (f(x) - f(a))^2}$$

in eine Reihe entwickeln:

$$\frac{1}{(x-a)^2 + \varepsilon^2 (f(x) - f(a))^2}$$

$$= \frac{1}{(x-a)^2} \left[1 - \varepsilon^2 \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right)^2 + \varepsilon^4 \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right)^4 - \cdots \right].$$

Das gleiche gilt dann für u_0 und v_0. Vernachlässigt man Glieder, die in ε von höherer als 1. Ordnung sind, so erhält man

$$u_0 = -\varepsilon \mu \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x) - f(a)}{(x-a)^2} \, da$$

$$v_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} (\mu + \varepsilon g(a)) \frac{da}{x - a} = \mu \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{da}{x - a} + \varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(a) \, da}{x - a}.$$

Dabei ist das Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{da}{x-a} = -\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{u} = -\lim_{\substack{\delta=0 \\ R=\infty}} \left[\int_{-R}^{-\delta} \frac{du}{u} + \int_{+\delta}^{+R} \frac{du}{u}\right]$$

$$= -\lim_{\substack{\delta=0 \\ R=\infty}} \lg \frac{-\delta \cdot R}{-R \cdot \delta} = 0.$$

Also ergeben sich für die Geschwindigkeitskomponenten die endgültigen Ausdrücke

$$13) \quad u_0 = -\varepsilon\mu \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}\, da; \qquad v_0 = \varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(a)\, da}{x-a}.$$

Daraus ist insbesondere zu ersehen, daß $u_0 = 0$ ist, wenn $f(a) = f(x)$ ist an jeder Stelle $a = x$; dagegen ist $v_0 = 0$, wenn $g(a)$ an jeder Stelle Null ist. Eine transversale Verschiebung der Wirbelteilchen bringt also eine longitudinale Bewegung hervor, und umgekehrt veranlaßt eine Verschiebung der Wirbelteilchen in longitudinaler Richtung einen transversalen Ausschlag.

Es soll jetzt eine transversale Störung untersucht werden, die eine periodische Funktion des Ortes ist; also sei

$$f(x) = \sin kx$$

(durch Superposition solcher Störungen für alle Werte von k würde man die Fouriersche Entwicklung einer allgemeinen periodischen Störung erhalten). Die Geschwindigkeitskomponenten sind

$$14) \qquad u_0 = -\varepsilon\mu \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin kx - \sin ka}{(x-a)^2}\, da; \qquad v_0 = 0.$$

Führt man

$$kx = \xi; \qquad ka = \alpha$$

ein, so ergibt sich

$$u_0 = -\varepsilon\mu k \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin\xi - \sin\alpha}{(\xi-\alpha)^2}\, d\alpha.$$

Nun wird das Intervall von $-\infty$ bis $+\infty$ in lauter Abschnitte von der Länge 2π zerlegt:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} = \cdots \int_{\xi-4\pi}^{\xi-2\pi} + \int_{\xi-2\pi}^{\xi} + \int_{\xi}^{\xi+2\pi} + \int_{\xi+2\pi}^{\xi+4\pi} + \cdots,$$

also

$$u_0 = -\varepsilon\mu k \sum_{-\infty}^{+\infty\,\nu} \int_{\xi+2\nu\pi}^{\xi+2(\nu+1)\pi} \frac{\sin\xi - \sin\alpha}{(\xi-\alpha)^2}\, d\alpha.$$

Durch Einführung von neuen Integrationsvariabeln

$$\beta = \alpha - \xi - 2\nu\pi,$$

hierauf durch Vertauschung der Reihenfolge von Summation und Integration erhält man

$$u_0 = -\varepsilon\mu k \sum_{-\infty}^{+\infty\,\nu} \int_0^{2\pi} \frac{\sin\xi - \sin(\xi+\beta)}{(\beta+2\nu\pi)^2}\, d\beta$$

$$= -\varepsilon\mu k \int_0^{2\pi} (\sin\xi - \sin(\xi+\beta)) \sum_{-\infty}^{+\infty\,\nu} \frac{1}{(\beta+2\nu\pi)^2}\, d\beta.$$

Führt man jetzt für

$$\sum_{-\infty}^{+\infty\,\nu} \frac{1}{(\beta+2\nu\pi)^2}$$

seinen Wert

$$\frac{1}{4\sin^2\frac{\beta}{2}}$$

ein,[1]) so wird

$$u_0 = -\frac{\varepsilon\mu k}{4} \int_0^{2\pi} \frac{\sin\xi - \sin(\xi+\beta)}{\sin^2\frac{\beta}{2}}\, d\beta = \frac{\varepsilon\mu k}{2} \int_0^{2\pi} \frac{\cos\left(\frac{\beta}{2}+\xi\right)}{\sin\frac{\beta}{2}}\, d\beta.$$

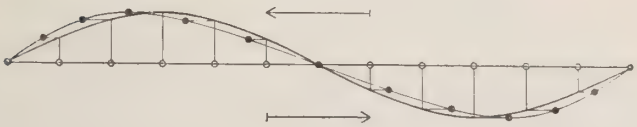
[1]) Z. B. Burkhardt, Einführung in die Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen, S. 145—148.

Für die Auswertung zerlegt man das Integral in 2 Teile

$$u_0 = \frac{\varepsilon \mu k}{2}\left[\cos\xi \int_0^{2\pi} \operatorname{cotg}\frac{\beta}{2}\, d\beta - \sin\xi \int_0^{2\pi} d\beta\right].$$

Das erste der beiden Integrale wird Null; also ist

15) $$u_0 = -\varepsilon \mu k \pi \sin k x.$$



Es tritt also eine longitudinale Geschwindigkeit auf, deren Größe dem transversalen Ausschlag proportional ist. Sie ist auf diejenigen Stellen der Wirbelschicht hingerichtet und bewirkt dort eine Verdichtung der Wirbelteilchen, wo die strömende Flüssigkeit die ursprüngliche Lage der Wirbelschicht in der Richtung von der konvexen zur konkaven Seite überschreitet.

Man kann nun nach der Gestalt fragen, die die Wirbelschicht infolge der longitudinalen Bewegung der Teilchen annimmt. War

$$y = \varepsilon \sin k x_0$$

die ursprüngliche Gleichung der gestörten Wirbelschicht, so wird für jedes Wirbelteilchen y ungeändert bleiben, dagegen wird die Abszisse zur Zeit δt den Wert

$$x = x_0 + u_0 \delta t$$

annehmen. Führt man also

$$x_0 = x - u_0 \delta t = x + \varepsilon \mu k \pi \sin k x_0 \delta t = x + \mu k \pi y \delta t$$

ein, so wird

$$y = \varepsilon \sin k (x + \mu k \pi y \delta t)$$

die Gleichung der Wirbelschicht zur Zeit δt in impliziter Form. Entwickelt man nach Potenzen von δt

$$y = \varepsilon [\sin kx + \mu k^2 \pi y \delta t \cos kx + \cdots]$$

und beschränkt sich auf die erste Potenz von δt, so kann man die Gleichung nach y auflösen und erhält

$$y = \frac{\varepsilon \sin kx}{1 - \varepsilon \mu k^2 \pi \delta t \cos kx} = \varepsilon \sin kx [1 + \varepsilon \mu k^2 \pi \delta t \cos kx].$$

Also ist

16) $$y = \varepsilon \sin kx + \varepsilon^2 \mu k^2 \pi \delta t \sin kx \cos kx$$

die Gleichung der Wirbelschicht zur Zeit δt.

Es ist jetzt die Änderung der Wirbeldichte zu untersuchen, die infolge der longitudinalen Geschwindigkeit eintritt. Die Wirbelstärke, die sich auf einem Längenelement der Wirbelschicht befindet, wird mit der Zeit unveränderlich sein, auch wenn das Element seine Länge ändert. Also

$$\lambda(x) \cdot dx = \text{const.}$$

oder durch logarithmisches Differentiieren nach der Zeit:

$$\frac{\delta \lambda(x)}{\lambda(x) \delta t} + \frac{\delta dx}{dx \cdot \delta t} = 0.$$

Dabei bezieht sich „d“ auf Änderung mit dem Ort, „δ“ auf Änderung mit der Zeit. Eine Vertauschung der Reihenfolge der Operationen gibt

$$\frac{\delta \lambda(x)}{\lambda(x) \delta t} + \frac{d \delta x}{dx \cdot \delta t} = 0.$$

Nun ist aber

$$\frac{\delta x}{\delta t} = u_0$$

die Geschwindigkeit an der Stelle x, also

17) $$\frac{1}{\lambda(x)} \frac{\delta \lambda(x)}{\delta t} + \frac{du_0}{dx} = 0.$$

Für die Änderung der Wirbeldichte erhält man

17′) $$\delta \lambda(x) = -\lambda(x) \frac{du_0}{dx} \delta t.$$

In unserem Fall ergibt sich nach (15)

$$\frac{du_0}{dx} = -\varepsilon\mu k^2\pi\cos kx.$$

Ferner ist $[\lambda(x)]_{t=0} = \mu$, also

$$\delta\lambda(x) = \varepsilon\mu^2 k^2\pi\cos kx\,\delta t.$$

Folglich ist die Wirbeldichte zur Zeit δt

18) $$[\lambda(x)]_{t=\delta t} = \mu + \varepsilon\mu^2 k^2\pi\cos kx\,\delta t$$

In Übereinstimmung mit der Anschauung, die sich aus der Geschwindigkeitsverteilung ergibt, tritt die größte Dichtigkeit an den Stellen $kx = \ldots 0,\ 2\pi,\ \ldots 2k\pi \ldots$ auf, die kleinste Dichtigkeit an den Stellen $kx = \ldots \pi,\ 3\pi,\ \ldots (2k+1)\pi \ldots$ An allen diesen Stellen ändert die Geschwindigkeit das Zeichen; und zwar strömt auf die ersteren die wirbelnde Flüssigkeit von beiden Seiten zu, von letzteren nach beiden Seiten weg.

Die veränderte Wirbeldichte wird nun veränderte Geschwindigkeiten der Wirbelteilchen zur Folge haben. Nach (15) ändert sich u_0 nur um einen Betrag 2. Ordnung in ε; dagegen nimmt v_0, das bisher Null war, nach (13) den Wert

$$v_0 = \varepsilon\mu^2 k^2\pi\,\delta t \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos ka}{x-a}\,da$$

an. Das hier auftretende Integral läßt sich in ähnlicher Weise behandeln wie das in u_0 vorgekommene. Mittels derselben Substitution

$$kx = \xi; \qquad ka = a$$

und durch Zerlegung des Intervalls in Teilintervalle von der Länge 2π erhält man

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos ka}{x-a}\,da = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos a\,da}{\xi - a} = \sum_{-\infty}^{+\infty\nu} \int_{\xi+2\nu\pi}^{\xi+2(\nu+1)\pi} \frac{\cos a\,da}{\xi - a}.$$

Hierauf ergibt die Einführung neuer Integrationsvariablen β

$$a - \xi = 2\nu\pi + \beta$$

und die Vertauschung der Reihenfolge von Summation und Integration

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos ka}{x-a}\, da = -\sum_{-\infty}^{+\infty}{}' \int_0^{2\pi} \frac{\cos(\beta+\xi)\, d\beta}{\beta + 2\nu\pi}$$

$$= -\int_0^{2\pi} \cos(\beta+\xi) \sum_{-\infty}^{+\infty}{}' \frac{1}{\beta + 2\nu\pi}\, d\beta.$$

Nun ist

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}{}' \frac{1}{\beta + 2\nu\pi} = \tfrac{1}{2} \operatorname{cotg} \frac{\beta}{2}$$

bei richtiger Anordnung der Glieder, welche die Konvergenz gewährleistet;[1]) also

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos ka}{x-a}\, da = -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos(\beta+\xi) \operatorname{cotg} \frac{\beta}{2}\, d\beta$$

Durch eine einfache trigonometrische Umformung findet man

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos ka}{x-a}\, da = \int_0^{\pi} [\sin\xi - \cos\xi \operatorname{cotg}\gamma + \sin(2\gamma+\xi)]\, d\gamma,$$

wo

$$\gamma = \frac{\beta}{2}$$

ist; und durch Integration

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos ka}{x-a}\, da = [\gamma \sin\xi - \cos\xi \lg\sin\gamma - \tfrac{1}{2}\cos(2\gamma+\xi)]_{\gamma=0}^{\gamma=\pi}$$

$$= \pi \sin\xi = \pi \sin kx.$$

Also ist

$$19) \qquad v_0 = \varepsilon\mu^2 k^2 \pi^2 \sin kx \cdot \delta t.$$

[1]) Burkhardt, l. c., S. 145—148.

Die transversale Geschwindigkeit ist also dem ursprünglichen Ausschlag proportional und vergrößert ihn.

Zusammenfassend lassen sich die Vorgänge in der Wirbelschicht so schildern. Eine transversale Störung der Wirbelschicht, die eine periodische Funktion des Ortes ist, bewirkt das Auftreten longitudinaler Geschwindigkeiten der Wirbelteilchen. Die Folge davon ist eine Störung der Wirbeldichte, die ebenfalls eine periodische Funktion des Ortes ist. Diese gibt Veranlassung zu einer transversalen Geschwindigkeit in Richtung des ursprünglichen Ausschlags, die seiner Größe proportional ist und also die ursprüngliche Störung verstärkt.

So lange nur Glieder 1. Ordnung in ε in Betracht gezogen werden müssen, wachsen also die Ausschläge proportional an, während gleichzeitig an einzelnen Stellen, deren Abstand $\frac{2\pi}{k}$ ist, die Wirbeldichte einen mit der Zeit immer stärker werdenden Maximalwert annimmt. Für wachsende Ausschläge, wenn Glieder höherer Ordnung in ε nicht mehr vernachlässigt werden dürfen, werden die Verhältnisse so kompliziert, daß sie rechnerisch nicht mehr zu verfolgen sind. Indessen werden die gefundenen Bewegungen 1. Ordnung doch auch weiterhin in der Hauptsache für die Veränderungen maßgebend sein, nur durch Korrektionsglieder verändert, die mit wachsender Zeit immer mehr an Einfluß gewinnen. Es werden also die aufgetretenen Maximalstellen der Wirbeldichte immer mehr verstärkt werden, während die zwischenliegenden Minima sich dem Wert Null der Wirbeldichte immer mehr nähern. Dabei wird an den Minimalstellen die Geschwindigkeit der Potentialbewegung zu beiden Seiten der Wirbelschicht immer weniger verschieden werden; das Auftreten neuer Unstetigkeiten ist nicht zu erwarten, im Gegenteil wird der Einfluß der Unstetigkeitsfläche vermindert bis auf Null. Die ganze Wirbelschicht löst sich schließlich in eine Reihe gleich starker

Wirbel in gleichen Abständen auf, wie sie v. Kármán[1]) zuerst untersucht hat.

v. Kármán und andere[2]) haben die Kármánschen Wirbel in Zusammenhang mit der Prandtlschen[3]) Grenzschichtentheorie gebracht und angenommen, daß sich die Flüssigkeitsschicht, die unmittelbar an der Wand eines in der Strömung befindlichen Hindernisses durch Reibung zurückgehalten und in Rotation versetzt wird,[4]) als Wirbelschicht loslöst und in die Flüssigkeit austritt, wenn ein gewisser Spannungszustand erreicht ist. Diese instabile Grenzschicht wird sich in gleich starke spiralig aufgewundene Wirbel in gleich großen Abständen auflösen. Die einzelne Wirbelreihe ist allerdings selbst wieder unstabil[5]) und deshalb zu Versuchen wenig geeignet, dagegen können zwei parallele Wirbelreihen von entgegengesetzter Drehrichtung eine stabile Lage annehmen. Die von Kármán veröffentlichten Photographien von Versuchen im Laboratorium zeigen auch die beiden Wirbelreihen in sehr schöner Ausbildung und guter Übereinstimmung mit der durch die Theorie geforderten stabilen Anordnung, sowohl hinter einem in der Flüssigkeit bewegten Hindernis als auch bei Strahlbildung in der Flüssigkeit. Die Ablösung der Wirbel ist auf keinem dieser Bilder zu beobachten; der erste Wirbel tritt in einem kleinen Abstand hinter dem Hindernis auf, wo er durch Aufrollen eines Stückes der Prandtlschen Wirbelschicht entsteht. L. Föppl[2]) hat gefunden, daß es hinter einem Kreiszylinder in

[1]) Th. v. Kármán. Über den Mechanismus des Widerstandes usw. vgl. S. 81, Anm. 2.

[2]) F. Pfeiffer, Theorien des Flüssigkeitswiderstandes. Zeitschrift für das gesamte Turbinenwesen, 1912, Heft 16 bis 18. — L. Föppl, Wirbelbewegung hinter einem Kreiszylinder. Sitzungsb. der mathem.-physikal. Klasse der K. B. Akademie der Wissensch. zu München, 1913, Bd. 43, S. 1 u. f.

[3]) L. Prandtl, Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung. Vgl. S. 81, Anm. 1.

[4]) Nach unserer Auffassung ist die Helmholtzsche Wirbelschicht zuerst vorhanden und die Ursache der Reibung.

[5]) Th. v. Kármán und H. Rubach l. c. vgl. Anm. 2, S. 81.

strömender Flüssigkeit unendlich viele, eine Kurve erfüllende Punktepaare gibt, auf denen ein Wirbelpaar in Ruhe sein kann; zu jedem Punktepaar gehört eine bestimmte Wirbelstärke. Wenn sich bald nach Beginn der Bewegung die Spitzen der sich ablösenden Wirbelschichten zu spiraligen Wirbeln aufrollen, so müssen sich diese, um im Gleichgewicht zu bleiben, um so weiter von dem Hindernis entfernen, je größer ihre Wirbelstärke wird; bis dann infolge einer zufälligen Störung des labilen Gleichgewichtes erst einer, dann der andere der beiden Wirbel sich rascher mit der Strömung fortbewegt. Nachdem so die Wirbelschicht abgerissen ist, bilden sich neue Wirbel, die als Kármánsche Wirbel den ersten folgen. Auf den beigelegten Photographien sieht man sehr deutlich das Vorhandensein ganz kleiner Wirbel zwischen dem Hindernis und dem in Ruhe befindlichen Wirbelpaar. Es scheint sich also die Prandtlsche Wirbelschicht zuerst in kleine Wirbel aufzulösen, die sich dann zu größeren Wirbeln vereinigen.

Beobachtet man in der Natur, so bemerkt man, daß die Wirbel, die hinter Pfosten, Pfeilern und dgl. in ruhig strömendem Wasser auftreten, die stabile Anordnung nur in äußerst seltenen Fällen annehmen,[1]) namentlich dann niemals, wenn die Breite des Hindernisses einige Zentimeter überschreitet. In der Regel zeigt sich beiderseits eine deutlich sichtbare Unstetigkeitsfläche, die oft allmählich verschwindet; gewöhnlich bilden sich jedoch in ihr einzelne Wirbel oder Wirbelreihen in annähernd gleichen Abständen, die sich dann bald infolge der Unstabilität solcher Reihen in Wirbelgruppen auflösen. Immer beginnt die Wirbelbildung erst in einiger Entfernung, manch-

[1]) Ein Nachteil der Kármánschen stabilen Anordnung ist, daß sie für räumliche Strömungen nicht verallgemeinert werden kann. Man müßte denn annehmen, daß sich etwa hinter einer kreisrunden Scheibe, die auf der Strömungsrichtung senkrecht steht, spiralige Wirbel der Art bilden, wie sie hinter einer Schiffsschraube aufzutreten scheinen. Ein Versuch, den Riecke, Beiträge zur Hydrodynamik, Göttinger Nachrichten, 1888, S. 347—357 beschreibt, spricht jedoch für das Auftreten von kreisförmigen Wirbelringen hinter der Scheibe.

mal ziemlich weit entfernt von dem Hindernis, kann also nicht wohl anders als durch eine Störung erklärt werden, die den Zerfall der ursprünglich kontinuierlichen Wirbelschicht veranlaßte. In sehr ruhigem Wasser genügt manchmal die Erregung eines Wellensystems durch einen in der Nähe eingeworfenen Stein, um die Auflösung der Wirbelschicht in einzelne Wirbel von großer Regelmäßigkeit zu veranlassen. Sehr regelmäßige Reihen ganz kleiner Wirbel, die längere Zeit erhalten bleiben, kann man auch häufig beobachten, wenn sich in ruhiger Strömung Unstetigkeitsflächen infolge von Unebenheiten des Grundes bilden; auch hier hat man es mit der Auflösung einer Wirbelschicht zu tun.

Die bisher geschilderten Wirbelsysteme sind sämtlich ihrer Entstehung nach von dem Kármánschen System verschieden, auch wenn sie der Gestalt nach mit ihm übereinstimmen, da sich die Wirbel einer Reihe gleichzeitig, nicht nacheinander bilden.

Hinter einem Ruder bildet sich meist beim Eintauchen ein Wirbelpaar (eigentlich beobachtet man die freien Enden eines Wirbelfadens), beim Herausnehmen ein zweites. Für die Entstehung des letzteren hat Klein die schon erwähnte einfache Erklärung gegeben.[1])

Zieht man ein Ruder mit gleichmäßiger geringer Geschwindigkeit, so daß keine Turbulenzerscheinungen und keine zu starken Oberflächenwellen, die die Beobachtung ganz allgemein sehr stören, auftreten, so bilden sich keine weiteren Wirbel, sondern geradlinige Trennungsschichten aus. Dagegen bemerkt man stets, daß das Ruder in der Hand zu schwingen sucht. Gibt man diesen Schwingungen nach, die von der Ruderlänge sicher ziemlich unabhängig sind und als erzwungene Schwingungen zu gelten haben, so bildet sich an jedem Umkehrpunkt ein Wirbel aus, und es entsteht ein deutliches System Kármánscher Wirbel. Die Entstehung dieser Wirbel läßt sich leicht durch eine weitere Verfolgung des Kleinschen Gedankens er-

[1]) F. Klein, vgl. S. 82, Anm. 1.

klären: man kann sich vorstellen, daß das Ruder bei jeder halben Schwingung aus den geschlossenen Stromlinien der einen Seite herausgezogen wird und daß so ein Stück der Wirbelschicht freigelegt wird. Dabei wäre die Reibung, wenn nicht ganz einflußlos, doch jedenfalls von viel geringerer Bedeutung als man sich vorzustellen gewohnt ist. Es ist klar, daß ähnliche Erscheinungen auftreten müssen, wenn ein Hindernis in bewegtem Wasser schwingt, oder wenn das Wasser selbst eine schwingende Bewegung nach Art stehender Wellen ausführt; beides kann man gelegentlich beobachten. Als Ursache der Schwingung sind wenigstens im ersten Fall die auf das Hindernis wirkenden Flüssigkeitsdrucke anzusehen, die unsymmetrisch sind, sobald die Symmetrie der Strömung nur einmal durch eine zufällige Ursache gestört ist.

Man hat demnach zwei Ursachen zu unterscheiden, die zur Entstehung von Wirbelreihen führen können. Die erste ist eine Störung einer ausgebildeten Wirbelschicht, die eine periodische Funktion des Ortes ist. Sie läßt sämtliche Wirbel gleichzeitig entstehen und ist im vorigen mathematisch ein Stück weit verfolgt. Die zweite ist eine schwingende Bewegung zwischen der Ausgangsstelle der Wirbelschicht und der Flüssigkeit, also eine Störung, die eine periodische Funktion der Zeit ist. Sie läßt einen Wirbel nach dem anderen sich bilden, indem jedes Stück der Wirbelschicht, das in die Flüssigkeit ausgetreten ist, schnell aufgerollt wird. Wenn die örtlichen oder zeitlichen Störungen nicht periodisch sind, kommt es zur Bildung von einzelnen Wirbeln verschiedener Stärke, nicht von Wirbelreihen.

Über die analytische Darstellung eines eindeutigen Zweiges einer monogenen Funktion.

Von **G. Mittag-Leffler.**

Vorgelegt von A. Pringsheim in der Sitzung am 6. März 1915.

Es sei $c_0, c_1, c_2 \ldots c_\nu \ldots$

eine unendliche Folge von Konstanten, die der Cauchyschen[1]) Bedingung

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{\frac{c_\nu}{\nu!}} = \frac{1}{r}$$

genügen, wobei r eine endliche positive Größe vorstelle.

Die Theorie der analytischen Funktionen nach Weierstraß gründet sich auf die Betrachtung der Potenzreihe:

$$\mathfrak{P}(x-a) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{c_\nu}{\nu!} (x-a)^\nu, \tag{1}$$

---

[1]) Augustin-Louis Cauchy, Cours d'Analyse de l'École Royale Polytechnique, 1ière partie. Analyse algébrique. Paris 1821. Théorème I, S. 132.

Vgl. Ed. Phragmén, Om konvergensområdet hos potensserier af två variabler. Öfversigt af Kungl. Vet. Ak. Förh. Stockholm 1883. No. 10, S. 24.

J. Hadamard, Essai sur l'étude des fonctions données par leur développement de Taylor, Thèse, 1892, S. 7, 8.

A. Pringsheim, Enzyklopädie der Math. Wiss., Bd. 1, T. 1, S. 81, Note 168.

Weierstraß, der zu Beginn seiner Arbeiten den Cauchyschen Satz nicht gekannt hatte, begann seine Vorlesung über die Theorie der analytischen Funktionen immer mit dem Beweise des folgenden Satzes: „Der Konvergenzradius der Reihe $\mathfrak{P}(x-a)$ ist die obere Grenze der Werte von $x-a$, für welche die obere Grenze von $\left|\frac{c_\nu}{\nu!}(x-a)^\nu\right|$ $(\nu = 0, 1, 2 \ldots)$ endlich ist." Man sieht, daß dieser Satz mit dem Cauchys identisch ist.

wo x die Veränderliche und a eine beliebig gewählte Konstante bedeute. Diese Reihe definiert in einem Kreise C mit dem Mittelpunkt a und dem Radius r eine analytische Funktion. Sie hat die charakteristische Eigenschaft, in jedem innerhalb C gelegenen Bereich gleichmäßig konvergent und andrerseits in jedem Punkte außerhalb C divergent zu sein.

Man nennt den Bereich C den Konvergenzkreis oder Konvergenzbereich der Reihe $\mathfrak{P}(x-a)$. Diese letztere Ausdrucksweise, Konvergenzbereich, soll bei jedem arithmetischen Ausdruck Anwendung finden, der im Innern eines Bereiches konvergent, aber in jedem Punkte außerhalb divergent ist.

In (1) werde die Substitution ausgeführt:

$$(x-a) = (x'-a)(1+u). \tag{2}$$

Dabei soll x' im Innern von C angenommen werden. Nach dem Weierstraßschen Satz über iterierte Reihen[1]) können wir die Reihe (1) in eine neue Reihe nach steigenden Potenzen von u umordnen:

$$\mathfrak{P}((x'-a)(1+u)) = \sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\sum_{\mu=\nu}^{\infty}\frac{\mu(\mu-1)\dots(\mu-\nu+1)}{\nu!}\frac{c_\mu}{\mu!}(x'-a)^\mu\right)u^\nu,$$

wofür man schreiben kann:

$$\begin{aligned}\mathfrak{P}((x'-a)(1+u)) &= \sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\sum_{\mu=0}^{\infty}\frac{c_{\mu+\nu}}{\mu!\,\nu!}(x'-a)^{\mu+\nu}\right)u^\nu \\ &= \sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{\mu=0}^{\infty}\frac{c_{\mu+\nu}}{\mu!\,\nu!}(x'-a)^{\mu+\nu}u^\nu.\end{aligned} \tag{3}$$

Die innere Summation geht hierbei der äußeren voraus.

Nach dem gleichen Satz von Weierstraß weiß man, daß die Reihe (3) sicher konvergiert, wenn $|u|$ so klein gewählt

[1]) Karl Weierstraß, „Zur Funktionenlehre (Aus dem Monatsbericht d. Kgl. Akad. d. Wiss. vom 12. August 1880“). Werke, Bd. 2, S. 205—208.

Über die Terminologie „mehrfache Reihe“ und „iterierte Reihe“ sehe man „Encyclop. des sciences mathématiques, T. 1, vol. 1, Fasc. 2, S. 255, Note 128.

ist, daß x in das Innere von C fällt; dies drückt sich durch die Ungleichung aus:

$$x' - a \,|\cdot|\, u \,| < r - |\, x' - a \,|.$$

Ersetzt man jetzt auf der rechten Seite von (3) u durch seinen Ausdruck in x und x'

$$u = \frac{x-a}{x'-a} - 1 = \frac{x-x'}{x'-a}, \tag{4}$$

so erhält man:

$$\mathfrak{P}(x-a) = \mathfrak{P}\left((x'-a)\left(1+\frac{x-x'}{x'-a}\right)\right) \tag{5}$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\sum_{\mu=0}^{\infty}\frac{c_{\mu+\nu}}{\mu!\,\nu!}(x'-a)^{\mu}(x-x')^{\nu}\right) = \mathfrak{P}(x'-a,\, x-x').$$

Die iterierte Reihe (5) konvergiert sicher für alle x im Innern eines Kreises $C_{x'}$, der um den innerhalb C gelegenen Punkt x' beschrieben ist und C von innen berührt.

Es kann indessen der Fall eintreten, daß diese Reihe (5) auch dann noch konvergent bleibt, wenn x einem konzentrischen Kreise $C_{x'}$ angehört, der größer ist als der C berührende Kreis. Diese Tatsache ist von grundlegender Bedeutung. Welchen Standpunkt man auch in der Funktionentheorie einnimmt, sei es der von Weierstraß, von Cauchy oder von Riemann, die Grundlage der Theorie bildet immer die Tatsache, daß die Reihe $\mathfrak{P}(x-a)$ durch eine Substitution

$$x - a = (x' - a)\cdot f(u) \tag{6}$$

in eine andere transformiert werden kann, die, wie die erste, aus den Elementen

$$c_0,\ c_1,\ c_2,\ \ldots\ c_\nu,\ \ldots$$

aufgebaut ist, aber einen weiteren Konvergenzbereich als $\mathfrak{P}(x-a)$ besitzt.

Die Wahl der Funktion $f(u) = 1 + u$, wie in der herkömmlichen Theorie, ist durchaus nicht wesentlich. Die Frage, was man durch Einführung anderer Funktionen $f(u)$ an Stelle des $1+u$ gewinnen kann, bedeutet daher ein Problem, das

der Theorie der analytischen Funktionen geradezu an die Spitze zu stellen ist.

Indessen möge zunächst die Konvergenz der iterierten Reihe $\mathfrak{P}(x'-a,\ x-x')$ betrachtet werden, in der x' dem Innern von C angehören soll und x dem Innern des Kreises $C_{x'}$, der einem gegebenen Punkt x' entspricht. Wir bezeichnen mit D die Gesamtheit der Punkte x, die so erhalten wird, wenn jeder Punkt nur ein einziges Mal gezählt wird. Die Konvergenz hört dann auf, wenn x außerhalb D oder x' außerhalb C gelegen ist. Dies folgt offenbar aus der oben erwähnten Tatsache, daß eine Potenzreihe für jeden innerhalb ihres Konvergenzkreises gelegenen Bereich gleichmäßig konvergiert, dagegen in jedem Punkte außerhalb dieses Kreises divergiert.

Nehmen wir nun an, daß x' einen innerhalb C gelegenen Bereich durchlaufe, ebenso x einen entsprechenden Bereich im Innern von D. Unter diesen Voraussetzungen ist die Reihe $\mathfrak{P}(x'-a,\ x-x')$ für diese beiden Bereiche gleichmäßig konvergent.

In der Tat, nehmen wir zwei positive Größen Θ und ϑ beide kleiner als eins an und bezeichnen mit $\varrho_{x'}$ den Radius des Kreises $C_{x'}$ mit dem Mittelpunkt x'. Wenn der Punkt x' das Gebiet $|x'-a| < \Theta r$ durchläuft, möge x die entsprechenden Bereiche $|x-x'| < \vartheta\,\varrho_{x'}$ durchlaufen: dieser Bereich, den x durchläuft, wenn wir jeden Punkt nur ein einziges Mal zählen, heiße $\bar{D}$.

Es sei nun mit g die obere Grenze von $\mathfrak{P}(x'-a,\ x-x')$ im Innern oder auf der Begrenzung des Bereiches $\bar{D}$ bezeichnet. Dann gibt der Satz von Cauchy-Weierstraß:[1])

$$\frac{1}{\nu!}\left|\sum_{\mu=0}^{\infty}\frac{c_{\mu+\nu}}{\mu!}(x'-a)^{\mu}\right| < g\,(\vartheta\,\varrho_{x'})^{-\nu}.$$

[1]) A. Cauchy, „Résumé d'un mémoire sur la mécanique céleste et sur un nouveau calcul appelé calcul des limites (lu à l'Académie de Turin, dans la séance du 11 Octobre 1831)". Exercises d'Analyse et de Physique Mathématique. Bd. 2. Paris 1841. S. 53. Gleichung (9).

Karl Weierstraß, „Zur Theorie der Potenzreihen. Münster. im Herbst 1841." Werke, Bd. 1, S. 67—74.

Wählt man jetzt x in solcher Weise, daß

$$|x - x'| < \vartheta^2 \varrho_{x'},$$

so erhält man:

$$\frac{1}{\nu!} \left| \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{c_{\mu+\nu}}{\mu!} (x' - a)^{\mu} (x - x')^{\nu} \right| \leq g \vartheta^{\nu}$$

und

$$\sum_{\nu=n}^{n+n'} \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{c_{\mu+\nu}}{\mu!\,\nu!} (x' - a)^{\mu} (x - x')^{\nu} \leq g \frac{\vartheta^n}{1 - \vartheta}$$

w. z. b. w.

Der Bereich D enthält den Bereich C in allen Fällen, in denen er nicht mit ihm identisch ist.[1]) Fixiert man im Innern von C einen Bereich für x', so gibt es immer einen innerhalb D gelegenen entsprechenden Bereich für x von der Beschaffenheit, daß die Reihe $\mathfrak{P}(x' - a,\ x - x')$ für diese beiden Bereiche gleichmäßig konvergent ist. D ist also für die Reihe $\mathfrak{P}(x' - a,\ x - x')$ Konvergenzbereich, ganz so, wie C für die Reihe $\mathfrak{P}(x - a)$. Die Reihe $\mathfrak{P}(x - a)$ stellt im Innern von C den eindeutigen Zweig einer durch die Konstanten

$$c_0,\ c_1,\ c_2 \ \ldots\ c_{\nu} \ \ldots$$

definierten Funktion dar, die wir mit $FC(x)$ bezeichnen wollen. Die Reihe $\mathfrak{P}(x' - a,\ x - x')$ repräsentiert im Innern eines weiteren Bereiches D einen eindeutigen Zweig $FD(x)$, der $FC(x)$ enthält und auf eindeutige Weise bestimmt ist, wenn die Konstanten $c_0,\ c_1,\ c_2 \ \ldots\ c_{\nu} \ \ldots$ fixiert sind.

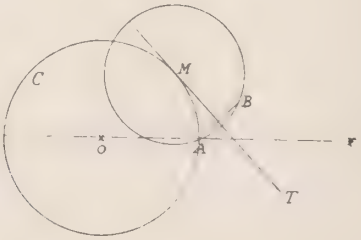
Als Beispiel möge der Konvergenzbereich D der iterierten Reihe

$$(7) \qquad \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{(\mu + \nu)!}{\mu!\,\nu!} x'^{\mu} (x - x')^{\nu},$$

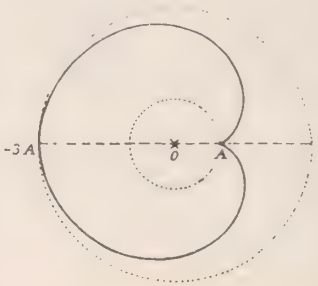
welche die Funktion $\dfrac{1}{1 - x}$ darstellt, untersucht werden. Die Begrenzungslinie des Bereiches D ist in diesem Falle, wie er-

[1]) Bekanntlich existiert in diesem Falle die durch $\mathfrak{P}(x - a)$ definierte analytische Funktion außerhalb des Kreises C nicht mehr. Der Kreis C ist eine „natürliche Grenze" der Funktion.

sichtlich, die Umhüllende aller Kreise, die durch den Punkt A mit der Koordinate $x = 1$ gehen und ihren Mittelpunkt M auf dem Kreise C haben. Der Punkt B, der diese Kurve erzeugt, ist zu A symmetrisch in Bezug auf die durch M an den Kreis C gezogene Tangente MT.



Man erkennt nun in der Begrenzungslinie von D die Kardioide[1]) $\varrho = 2(1 - \cos\Theta)$, bezogen auf den Pol A und die polare Achse Ax. In unserer Figur ist ein Kreis mit dem Radius OA im Innern der Kardioide und ein anderer mit dem Radius $(O, 3A)$ gezeichnet.



[1]) M. Carré, „Examen d'une courbe formée par le moyen du cercle." Hist. de l'Acad. Royale des Sciences. Année MDCCV. Mémoires, S. 56—61.

Johannes Castillioneus, „De Curva Cardioide, de Figura sua sic dicta." Philosophical Transactions 1741, Nr. 461, S. 778—781.

L. Lindelöf, „Lärobok i analytisk geometrie." Helsingfors 1864, S. 149.

Bevor wir weiter fahren, mögen einige Definitionen vorausgeschickt werden, von denen wir im folgenden fortwährend Gebrauch zu machen haben.

Durch den Punkt a ziehen wir einen beliebigen Halbstrahl ax und wählen auf ihm einen Punkt p so, daß die von der Richtung des Halbstrahls abhängige Länge (a, p) eine gewisse Größe l stets übertrifft. (Der Punkt p darf übrigens auch im Unendlichen liegen.) Lassen wir nun ax sich um den Mittelpunkt a um den Winkel 2π drehen, so überstreicht die Strecke (a, p) eine Fläche, die a umgibt und die wir einen Stern mit dem Mittelpunkt a nennen wollen. Der Punkt p soll Begrenzungspunkt des Sterns und die Gesamtheit der Begrenzungspunkte soll Begrenzung des Sterns heißen.[1])

Ein Stern E heißt Konvergenzstern für einen bestimmten arithmetischen Ausdruck, wenn er der Konvergenzbereich dieses Ausdruckes ist; d. h. wenn der Ausdruck für jeden innerhalb E gelegenen Bereich gleichmäßig konvergiert, dagegen in jedem Punkte außerhalb E divergiert. Der Zweig der Funktion $F(x)$, der durch einen solchen Ausdruck dargestellt wird, soll mit $FE(x)$ bezeichnet werden. Man sieht, daß der Kreis C Konvergenzstern für die Reihe $\mathfrak{P}(x - a)$ ist, die den Funktionszweig $FC(x)$ darstellt.

Es kann sein, daß der Begrenzungspunkt, der jedem Erzeugungsstrahl des Sterns entspricht, jeweils der erste singuläre Punkt von $F(x)$ ist, zu dem man beim Durchlaufen des Halbstrahls von a aus gelangt. In diesem Falle heiße der Stern Hauptstern von $F(x)$[2]) und sei mit dem Buchstaben A bezeichnet, während wir den entsprechenden Zweig der Funktion $F(x)$ mit $FA(x)$ bezeichnen wollen.

---

[1]) G. Mittag-Leffler, „Sur la représentation analytique d'une branche uniforme d'une fonction monogène." Acta Mathem., Bd. 23, S. 47.

[2]) G. Mittag-Leffler, „Sur la représentation analytique d'une branche uniforme d'une fonction monogène (Seconde note). Acta Mathematica, Bd. 24, S. 200.

Jeder analytischen Funktion, die in der Umgebung des Punktes a durch die der Cauchyschen Bedingung genügenden Konstanten $c_0, c_1, c_2 \ldots c_\nu, \ldots$ definiert ist, entspricht folglich ein Hauptstern A.

Andrerseits: Ist ein beliebiger Stern A gegeben, so kann man immer und auf unendlich viele Arten einen arithmetischen Ausdruck bilden, der einen Funktionszweig $FA(x)$ darstellt, für welchen A der Hauptstern ist. Der gleiche Satz besteht in dem allgemeinen Falle, wo A ein beliebiges einfaches Kontinuum bedeutet, d. h. ein aus einem einzigen Stücke bestehendes, sich in keinem Punkte mehrfach überdeckendes Kontinuum.[1]) Es ist nicht einmal schwer zu erkennen, daß das Theorem in solcher Weise ausgesprochen werden kann, daß jedes beliebige Kontinuum zulässig ist.

Nach diesen Vorbetrachtungen kehren wir zu der iterierten Reihe $\mathfrak{P}(x' - a, x - x')$ zurück, die durch die nur der Cauchyschen Bedingung unterworfenen Konstanten c_ν definiert ist.

Diese Reihe enthält außer der Veränderlichen x, die den Variabilitätsbereich D besitzt, die Veränderliche x', die auf das Innere des Kreises C beschränkt bleibt. Der Radius r dieses Kreises C ist nun zwar durch den Satz von Cauchy (s. S. 109) durch die Folge der Konstanten $c_0, c_1, \ldots c_\nu, \ldots$ definiert; indessen ist die Berechnung von r mit Hilfe dieser Konstanten eine äußerst schwierige Aufgabe. Wenn die iterierte Reihe

---

[1]) G. Mittag-Leffler, „Sur la représentation analytique des fonctions monogènes uniformes d'une variable indépendante". Acta Mathematica, Bd. 4, S. 1—79.

Der Satz ist hier von verschiedenen Gesichtspunkten aus bewiesen, unter alleiniger Anwendung der elementaren Weierstraßschen Theorie analytischer Funktionen.

Herr Runge hat ohne meine Arbeit zu kennen, das gleiche Theorem in ähnlicher Allgemeinheit mit Hilfe des Cauchyschen Integralsatzes bewiesen („Zur Theorie der eindeutigen analytischen Funktionen," § 2. Acta Mathematica, Bd. 6, S. 239—244; vgl, S. 229).

Vgl. noch Hurwitz, „Über die Entwicklung der allgemeinen Theorie der analytischen Funktionen in neuerer Zeit." Verhandlungen des I. Internationalen Mathematiker-Kongresses in Zürich, 1897. S. 94.

$\mathfrak{P}(x' - a,\ x - x')$ gegenüber der Reihe $\mathfrak{P}(x - a)$ den Vorzug eines größeren Konvergenzbereiches voraus hat, so hat sie dafür eine wesentliche Eigenschaft der letzteren verloren, nämlich die, lediglich aus den Konstanten c_ν mit Hilfe von numerischen Koeffizienten aufgebaut zu sein, die von diesen Konstanten unabhängig sind.

Es ist erst in den letzten Jahren geglückt, diesen Mangel zu beheben. Um so bemerkenswerter erscheint die Tatsache, daß man dabei den elementaren Rahmen der Theorie der analytischen Funktionen nicht zu verlassen braucht.[1]) Es gibt, wie wir sehen werden, tatsächlich mehrere einfache und direkte Methoden.

Wir sind zu der iterierten Reihe $\mathfrak{P}(x' - a,\ x - x')$ mit Hilfe der Substitution

$$x - a = (x' - a) f(u) \tag{6}$$

gelangt, wobei wir

$$f(u) = 1 + u \qquad \text{(vgl. (2))} \tag{8}$$

gesetzt hatten.

Es liegt auf der Hand, an Stelle der Substitution (8) die allgemeine lineare Substitution einzuführen:

$$f(u) = \frac{l + m u}{p + q u}, \tag{9}$$

[1]) G. Mittag-Leffler, „Om en generalisering af potensserien," 9 mars 1898. „Om den analytiska framställningen af en allmän monogen funktion." 1:sta meddelande, 11 maj 1898. 2:dra meddelande, 11 maj 1898, 3:dje meddelande, 14 sept. 1898. Öfversigt af Kgl. Vet. Ak. Förhandl. Stockholm 1898.

„Sur la représentation analytique d'une branche uniforme d'une fonction monogène," Note 1–5. Acta Mathematica, Bd. 23–29, 15. März 1899 bis 9. Sept. 1904.

„Sulla rappresentazione analitica di un ramo uniforme die una funzione monogena." Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino, vol. 34, 23 Aprile 1899.

„Sur la représentation d'une branche uniforme de fonction analytique." Comptes Rendus, T. 128, 15 mai 1899.

worin l, m, p, q Konstanten bedeuten, die ebenso wie c_0, c_1, c_2, $\ldots c_\nu \ldots$ von $x-a$ und $x'-a$ unabhängig sind. Indem man nun auf gleiche Art wie im klassischen Falle verfährt, d. h. indem man in $\mathfrak{P}(x-a)$ an Stelle der Substitution (6) (8) die allgemeine (6) (9) einführt, die Reihe $\mathfrak{P}((x'-a)f(u))$ nach Potenzen von u ordnet und schließlich in der so erhaltenen Entwicklung an Stelle des u seinen Ausdruck in $\frac{x-a}{x'-a}$, nämlich

$$u = \frac{l(x'-a) - p(x-a)}{q(x-a) - m(x'-a)} \tag{10}$$

einsetzt, erhält man einen Ausdruck, der die Reihe $\mathfrak{P}(x'-a, x-x')$ als Spezialfall enthält. Man sieht leicht, daß man auf diese Weise nichts gewinnt. Der neue Ausdruck hängt innerlich ebenso wie $\mathfrak{P}(x'-a, x-x')$ von dem Radius r ab.

Gleichwohl gibt es eine sehr einfache Methode, dieser Schwierigkeit Herr zu werden, die sich sozusagen ganz von selbst darbietet. Anstatt nämlich für u in der Entwicklung

$$\mathfrak{P}\left((x'-a)\frac{l+mu}{p+qu}\right) = \mathfrak{P}(u) \tag{11}$$

den Ausdruck (10) einzuführen, wollen wir u gleich einer Konstanten setzen. Setzen wir $u=1$ und unterwerfen die Konstanten l, m, p, q der Bedingung:

$$f(1) = 1, \tag{12}$$

d. h.

$$l+m = p+q. \tag{13}$$

Dann hat man in der Reihe $\mathfrak{P}(1)$:

$$x' = x \qquad \text{(vgl. (6), (12))}$$

zu setzen.

Auf diese Weise gelangt man zu einem Ausdruck für $F(x)$, nämlich $\mathfrak{P}(1)$, der auch noch außerhalb des Konvergenzkreises Gültigkeit besitzt, aber nicht mehr mit der Unvollkommenheit behaftet ist, die wir bei $\mathfrak{P}(x'-a, x-x')$ angetroffen hatten.

Es mögen zwei Fälle von verschiedenem Typus einer näheren Betrachtung unterzogen werden:

$$(14)\qquad \begin{cases} f(u) = \dfrac{1+ku}{1+k}; \quad k>0 \\ x-a = (x'-a)\dfrac{1+ku}{1+k} \end{cases}$$

$$(15)\qquad \begin{cases} f(u) = \dfrac{\alpha u}{1-\beta u}; \quad \beta = 1-\alpha; \quad 1 \geq \alpha > 0 \\ x-a = (x'-a)\dfrac{\alpha u}{1-\beta u} \end{cases}$$

Wir wollen zuerst (14) untersuchen. Man hat (vgl. (3), (8)):

$$(16)\qquad \mathfrak{P}(1) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{c_{\mu+\nu}}{\mu!\,\nu!} \left(\frac{x-a}{1+k}\right)^{\mu+\nu} k^{\nu} = \mathfrak{P}_k(x-a).$$

Für $k=0$ findet man wieder die Reihe

$$(1)\qquad \mathfrak{P}(x-a) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{c_\nu}{\nu!}(x-a)^\nu,$$

wie dies vorauszusehen war.

Die Reihe (16) ist mit der Reihe identisch, die man erhält, wenn man in der Gleichung

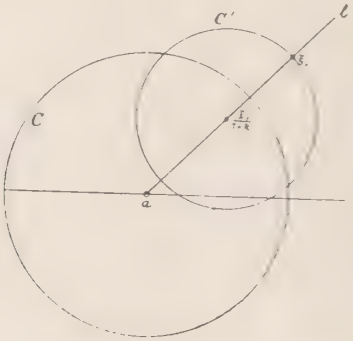
$$(5)\qquad \mathfrak{P}(x'-a,\ x-x') = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{c_{\mu+\nu}}{\mu!\,\nu!}(x'-a)^\mu (x-x')^\nu$$

einsetzt:

$$(17)\qquad \begin{cases} x'-a = \dfrac{x-a}{1+k} \\ x-x' = \dfrac{k(x-a)}{1+k}. \end{cases}$$

Den Konvergenzstern der Reihe $\mathfrak{P}_k(x-a)$ erhält man infolgedessen auf folgende Weise. Es sei l ein von a ausgehender Halbstrahl, auf dem ein Punkt ξ und sein in Bezug auf a homothetischer Punkt $\dfrac{\xi}{1+k}$ liege. Um den Punkt $\dfrac{\xi}{1+k}$ beschreiben wir einen Kreis C', der durch ξ hindurchgeht,

und lassen nun ξ den Halbstrahl l von a aus durchlaufen, bis entweder der mitgleitende Kreis C'' durch einen singulären Punkt von $F'(x)$ geht oder der Punkt $\frac{\xi}{1+k}$ den Umfang des Konvergenzkreises C' erreicht. Sobald einer dieser beiden Fälle eintritt, markieren wir den entsprechenden Punkt ξ_0 und behalten von l nur die Strecke (a, ξ_0) bei.



Wiederholen wir die gleiche Konstruktion auf allen von a ausgehenden Halbstrahlen, so bildet die Gesamtheit aller erhaltenen Strecken (a, ξ_0) einen Stern E_k, der, wie unmittelbar ersichtlich, der Konvergenzstern der Reihe $\mathfrak{P}_k(x-a)$ ist. Dieser Stern enthält den Kreis C und ist seinerseits in dem Sterne D enthalten. Bemerkt sei, daß die auf C gelegenen singulären Punkte von $F'(x)$ gemeinsame Begrenzungspunkte der Sterne E_k und D sind. Sie sind offenbar die einzigen auf C gelegenen Begrenzungspunkte von D oder E_k.

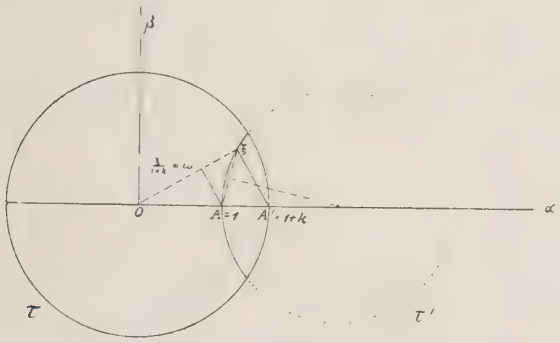
Um eine Vorstellung von der Gestalt des Sternes E_k zu erhalten, untersuchen wir zunächst den Stern der Reihe

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(\mu+\nu)!}{\mu!\,\nu!} \left(\frac{x}{1+k}\right)^{\mu+\nu} k^{\nu}, \tag{18}$$

welche mindestens im Innern des Kreises $C'(|x|=1)$ die Funktion $\frac{1}{1-x}$ darstellt.

Als erstes sei bemerkt, daß E_k im Innern des Kreises τ mit dem Mittelpunkt O und dem Radius $1 + k$ gelegen ist.

Wenn wir ferner den Ort τ' der Punkte ξ konstruieren, für welche die entsprechenden Kreise durch den Punkt A mit der Koordinate 1 gehen, so wird E_k mit dem Anfangspunkt



auf der gleichen Seite dieser Kurve τ' liegen und von dieser Kurve begrenzt sein. Einem solchen Punkt ξ entspricht nun der Punkt ω mit der Koordinate $\frac{\xi}{1+k}$ als Mittelpunkt von C'; der Radius von C' ist dann gleich ωA, während wir andrerseits wissen, daß sein Wert gleich

$$\xi \frac{k}{1+k}$$

ist. Also hat der Ort von ω die folgende Eigenschaft:

$$\frac{\omega O}{\omega A} = \frac{\left|\frac{\xi}{1+k}\right|}{\left|\xi\right| \frac{k}{1+k}} = \frac{1}{k}.$$

Hat der Punkt A' die Koordinate $1 + k$, so genügt der Ort τ' der Relation

$$\frac{\xi O}{\xi A'} = \frac{\omega O}{\omega A} = \frac{1}{k}.$$

Die Kurve τ' ist also ein Kreis, dessen Gleichung, bezogen auf die Achsen $O\alpha$ und $O\beta$ lauten würde:

$$\beta^2 + \left(\alpha + \frac{1}{k-1}\right)^2 = \left(\frac{k}{k-1}\right)^2.$$

Der Stern E_k ist derjenige Teil der Ebene, der innerhalb τ und bezüglich τ' auf der gleichen Seite wie der Anfangspunkt gelegen ist.

Es ist die Gestalt des Sternes in den folgenden typischen Fällen konstruiert worden (siehe Blatt A):

$0 < k < 1$; $k = \frac{1}{2}$; Fig. 1

$k = 1$; Fig. 2

$1 < k < 2$; $k = 1 + \frac{2}{3}$; Fig. 3

$k = 2$; Fig. 4

$k > 2$; $k = 3$; Fig. 5.

Ist $k > 2$, so ist E_k der Kreis τ' mit dem Mittelpunkt $-\frac{1}{k-1}$, der C in dem Punkte $A\,(x = 1)$ berührt. Dieser Kreis nähert sich C, wenn k unbegrenzt wächst.

Die Reihe

$$\mathfrak{P}_k(x-a) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{c_{\mu+\nu}}{\mu!\,\nu!} \left(\frac{x-a}{1+k}\right)^{\mu+\nu} k^{\nu} \tag{16}$$

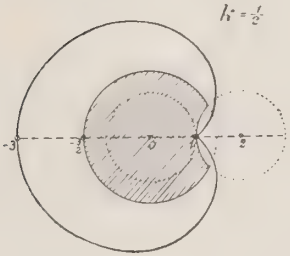
stellt ein erstes, sehr elementares Beispiel eines arithmetischen Ausdrucks vor, der allein aus den Konstanten c_ν und der Variabeln $x - a$ besteht und in einem Bereich, der den Kreis C enthält, in eindeutiger Weise einen Zweig der Funktion $F(x)$ darstellt.

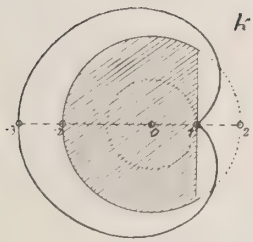
Indessen ist diese Reihe eine iterierte Reihe, während die Reihe

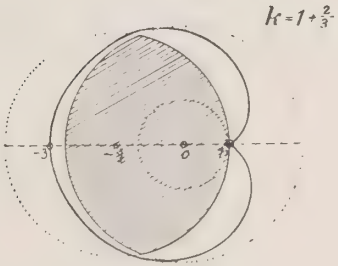
$$\mathfrak{P}(x-a) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{c_\nu}{\nu!} (x-a)^\nu \tag{1}$$

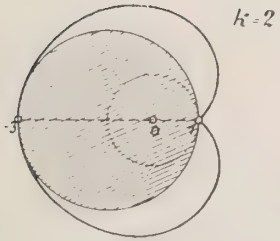
eine einfache Reihe war.

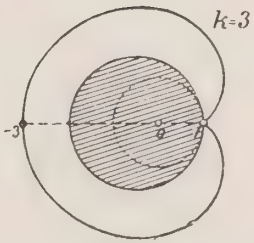
Blatt A.


$k=\frac{1}{2}$
-3
$-\frac{1}{2}$
0
$\frac{1}{2}$


$k=1$
-3
$-\frac{1}{2}$
0
1
2


$k=1+\frac{2}{3}$
-3
$-\frac{1}{2}$
0
1


$k=2$
-3
0
1


$k=3$
-3
0

Die Substitution

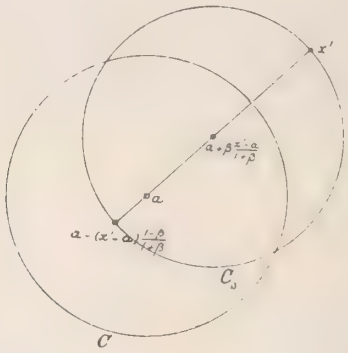
$$(15)\quad \begin{cases} f(u) = \dfrac{\alpha u}{1-\beta u}; \quad \beta = 1-\alpha; \quad 1 \geq \alpha > 0 \\ x - a = (x'-a)\dfrac{\alpha u}{1-\beta u}; \quad u = \dfrac{x-a}{\alpha x' + \beta x - a} \end{cases}$$

setzt uns in den Stand, auch diesem Mangel abzuhelfen.

Lassen wir hier u den Kreis $u < 1$ beschreiben, so beschreibt die Veränderliche x gleichzeitig einen Kreis C_β. Der Durchmesser dieses Kreises ist die Verbindungslinie der beiden Punkte:

$$x = a - (x'-a)\frac{1-\beta}{1+\beta} \quad \text{und} \quad x = x',$$

welche beziehungsweise den Werten $u = -1$ und $u = 1$ entsprechen. Der Kreis C_β liegt im Innern von C, wenn x' im Innern von C gelegen ist.



Die Reihe

$$\mathfrak{P}\left((x'-a)\frac{\alpha u}{1-\beta u}\right)$$

konvergiert sonach für $u < 1$, wenn der Punkt x' in das Innere von C fällt. Jedes Glied dieser Reihe

$$\frac{c_\nu}{\nu!}(x'-a)^\nu\left(\frac{\alpha u}{1-\beta u}\right)^\nu$$

läßt sich in eine Reihe nach Potenzen von u entwickeln, die für $u < 1$ gleichmäßig konvergiert. Der Weierstraßsche Satz über iterierte Reihen[1]) erlaubt uns also, die Reihe

$$\mathfrak{P}\left((x'-a)\,\frac{\alpha u}{1-\beta u}\right)$$

in eine nach Potenzen von u fortschreitende Reihe zu entwickeln:

$$(19)\quad \begin{cases} \mathfrak{P}(x-a) = \mathfrak{P}\left((x'-a)\,\dfrac{\alpha u}{1-\beta u}\right) = \mathfrak{P}(u) \\ = c_0 + \sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\left[\dfrac{c_1}{1!}\beta^{\nu-1}\alpha(x'-a) + \dfrac{c_2}{2!}\dfrac{\nu-1}{1!}\beta^{\nu-2}\alpha^2(x'-a)^2\right. \\ + \cdots + \dfrac{c_\mu}{\mu!}\dfrac{(\nu-1)\ldots(\nu-\mu+1)}{(\mu-1)!}\beta^{\nu-\mu}\alpha^\mu(x'-a)^\mu \\ \left. + \cdots + \dfrac{c_\nu}{\nu!}\alpha^\nu(x'-a)^\nu\right]\cdot u^\nu, \end{cases}$$

die sich für $u = 1$ verwandelt in:

$$(20)\quad \begin{cases} \mathfrak{P}_a(x-a) \\ = c_0 + \sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\left[\dfrac{c_1}{1!}\beta^{\nu-1}\alpha(x-a) + \dfrac{c_2}{2!}\dfrac{\nu-1}{1!}\beta^{\nu-2}\alpha^2(x-a)^2\right. \\ + \cdots + \dfrac{c_\mu}{\mu!}\dfrac{(\nu-1)\ldots(\nu-\mu+1)}{(\mu-1)!}\beta^{\nu-\mu}\alpha^\mu(x-a)^\mu \\ \left. + \cdots + \dfrac{c_\nu}{\nu!}\alpha^\nu(x-a)^\nu\right]. \end{cases}$$

Die Reihe (20) kann, wie wir sehen werden, ebenso wie es bei der Reihe

$$(16)\qquad \mathfrak{P}_k(x-a) = \sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{\mu=0}^{\infty}\frac{c_{\mu+\nu}}{\mu!\,\nu!}\left(\frac{x-a}{1+k}\right)^{\mu+\nu}k^\nu$$

der Fall war, einen Konvergenzbereich besitzen, der über den Konvergenzkreis C der Reihe $\mathfrak{P}(x-a)$ hinausreicht.

Wie man sieht, besteht zwischen den beiden Reihen (16) und (20) der wesentliche Unterschied, daß die Reihe (20) ebenso

[1]) A. a. O.

wie die Reihe $\mathfrak{P}(x-a)$ eine einfache Reihe vorstellt, während (16) eine iterirte Reihe ist. Die Reihen $\mathfrak{P}_a(x-a)$ und $\mathfrak{P}(x-a)$ enthalten nur einen einzigen Grenzübergang, die Reihe (16) dagegen zwei nacheinander auszuführende Grenzübergänge.

Es soll nun zu der genauen Bestimmung des Konvergenzbereiches der Reihe (19) übergegangen werden. Zu diesem Zwecke machen wir die Subsitution (15) in $FA(x-a)$, d. h. in dem Funktionszweig, der mit Hilfe der Konstanten c_ν in dem Hauptstern A definiert ist. Nun lassen wir x' bis zu dem ersten Punkte x_0' gleiten, für den der entsprechende Kreis C_β durch einen Begrenzungspunkt von A, d. h. durch einen singulären Punkt von $F(x)$ geht.

(Da $F(x)$ immer mindestens einen singulären Punkt auf C besitzt, so kann es nie vorkommen, daß C_β den Kreis C umschließt, d. h. daß der Punkt

$$a + (x' - a)\frac{1-\beta}{1+\beta}$$

außerhalb C liegt.)

Bezeichnen wir jetzt mit E_a den Stern, den die Strecke (a, x_0') erzeugt, wenn der zugehörige Strahl um a eine volle Umdrehung macht.

Es soll sodann gezeigt werden, daß (19) konvergiert, wenn x' im Innern von E_a liegt und $|u| \leq 1$ ist.

In der Tat, nach der Entstehungsart des Sternes E_a ist die Funktion $FA(x-a)$ im Innern des Kreises C_β und auf diesem Kreise regulär, wenn der C_β entsprechende Punkt x' im Innern von E_a liegt. Also ist die Funktion

$$FA\left((x'-a)\frac{\alpha u}{1-\beta u}\right)$$

für $|u| < 1$ eine reguläre Funktion von u, sofern x' dem Stern E_a angehört. Nach dem Weierstraßschen Satz über iterierte Reihen[1]) kann sie daher in eine Reihe nach Potenzen

[1]) A. a. O.

von u entwickelt werden, die für $|u| < 1$ konvergiert und mit $P(u)$ bezeichnet werden möge.

Nun wurde schon bemerkt, daß die Werte des Funktionszweiges

$$FA\left((x'-a)\,\frac{\alpha u}{1-\beta u}\right)$$

für $|u| < 1$ durch die Reihe (19) gegeben sind, wenn x' in das Innere von C fällt. Die Reihe $P(u)$ ist also mit der Reihe (19) identisch, woraus hervorgeht, daß (19) konvergiert, solange x' innerhalb E_α liegt und $|u| \leq 1$ ist.

In der Reihe (19) setzen wir jetzt $u = 1$. Dann erhält man $x = x'$ und die Reihe geht über in

$$(20)\quad \begin{cases} \mathfrak{P}_\alpha(x-a) \\ = c_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \left[\frac{c_1}{1!}\,\beta^{\nu-1}\alpha(x-a) + \frac{c_2}{2!}\,\frac{\nu-1}{1!}\,\beta^{\nu-2}\alpha^2(x-a)^2 \right. \\ \left. + \frac{c_3}{3!}\,\frac{\nu-1}{1!}\,\frac{\nu-2}{2!}\,\beta^{\nu-3}\alpha^3(x-a)^3 + \cdots + \frac{c_\nu}{\nu!}\,\alpha^\nu(x-a)^\nu \right], \end{cases}$$

wobei die rechte Seite für jeden Wert x innerhalb E_α konvergiert. Sie konvergiert überdies gleichmäßig und absolut für jeden innerhalb E_α gelegenen Bereich. Ein solcher Bereich kann tatsächlich immer in das Innere eines Sternes E'_α eingeschlossen werden, der innerhalb E_α liegt und diesem genügend angenähert ist. Andrerseits kann man immer eine positive Größe r so fixieren, daß

$$1 < r < \frac{1}{\beta}$$

ist und außerdem der Punkt

$$x = a + (x'-a)\,\frac{\alpha r}{1-\beta r}$$

in das Innere von E_α fällt, wenn x' im Innern von E'_α liegt. Bezeichnen wir nun mit g die obere Grenze von $|\mathfrak{P}_\alpha(x-a)|$ für alle x' im Bereiche E'_α und für $|u| < r$ und erinnern wir uns, daß die Reihe

$$c_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \left[\frac{c_1}{1!} \beta^{\nu-1} a (x' - a) + \frac{c_2}{2!} \beta^{\nu-2} a^2 \frac{\nu-1}{1!} (x' - a)^2 + \cdots + \frac{c_\nu}{\nu!} a^\nu (x' - a)^\nu \right] u^\nu \tag{19}$$

für $|u| < r$ konvergiert, so gibt der Cauchy-Weierstraßsche Satz:[1])

$$\left| \frac{c_1}{1!} \beta^{\nu-1} a (x' - a) + \frac{c_2}{2!} \beta^{\nu-2} a^2 \frac{\nu-1}{1!} (x' - a)^2 + \cdots + \frac{c_\nu}{\nu!} a^\nu (x' - a)^\nu \right| < \frac{g}{r^\nu}.$$

Die Reihe (20) konvergiert also gleichmäßig und absolut für den Bereich E_a' und folglich, da E_a' dem Sterne E_a beliebig nahe kommen kann, in jedem Bereich innerhalb E_a.

Es sei noch bemerkt, daß die Reihe (20) in keinem Punkte x' außerhalb E_a konvergent sein kann. Denn unter dieser Voraussetzung müßte die Reihe (19) für $u < \varrho < 1$ gleichmäßig konvergieren, während x' außerhalb E_a liegt. Ersetzt man dann u durch seinen Ausdruck in $x - a$, so würde die erhaltene Reihe gleichmäßig konvergieren, wenn x auf einen Bereich innerhalb des über der Strecke

$$\left(a - (x' - a) \frac{1 - \beta}{1 + \beta},\ x' \right)$$

als Durchmesser beschriebenen Kreises C_β beschränkt wird. Sie müßte dementsprechend einen für alle Punkte dieses Bereiches regulären Funktionszweig darstellen.

Ordnet man jedoch diese Reihe nach steigenden Potenzen von $x - a$, was für genügend kleines $|x - a|$ immer möglich ist, so erhält man eine mit $\mathfrak{P}(x - a)$ identische Reihe. Also wäre der in Rede stehende Funktionszweig identisch mit dem aus $\mathfrak{P}(x - a)$ hervorgegangenen Zweig. Allein dies ist unmöglich; denn da x' außerhalb E_a liegt, hat dieser Zweig notwendig in dem betrachteten Kreise C_β einen singulären Punkt.

[1]) A. a. O.

Der Stern E_α ist folglich Konvergenzstern für die Reihe $\mathfrak{P}_\alpha(x-a)$, die im Innern von E_α den Zweig $FE_\alpha(x \quad a)$ der Funktion $F(x)$ darstellt. Für $\alpha=1$, $\beta=0$ geht der Stern E_α in den Konvergenzkreis C und die Reihe (20) in die Taylorsche Reihe über.

Für $\alpha'<\alpha$ enthält der Stern $E_{\alpha'}$ den Stern E_α, indem jeder reguläre Punkt von $F(x)$, der auf der Begrenzung von E_α liegt, in das Innere von $E_{\alpha'}$ fällt. Hieraus folgt, daß die Reihe $\mathfrak{P}_{\alpha'}(x-a)$ in jedem Begrenzungspunkte von E_α konvergiert, der regulärer Punkt von $F(x)$ ist.

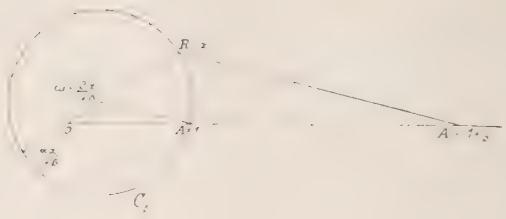
Um nun den Stern E_α einer Funktion $F(x)$ mit bekanntem Hauptstern zu konstruieren, wollen wir zunächst $F(x)=\dfrac{1}{1-x}$ setzen. In diesem Falle lautet die Reihe (20):

$$(21)\quad \left\{1+\sum_{\nu=1}^{\infty}\left[\beta^{\nu-1}\alpha x+\frac{\nu-1}{1!}\beta^{\nu-2}(\alpha x)^2+\frac{(\nu-1)(\nu-2)}{2!}\beta^{\nu-3}(\alpha x)^3 + \cdots+(\alpha x)^\nu\right]=1+\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha x(\beta+\alpha x)^{\nu-1}.\right.$$

Sie stellt einen Zweig von $\dfrac{1}{1-x}$ in einem Sterne E_α dar, den man sehr einfach auf folgende Weise erhält:

Der Begrenzungspunkt von E_α auf jedem Halbstrahl durch O ist der Punkt R mit der Koordinate x', für den der entsprechende Kreis C_β durch den Punkt A mit der Koordinate $x=1$ geht. Der Mittelpunkt ω von C_β hat die Koordinate $\dfrac{\beta x'}{1+\beta}$, der Radius von C_β den Wert $\dfrac{|x'}{1+\beta}$. Der Punkt ω genügt folglich der Beziehung: $\dfrac{\omega O}{\omega A}=\beta$. Konstruieren wir zu A den homothetischen Punkt A' nach dem Verhältnis $\dfrac{1+\beta}{\beta}$, so gilt für R:

$$\frac{RO}{RA'}=\frac{\overline{\omega O}}{\overline{\omega A}}=\beta.$$



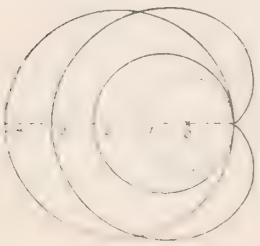
Der Ort für R ist also ein Kreis durch $A\left(\frac{AO}{AA'}=\beta\right)$, der seinen Mittelpunkt auf der Geraden OA hat und die Strecke OA' harmonisch teilt (A' hat die Koordinate $1+\frac{1}{\beta}$). Seine Gleichung lautet:

$$(22)\qquad \eta^2+\left(\xi+\frac{\beta}{1-\beta}\right)^2=\frac{1}{(1-\beta)^2}\qquad (x=\xi+i\eta).$$

Der zweite Schnittpunkt dieses Kreises mit der reellen Achse hat die Abszisse $-\frac{1+\beta}{1-\beta}$: er rückt auf der negativen ξ-Achse ins Unendliche, wenn β sich der Eins nähert.

Der Konvergenzstern E_a der Entwicklung (21) gleicht also dem Konvergenzstern E_k der iterierten Reihe

$$(18)\qquad \sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{\mu=0}^{\infty}\frac{(\mu+\nu)!}{\mu!\,\nu!}\left(\frac{x}{1+k}\right)^{\mu+\nu}k^\nu;\quad k>2$$



insoferne er auch ein Kreis ist, der den Konvergenzkreis im Punkte $x=1$ berührt und ihn umschließt. Aber während für (18) der Radius des Kreises E_k den Wert 2 nie überschreiten konnte, kann der Kreis E_a für die einfache Reihe (21) einen beliebig großen Radius besitzen, sofern nur β genügend nahe an 1 gewählt wird.

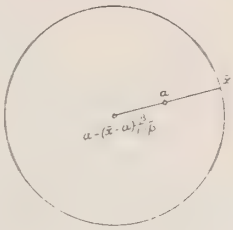
Während also der Kreis E_k immer im Innern von D liegt, kann im Gegensatze dazu der Kreis E_a bei genügender Verkleinerung des a beliebig weit über D hinausreichen.

Nunmehr möge zu dem Falle einer durch die Konstanten $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_\nu \ldots$ definierten Funktion $F(x-a)$ mit dem Hauptstern A übergegangen werden. Wir bezeichnen auf jedem Halbstrahl durch O den ersten singulären Punkt der Funktion $F(x-a)$, den man von O aus erreicht, mit $\bar{x}$ und beschreiben um den Punkt

$$a - (\bar{x} - a)\frac{\beta}{1-\beta}$$

als Mittelpunkt einen Kreis, der durch den Punkt x hindurchgeht.

Wir zeichnen nun ebenso zu allen anderen von a ausgehenden Halbstrahlen die entsprechenden Kreise. Der innerhalb aller dieser Kreise gelegene Teil — jeder Punkt ein einziges Mal gezählt — bildet den Konvergenzstern E_a. Strebt β gegen 1, so nähert sich E_a dem Stern, den Herr Borel „polygone de sommabilité“ [1]) nennt und der seinerseits E_a enthält.



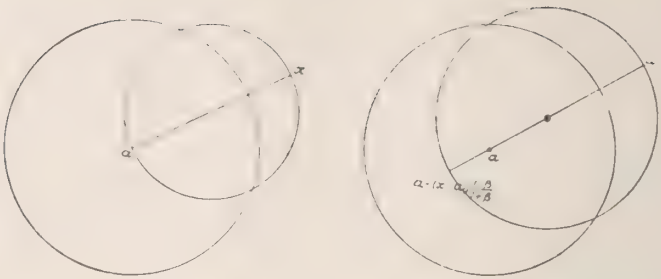
Diese Tatsache erklärt sich sehr einfach. Das Polygon des Herrn Borel kann durch einen Kreis mit dem Durchmesser (a, x) [2]) erzeugt werden, während der Stern E_a durch den Kreis mit dem Durchmesser

$$\left(a - (x-a)\frac{1-\beta}{1+\beta}, x\right)$$

erzeugt wird, der sich dem erzeugenden Kreis des Herrn Borel nähert, wenn β gegen 1 strebt.

[1]) „Leçons sur les séries divergentes“, Kap. IV. Paris 1901.

[2]) G. Mittag-Leffler, „Sur la représentation etc., Note 5“. 1904. Acta Math., Bd. 29, S. 116, 154.



Andrerseits besteht zwischen dem Borelschen Ausdruck:[1])

$$(23)\quad \begin{cases} \lim\limits_{\omega=\infty} \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \left(c_0 + \frac{c_1}{1!}(x-a) + \frac{c_2}{2!}(x-a)^2 \right. \\ \left. + \cdots \frac{c_\nu}{\nu!}(x-a)^\nu \right) e^{-\omega} \frac{\omega^{\nu+1}}{(\nu+1)!} = \int\limits_0^\infty e^{-\omega} \overline{F}(\omega x)\, d\omega; \\ F(x) = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \frac{c_\nu}{(\nu!)^2} (x-a)^\nu \end{cases}$$

und dem Ausdrucke:

$$(20)\quad \begin{aligned} &\mathfrak{P}_a(x-a) \\ &= c_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \left| \frac{c_1}{1!} \beta^{\nu-1} a (x-a) + \frac{c_2}{2!} \frac{\nu-1}{1!} \beta^{\nu-2} a^2 (x-a)^2 \right. \\ &\left. + \frac{c_3}{3!} \frac{(\nu-1)(\nu-2)}{2!} \beta^{\nu-3} a^3 (x-a)^3 + \cdots + \frac{c_\nu}{\nu!} a^\nu (x-a)^\nu \right| \end{aligned}$$

der wesentliche Unterschied, daß der erste eine iterierte Reihe vorstellt, d. h. zwei aufeinander folgende Grenzübergänge enthält, während der zweite eine einfache Reihe ist, zu der man durch ganz elementare Betrachtungen gelangt.

Bisher haben wir drei Ausdrücke, (5), (16), (20), kennen gelernt, die die Funktion $F(x-a)$ in Bereichen darstellen, die größer sind als der Konvergenzkreis C. In all diesen Fällen enthält der Hauptstern A die verschiedenen Sterne C,

[1]) A. a. O.

D, E_k, E_a, ohne daß es möglich gewesen wäre, die Parameter x', k oder a so zu wählen, daß die entsprechenden Sterne jeden im Innern von A gelegenen Bereich enthalten.

Dieses wichtige Problem wird, wie wir sehen werden, durch eine Modifikation der Transformation (15) gelöst, nämlich durch die Substitution:

$$x - a = (x' - a)\frac{a u}{(1 - \beta u)^\gamma}, \tag{24}$$

worin γ einen reellen, passend gewählten Parameter bedeutet.

In Übereinstimmung mit unseren früheren Formeln lassen wir dem Werte $u = 1$ den Punkt $x = x'$ entsprechen und setzen daher:

$$a = (1 - \beta)^\gamma; \quad \beta = 1 - a^{\frac{1}{\gamma}}; \quad 0 < a \leq 1. \tag{25}$$

Betrachten wir zunächst die erzeugende Figur des Sternes. Es sei:

$$v = \xi + i\eta = \frac{a u}{(1 - \beta u)^\gamma}$$
$$u = e^{i\vartheta}.$$

Wenn ϑ variiert, d. h. wenn u in seiner Ebene den Kreis um den Anfang mit dem Radius 1 beschreibt, so beschreibt v die erzeugende Figur. Diese ist symmetrisch zur reellen Achse; $u = 0$ entspricht $v = 0$, $u = 1$ entspricht $v = 1$. Die Kurve umschließt die Strecke (0, 1). Im übrigen ist hauptsächlich der Punkt

$$\xi = -\frac{a}{\left(2 - a^{\frac{1}{\gamma}}\right)^\gamma},$$

der $u = -1$ entspricht, sowie die Ordinate der Kurve von Interesse; es soll gezeigt werden, daß beide mit a gegen Null streben. Es ist:

$$1 - \beta u = 1 - \beta e^{i\vartheta} = \varrho e^{-i\omega},$$

woraus

$$v = \frac{a\, e^{i(\vartheta + \gamma\Theta)}}{\varrho^{\gamma}}$$

$$\eta = \frac{a}{\varrho^{\gamma}} \sin(\vartheta + \gamma\Theta) = \frac{a}{\varrho^{\gamma}} \sin\vartheta \cos\gamma\Theta + \frac{a}{\varrho^{\gamma}} \sin\gamma\Theta \cos\vartheta$$

$$\varrho^2 = 1 + \beta^2 - 2\beta\cos\vartheta = (1-\beta)^2 + 4\beta\sin^2\frac{\vartheta}{2} = a^{\frac{2}{\gamma}} + 4\beta\sin^2\frac{\vartheta}{2}.$$

Also ist:

$$\varrho^2 > 4\beta\sin^2\frac{\vartheta}{2}$$

$$\varrho^2 > a^{\frac{2}{\gamma}}$$

$$\varrho > a^{\frac{1}{\gamma}}$$

Nun ist

$$\eta < \frac{a}{\varrho^{\gamma}} \left|\sin\vartheta\cos\gamma\Theta\right| + \frac{a}{\varrho^{\gamma}} \left|\sin\gamma\Theta\cos\vartheta\right|$$

$$\frac{a}{\varrho^{\gamma}} \left|\sin\vartheta\cos\gamma\Theta\right| < \frac{a\left|\sin\vartheta\right|}{\left|2\sqrt{\beta}\sin\frac{\vartheta}{2}\right|^{\gamma}} \left|\cos\gamma\Theta\right| = \frac{a}{\sqrt{\beta}} \left|2\sqrt{\beta}\sin\frac{\vartheta}{2}\right|^{1-\gamma} \left|\cos\frac{\vartheta}{2}\cos\gamma\Theta\right|$$

$$\frac{a}{\varrho^{\gamma}} \left|\sin\gamma\Theta\cos\vartheta\right| < \left|\sin\gamma\Theta\cos\vartheta\right|.$$

Wenn $\gamma < 1$ vorausgesetzt wird, so konvergiert der erste dieser beiden Ausdrücke mit a gegen Null. Der zweite strebt ebenfalls mit a gegen Null, wenn man von γ annimmt, daß es gleichzeitig gegen Null konvergiert. Wenn man also $\gamma = a$ setzt, so konvergiert η gleichzeitig mit a gegen Null, und zwar gleichmäßig für alle ϑ $(0 < \vartheta < 2\pi)$. Der Punkt

$$\xi = -\frac{a}{\left(2 - a^{\frac{1}{a}}\right)^{a}}$$

strebt ebenfalls gleichzeitig mit a gegen Null.

Man konstruiere nunmehr um die Strecke (a, x') als Achse eine Figur, die zu der vorhergehenden, durch die Gleichungen

$$v = \frac{\alpha u}{(1 - \beta u)^{\alpha}}; \quad \beta = 1 - a^{\alpha}; \quad 0 < \alpha \leqq 1; \quad |u| = 1$$

bestimmten Figur ähnlich ist. Dabei soll das Ähnlichkeitsverhältnis gleich $x' - a$ sein und es sollen die Punkte a und x' den Punkten 0 und 1 entsprechen. Dann erhält man die Kurve, die x vermöge der Substitution

$$x - a = (x' - a) \frac{\alpha u}{(1 - \beta u)^{\alpha}} \tag{26}$$

beschreibt, wenn u den Kreis um den Anfangspunkt mit dem Radius 1 durchläuft. Diese Kurve, die zur Geraden (a, x') symmetrisch ist, nähert sich der Strecke (a, x'), wenn α nach 0 konvergiert.

Es möge nun auf folgende Weise ein Stern H_{α} erzeugt werden: Auf jedem von a ausgehenden Halbstrahl lassen wir den Punkt x' bis zur ersten Lage ξ gleiten, bei welcher die dem Punkte x' entsprechende Figur (26) durch einen Begrenzungspunkt des Hauptsternes geht.

Macht der Halbstrahl eine volle Umdrehung um a, so erzeugt die jeder dieser Lagen entsprechende Strecke (a, ξ) den Stern H_{α}. Man sieht, wenn α nach Null konvergiert, daß der Punkt ξ dem auf dem Strahle $a\xi$ gelegenen Begrenzungspunkte von A beliebig nahe kommt, sofern der Begrenzungspunkt im Endlichen liegt. Liegt er im Unendlichen, so kann für genügend kleines α der Punkt ξ beliebig weit von a entfernt sein. Mit anderen Worten, ist A_1 ein beliebiger innerhalb A gelegener endlicher Bereich, so kann man α stets so klein wählen, daß H_{α} den Bereich A_1 in seinem Innern enthält.

Für $a = 1$ fällt der Stern H_a mit dem Konvergenzkreis C zusammen.

Die gleichen Betrachtungen, die auf die Substitution

$$x - a = (x' - a)\frac{a u}{1 - \beta u} \tag{15}$$

Anwendung gefunden hatten, zeigen hier ebenso, daß der Ausdruck

$$\begin{aligned} & SH_a(x-a) \\ & = c_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty}\left[\frac{c_\nu}{\nu!}a^\nu(x-a)^\nu + \frac{c_{\nu-1}}{(\nu-1)!}\frac{a(\nu-1)}{1!}\beta a^{\nu-1}(x-a)^{\nu-1}\right. \\ & + \frac{c_{\nu-2}}{(\nu-2)!}\frac{a(\nu-2)(a(\nu-2)+1)}{2!}\beta^2 a^{\nu-2}(x-a)^{\nu-2} \\ & \left. + \cdots + \frac{c_1}{1!}\frac{a(a+1)\ldots(a+\nu-2)}{(\nu-1)!}\beta^{\nu-1}a(x-a)\right] \end{aligned} \tag{27}$$

außerhalb H_a in keinem Punkte konvergiert, aber für jeden ganz innerhalb H_a gelegenen Bereich absolut und gleichmäßig konvergiert. Der Stern H_a ist also Konvergenzstern für den Ausdruck (27), der im Innern von H_a den Funktionszweig $FH_a(x)$ darstellt. Dieser Ausdruck stellt also für genügend kleines a in jedem endlichen innerhalb A gelegenen Bereich die entsprechenden Werte von $FA(x)$ dar; für $a = 1$, $\beta = 0$ reduziert er sich auf $\mathfrak{P}(x - a)$. Auch die oben für die Substitution (15) gemachten Bemerkungen über zwei verschiedene Sterne E_a und $E_{a'}$ von der Art, daß $a > a'$, bleiben hier gültig.

Neben der Formel (27) können wir eine andere, von Herrn Fredholm[1]) gegebene Formel anführen, in der die numerischen Koeffizienten sehr einfach definiert sind:

[1]) Ivar Fredholm, „Sur la méthode de prolongement analytique de M. Mittag-Leffler". Översigt af Kungl. Vet. Ak. Förhandl. 13 mars 1901.

$$(28)\quad \begin{cases} c_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} c_1 C_{\nu-1}^{(\nu)} \dfrac{x-a}{H} + c_2 C_{\nu-2}^{(\nu)} \left(\dfrac{x-a}{H}\right)^2 + \cdots \\ \quad + c_{\nu-1} C_1^{(\nu)} \left(\dfrac{x-a}{H}\right)^{\nu-1} + c_\nu \left(\dfrac{x-a}{H}\right)^{\nu} \Big] \dfrac{\beta^\nu}{\nu!} \\ H = -\log(1-\beta) \\ \lambda(\lambda+1)\ldots(\lambda+n-1) = \lambda^n + C_1^{(n)} \lambda^{n-1} + \cdots + C_{n-1}^{(n)} \lambda. \end{cases}$$

Man erhält diese interessante Formel, wenn man in $\mathfrak{P}(x-a)$ die Substitution ausführt:

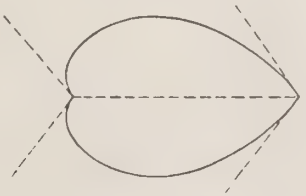
$$(29)\qquad x - a = (x' - a) \frac{\log(1-\beta u)}{\log(1-\beta)}; \quad 0 \leq \beta < 1.$$

Die Ausdrücke (27) und (28) haben beide den Nachteil, daß ihre erzeugenden Figuren (26) und (29) die Halbstrahlen $a\,\xi$ unter einem rechten Winkel schneiden. Die durch sie erzeugten Sterne schmiegen sich dem Stern A daher weniger an, als wenn die erzeugende Figur den Begrenzungspunkt des Sternes unter einem spitzen Winkel erreichen würde, den man durch genügend kleine Wahl des a beliebig verkleinern könnte.

Ein solches Resultat kann erzielt werden mit Hilfe der Substitution:[1])

$$(30)\quad x - a = (x' - a)\, u\, e^{\int_0^u \left[\left(\frac{1+u}{1-u}\right)^{1-a} - 1\right] \frac{du}{u}}; \qquad 0 < a \leq 1,$$

die eine konforme Abbildung des Kreises $u < 1$ auf eine Figur vermittelt, die von zwei bezüglich (a, x') symmetrischen Spiralenbögen begrenzt wird. Der innere Winkel, unter dem



[1]) G. Mittag-Leffler, „Sur la représentation analytique . . . . . Note 3". 1900. Acta Math., Bd. 24, S. 229.

diese herzförmige Kurve den Halbstrahl $a x'$ im Punkte x' schneidet, hat den Wert $\frac{a\pi}{2}$.

Eine andere Lösung des Problems liefert die Substitution[1])

$$(31) \quad x - a = (x' - a)\, a\, \frac{(1+u)^\alpha - (1-u)^\alpha}{a(1+u)^\alpha + (1-u)^\alpha}; \qquad 0 < a \leq 1,$$

die den Kreis $|u| < 1$ auf eine aus zwei Kreisbogen bestehende Figur abbildet, welche sich im Punkte $a - a(x' - a)$ und im Begrenzungspunkte x' des zugehörigen Sternes unter dem Winkel $a\pi$ schneiden.

Wenn die Substitutionen (30) und (31) geometrisch anschaulicher als die vorhergehenden sind, so führen sie dafür auf weniger einfache arithmetische Ausdrücke als (27) und (28). Die numerischen Koeffizienten, die man durch Anwendung dieser Substitutionen erhält, sind in der Tat äußerst kompliziert.

Um andrerseits strenge zu beweisen, daß die aus den erzeugenden Figuren der Substitutionen (30) und (31) gebildeten Sterne tatsächlich Konvergenzsterne sind, muß man den vollständig elementaren Rahmen verlassen, innerhalb dessen wir bisher bleiben konnten.

Da diese Substitutionen die singulären Punkte $u = -1$ und $u = 1$ besitzen, so können sie nicht in Potenzreihen nach u entwickelt werden, die für $u > 1$ noch konvergent sind. Der Weierstraßsche Satz über iterierte Reihen, dessen wir uns bedient haben, ist daher für $u = 1$ nicht mehr anwendbar,

[1]) A. a. O., Note 3, S. 228, 229.

sondern nur für $|u < 1$. Folglich haben wir nicht das Recht, in dem hervorgegangenen Ausdruck $u = 1$ zu setzen.

Herr Phragmén hat mit Hilfe von Betrachtungen, die der Theorie der Fourierschen Reihen entliehen sind, gezeigt, wie man diese Schwierigkeiten überwinden kann und daß man wirklich $u = 1$ setzen darf.[1]) Herr Marcel Riesz ist mit Hilfe des Cauchyschen Integrals zu dem gleichen Ergebnis und sogar noch zu einem allgemeineren Resultat gelangt.[2])

Den Mangel, welchen einerseits (27) und (28) aufwiesen, indem sie keine so eng an die Strecke (a, x') sich anschmiegende erzeugende Figuren lieferten wie die Substitutionen (30) und (31), die verwickelte Rechnung andrerseits, welche die Verwendung von (30) und (31) mit sich bringt, kann man sehr leicht vermeiden, wenn man als erzeugende Figur die Kurve wählt, die ich schon an anderer Stelle angewandt habe, um eine Darstellung mit Hilfe des Laplace-Abelschen Integrals zu erhalten.[3])

Betrachten wir nämlich die Substitution:

$$v = (1 - u)^\alpha; \quad 0 < \alpha \leq 1. \tag{32}$$

Durchläuft u den Kreis mit dem Radius 1 um den Anfangspunkt, so beschreibt v eine zur reellen Achse symmetrische Kurve L, die im Anfangspunkte mit der positiven reellen Achse den Winkel $\frac{\alpha\pi}{2}$ einschließt und die reelle Achse im Punkte $v = 2^\alpha$ unter einem rechten Winkel zum zweiten Male schneidet. Die Gleichung der Kurve lautet in Polarkoordinaten:

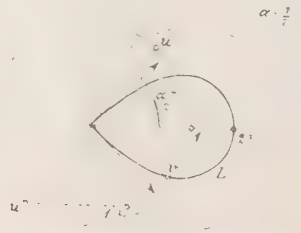
$$r = 2^\alpha \left(\cos \frac{\vartheta}{\alpha}\right)^\alpha; \quad -\frac{\alpha\pi}{2} < \vartheta < \frac{\alpha\pi}{2}. \tag{33}$$

[1]) G. Mittag-Leffler, „Sur la représentation . . ., Note 3". 1900. Acta Math., Bd. 24, S. 229–236.

[2]) Marcel Riesz, „Sur un problème d'Abel. (Extrait de deux lettres à M. G. Mittag-Leffler)". Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Bd. 30, 1910, S. 339—345. Siehe die der vorliegenden Arbeit angefügte Note: „Ein Satz des Herrn Marcel Riesz."

[3]) G. Mittag-Leffler, „Sur la représentation . . ., Note 5". 1904. Acta Math., Bd. 29, S. 116, 154.

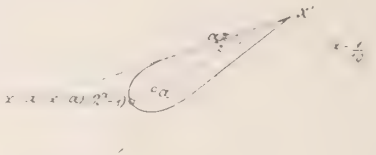
Man erhält sie unmittelbar, wenn man beachtet, daß der Punkt r' mit den Polarkoordinaten $\frac{\vartheta}{\alpha}$ und r', da identisch mit dem Punkte $1-u$, einen Kreis durch den Anfangspunkt mit dem Mittelpunkt $x=1$ beschreibt.



Führt man also in die Potenzreihe $\mathfrak{P}(x-a)$ die Substitution ein:

$$x-a=(x'-a)\,(1-(1-u)^{\alpha}), \tag{34}$$

so beschreibt die Veränderliche x um den Halbstrahl ax' als Achse eine der Kurve (33) ähnliche Kurve, die im Punkte x' mit ax' den Winkel $\frac{\alpha\pi}{2}$ bildet und ax' in dem Punkte $a-(x'-a)(2^{\alpha}-1)$ unter einem rechten Winkel zum zweiten Male schneidet.



In vollständig analoger Weise, wie wir früher die Sterne für die Substitutionen (15), (26), (29), (30) und (31) konstruiert haben, erhält man jetzt einen Stern K_a sowie einen Ausdruck:

$$\begin{aligned} SK_a(x-a) = c_0 + \sum_{\lambda=1}^{\infty} \Big[& \frac{c_1}{1!} k_{\lambda}^{(1)}(x-a) + \frac{c_2}{2!} k_{\lambda}^{(2)}(x-a)^2 \\ & + \cdots + \frac{c_{\lambda}}{\lambda!} k_{\lambda}^{(\lambda)}(x-a)^{\lambda} \Big]. \end{aligned} \tag{35}$$

der K_a zum Konvergenzstern besitzt und im Innern von K_a den Funktionszweig $FK_a(x)$ darstellt. Um zu beweisen, daß K_a tatsächlich Konvergenzstern ist, muß man sich der Methode des Herrn Phragmén[1]) oder der des Herrn Marcel Riesz[2]) bedienen.

Die Koeffizienten $k_\lambda^{(\nu)}$ sind von sehr einfacher Beschaffenheit:

$$k_\lambda^{(\nu)} = \frac{\nu}{1!}\frac{a(1-a)\ldots(\lambda-1-a)}{\lambda!} + \frac{\nu(1-\nu)}{2!}\frac{2a(1-2a)\cdots(\lambda-1-2a)}{\lambda!} + \cdots + \frac{\nu(1-\nu)\ldots(\nu-1-\nu)}{\nu!}\frac{\nu a(1-\nu a)\ldots(\lambda-1-\nu a)}{\lambda!}.$$

Alle diese Zahlen $k_\lambda^{(\nu)}$ sind positiv, da die Koeffizienten von

$$(36)\quad 1-(1-u)^a = \frac{a}{1!}u + \frac{a(1-a)}{2!}u^2 + \frac{a(1-a)(2-a)}{3!}u^3 + \cdots$$

positiv sind und folglich auch die der Maclaurinschen Reihe von $[1-(1-u)^a]^\nu$.

Es ist mir bisher kein Ausdruck bekannt, der gleichzeitig von beiden Gesichtspunkten aus, dem geometrischen und arithmetischen, einfacher als der Ausdruck (35) wäre und ebenfalls allen Anforderungen Genüge leisten würde.

Die Entwicklung besitzt noch einen wichtigen Vorzug.

Sei x' ein Begrenzungspunkt des Sternes K_a. Es sei ferner $a' < a$; ist dann x' ein regulärer Punkt von $F(x-a)$, so wird x' in das Innere von $K_{a'}$ fallen und der Ausdruck $SK_{a'}(x-a)$ folglich im Punkte x' konvergieren. Ist dagegen x' ein singulärer Punkt von $F(x-a)$, so ist dieser Punkt ein Begrenzungspunkt von K_a und von $K_{a'}$. Doch kann es vorkommen, daß der Funktionszweig $FK_a(x-a)$, wenn x im Innern von K_a gegen x' strebt, sich einem und demselben Werte nähert, welchen Weg auch die Veränderliche x innerhalb K_a durch-

[1]) A. a. O. [2]) A. a. O.

läuft. Unter dieser Voraussetzung ist der Ausdruck $FK_{a'}(x-a)$ im Punkte $x = x'$ immer konvergent, und die Konvergenz ist gleichmäßig für jeden Bereich, der x' als Begrenzungspunkt enthält und im übrigen vollständig innerhalb K_a gelegen ist.

Dieser wichtige Satz, der eine unmittelbare Folgerung aus dem weiter oben erwähnten ist, wurde von Herrn Marcel Riesz[1]) für alle Sterne bewiesen, deren erzeugende Figur in dem zugehörigen Begrenzungspunkte x' des Sternes den Strahl ax' unter einem spitzen Winkel trifft.

Bevor wir die bisher behandelten Fälle verlassen, sei ein allgemeiner Satz angeführt, der für alle bisher erhaltenen Sterne gilt, zu denen wir auch den Konvergenzkreis zählen können.

Ist

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu(x)$$

eine der im Vorhergehenden gebildeten Reihen, und liegt der Punkt x' außerhalb des Konvergenzsternes dieser Reihe, so ist der Grenzwert

$$\lim_{n=\infty} \left| \sum_{\nu=0}^{n} f_\nu(x') \right|$$

immer unendlich.

Wäre er nämlich endlich, so hätte man:

$$\left| \sum_{\nu=0}^{n} f_\nu(x') \right| < G$$

und folglich

$$f_\nu(x') < 2G.$$

Die Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu(x') u^\nu$$

wäre für $u < 1$ konvergent. Ersetzen wir jetzt u durch seinen Wert in x und x', so wird der so erhaltene Ausdruck für alle Werte von x innerhalb der zu dem Punkte x' gehörenden er-

[1]) A. a. O.

zeugenden Figur konvergent sein. Er stellt also innerhalb dieses Bereiches einen Funktionszweig dar, der für genügend kleines x' mit dem aus $\mathfrak{P}(x-a)$ hervorgegangenen übereinstimmt. Allein dies ist unmöglich. Denn da x' außerhalb des betrachteten Sternes gelegen ist, kann der aus $\mathfrak{P}(x-a)$ hervorgegangene Funktionszweig nicht für alle solchen Werte von x regulär sein, die noch innerhalb der zu x' gehörenden erzeugenden Figur, aber außerhalb des Hauptsternes liegen. Unsere Behauptung ist damit bewiesen.

Sowohl die verschiedenen Ausdrücke (27), (28) und (35) als auch die aus den Substitutionen (30) und (31) hervorgegangenen Entwicklungen sind alle von der Form:

$$S_\alpha(x-a) = c_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \left[k_1^{(\nu)}(\alpha) \frac{c_1}{1!}(x-a) + k_2^{(\nu)}(\alpha) \frac{c_2}{2!}(x-a)^2 + \cdots + k_\nu^{(\nu)}(\alpha) \frac{c_\nu}{\nu!}(x-a)^\nu \right], \tag{37}$$

worin die Koeffizienten $k_\mu^{(\nu)}(a)\,(\mu = 1, 2, 3, \ldots \nu)$ ganze rationale Funktionen eines Parameters α mit numerischen Koeffizienten bedeuten. Diese Koeffizienten sind unabhängig von der darzustellenden Funktion, d. h. von den Konstanten $c_0, c_1, c_2 \ldots c_\nu \ldots$ die in ihrer Gesamtheit die Funktion definieren. Für $\alpha = 1$ kommt man auf die Taylorsche Reihe zurück. Wählt man andrerseits α hinreichend klein, so erhält man für $S_\alpha(x-a)$ einen Konvergenzstern, der jeden gegebenen ganz innerhalb des Sternes A gelegenen Bereich einschließt. Diese Tatsache legt uns die Frage nahe, ob es nicht möglich ist, einen Ausdruck $S(x-a)$ von der gleichen Form wie $S_\alpha(x-a)$ zu finden, der nicht mehr von dem Parameter α abhängt und für den der Stern A Konvergenzstern ist. Wie wir sehen werden, läßt sich dieses Problem in vollkommen elementarer Weise beantworten, wenn man die Forderung, daß A Konvergenzstern sein soll, fallen läßt, indem man nur die Bedingung beibehält, daß $S(x-a)$ gleichmäßig für jeden innerhalb A gelegenen Bereich konvergieren soll und auf die Divergenz von $S(x-a)$ in jedem Punkte außerhalb A Verzicht leistet.

Sei nämlich n eine gegebene positive ganze Zahl. Dann definieren wir einen Stern E_n auf folgende Weise. Es werde ein beliebiger von a ausgehender Halbstrahl l fixiert. Bezeichnet man mit ϱ_n eine genügend kleine positive Größe und trägt man auf dem Halbstrahl von a aus die Länge $(n-1)\varrho_n$ ab, so wird jeder Kreis mit dem Radius ϱ_n, der um einen beliebigen Punkt dieser Strecke beschrieben ist, dem Hauptstern A angehören. Bezeichnet man mit R_n die obere Grenze der ϱ_n, trägt auf l die Länge nR_n ab und läßt l um a eine ganze Umdrehung machen, so erhält man den Stern E_n. Man sieht, daß der Stern E_1 der Kreis C ist, ferner daß der Stern E_n den Stern E_{n-1} enthält, und daß alle Sterne E_1, E_2, E_3, ... dem Stern A angehören.

Man sieht leicht,[1]) daß man immer n so groß wählen kann, daß E_n in seinem Innern jeden innerhalb A gelegenen Bereich X enthält.

Es sei $\mathfrak{S}_n$ ein neuer, zu E_n konzentrischer und ähnlicher Stern, der durch einen Halbstrahl von der Länge $n\varrho$, $\varrho = \Theta R_n$, $0 < \Theta < 1$, erzeugt werden soll. Es liegt auf der Hand, daß man immer Θ genügend nahe an 1 wählen kann um zu erreichen, daß jeder im Innern von E_n gelegene Bereich in das Innere von $\mathfrak{S}_n$ fällt.[2])

Es werde nun mit g die obere Grenze von $F\mathfrak{S}_n(x-a)$ bezeichnet, wenn x dem Stern $\mathfrak{S}_n$ angehört. Es sei ferner ξ eine Größe, deren absoluter Betrag ξ gleich ϱ ist und es bedeute $\xi_\mu (\mu = 1, 2, \ldots n-1)$ eine Folge von Punkten auf dem gleichen Halbstrahl, von der Eigenschaft, daß die Entfernung zweier Punkte $\xi_{\mu+1}$ und ξ_μ den Wert ϱ nicht überschreitet und daß die Entfernung zwischen ξ_{n-1} und dem Begrenzungspunkt von $\mathfrak{S}_n$ auf diesem Halbstrahl nicht kleiner als ϱ sein soll. Unter diesen Voraussetzungen gilt, wenn x dem Stern $\mathfrak{S}_n$ angehört:

[1]) Vgl. G. Mittag-Leffler, „Sur la représentation . . .". 1899. Acta Mathematica, Bd. 23, S. 50/51.

[2]) A. a. O.

$$F\mathfrak{E}_n(x-a) = F\mathfrak{E}_n(\xi_{n-1}+\xi) = \sum_{\lambda_1=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_1!} F^{(\lambda_1)}(\xi_{n-1})\,\xi^{\lambda_1}$$

$$\left| \sum_{\lambda_1=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_1!} F^{(\lambda_1)}(\xi_{n-1})\,\xi^{\lambda_1} \right| \leq g.$$

Daher ist nach dem Cauchy-Weierstraßschen Satz:

$$\frac{1}{\lambda_1!} F^{(\lambda_1)}(\xi_{n-1}) < g\,\varrho^{-\lambda_1}.$$

Führt man jetzt eine neue Größe ξ' ein, deren absoluter Betrag $|\xi'|$ gleich $\vartheta\varrho$ ist $(0<\vartheta<1)$, so erhält man:

$$\left| \frac{1}{\lambda_1!} F^{(\lambda_1)}(\xi_{n-1})\,\xi'^{\lambda_1} \right| < g\,\vartheta^{\lambda_1}.$$

Setzt man andrerseits $\xi_{n-1} = \xi_{n-2} + \xi$, so ist

$$\frac{1}{\lambda_1!} F^{(\lambda_1)}(\xi_{n-1})\,\xi'^{\lambda_1} = \sum_{\lambda_2=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_1!\,\lambda_2!} F^{(\lambda_1+\lambda_2)}(\xi_{n-2})\,\xi^{\lambda_2}\,\xi'^{\lambda_1}.$$

Folglich:

$$\left| \frac{1}{\lambda_1!\,\lambda_2!} F^{(\lambda_1+\lambda_2)}(\xi_{n-2})\,\xi'^{\lambda_1} \right| < g\,\vartheta^{\lambda_1}\varrho^{-\lambda_2}$$

$$\left| \frac{1}{\lambda_1!\,\lambda_2!} F^{(\lambda_1+\lambda_2)}(\xi_{n-2})\,\xi'^{\lambda_1+\lambda_2} \right| \leq g\,\vartheta^{\lambda_1+\lambda_2}$$

$$\sum_{\lambda_2=0}^{\infty} \left| \frac{1}{\lambda_1!\,\lambda_2!} F^{(\lambda_1+\lambda_2)}(\xi_{n-2})\,\xi'^{\lambda_1+\lambda_2} \right| < g\,\frac{\vartheta^{\lambda_1}}{1-\vartheta}$$

$$(38)\qquad \sum_{\lambda_1=m_1+1}^{\infty} \sum_{\lambda_2=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_1!\,\lambda_2!} F^{(\lambda_1+\lambda_2)}(\xi_{n-2})\,\xi'^{\lambda_1+\lambda_2} \leq g\,\frac{\vartheta^{m_1+1}}{(1-\vartheta)^2}$$

und ebenso

$$\sum_{\lambda_2=m_2+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_1!\,\lambda_2!} F^{(\lambda_1+\lambda_2)}(\xi_{n-2})\,\xi'^{\lambda_1+\lambda_2} < g\,\frac{\vartheta^{\lambda_1+m_2+1}}{1-\vartheta}$$

$$(39)\qquad \sum_{\lambda_1=0}^{m_1} \sum_{\lambda_2=m_2+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_1!\,\lambda_2!} F^{(\lambda_1+\lambda_2)}(\xi_{n-2})\,\xi'^{\lambda_1+\lambda_2} < g\,\frac{\vartheta^{m_2+1}}{1-\vartheta}\,\frac{1-\vartheta^{m_1+1}}{1-\vartheta} < g\,\frac{\vartheta^{m_2+1}}{(1-\vartheta)^2}.$$

Setzt man

$$(40)\quad \begin{cases} F\mathfrak{E}_n(\xi_{n-1}+\xi') = F\mathfrak{E}_n(\xi_{n-2}+\xi'+\xi') \\ = \sum_{\lambda_1=0}^{m_1}\sum_{\lambda_2=0}^{m_2} \frac{1}{\lambda_1!\,\lambda_2!} F^{(\lambda_1+\lambda_2)}(\xi_{n-2})\,\xi'^{\lambda_1+\lambda_2} + \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \end{cases}$$

$$(41)\quad \begin{cases} \varepsilon_1 = \sum_{\lambda_1=m_1+1}^{\infty}\sum_{\lambda_2=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_1!\,\lambda_2!} F^{(\lambda_1+\lambda_2)}(\xi_{n-2})\,\xi'^{\lambda_1+\lambda_2} \\ \varepsilon_2 = \sum_{\lambda_1=0}^{m_1}\sum_{\lambda_2=m_2+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_1!\,\lambda_2!} F^{(\lambda_1+\lambda_2)}(\xi_{n-2})\,\xi'^{\lambda_1+\lambda_2}, \end{cases}$$

so ist also

$$\varepsilon_1 < g\frac{\vartheta^{m_1+1}}{(1-\vartheta)^2}$$

$$\varepsilon_2 < g\frac{\vartheta^{m_2+1}}{(1-\vartheta)^2}$$

Verfährt man nun mit $F^{(\lambda_1+\lambda_2)}(\xi_{n-2})$ ebenso wie früher mit $F^{(\lambda_1)}(\xi_{n-1})$, so erhält man durch Einführung von

$$F^{(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)}(\xi_{n-3})$$

die Gleichung:

$$(42)\quad \begin{cases} F\mathfrak{E}_n(\xi_{n-1}+\xi') = F\mathfrak{E}_n(\xi_{n-2}+\xi'+\xi') = F\mathfrak{E}_n(\xi_{n-3}+\xi'+\xi'+\xi') \\ = \sum_{\lambda_1=0}^{m_1}\sum_{\lambda_2=0}^{m_2}\sum_{\lambda_3=0}^{m_3} \frac{1}{\lambda_1!\,\lambda_2!\,\lambda_3!} F^{(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)}(\xi_{n-3})\,\xi'^{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3} + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3, \end{cases}$$

wo

$$(43)\quad \varepsilon_3 = \sum_{\lambda_1=0}^{m_1}\sum_{\lambda_2=0}^{m_2}\sum_{\lambda_3=m_3+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_1!\,\lambda_2!\,\lambda_3!} F(\xi_{n-3})\,\xi'^{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}$$

und

$$\varepsilon_3 < g\frac{\vartheta^{m_3+1}}{(1-\vartheta)^3}.$$

Fährt man in dieser Weise fort, so gelangt man schließlich zu der Formel:

$$(44)\quad F\mathfrak{E}_n(x-a) =$$

$$\sum_{\lambda_1=0}^{m_1}\sum_{\lambda_2=0}^{m_2}\cdots\sum_{\lambda_n=0}^{m_n} \frac{1}{\lambda_1!\,\lambda_2!\ldots\lambda_n!} F^{(\lambda_1+\lambda_2+\cdots\lambda_n)}(a)\binom{x-a}{n}^{\lambda_1+\lambda_2+\cdots\lambda_n}$$

$$+ \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_n.$$

wo

$$(45)\qquad \begin{cases} \varepsilon_1 \leq g\dfrac{\vartheta^{m_1+1}}{(1-\vartheta)^2} \\ \varepsilon_2 \leq g\dfrac{\vartheta^{m_2+1}}{(1-\vartheta)^2} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \varepsilon_n \leq g\dfrac{\vartheta^{m_n+1}}{(1-\vartheta)^n}. \end{cases}$$

Bezeichnet man mit δ eine beliebig kleine positive Größe, so erhält man also durch genügende Vergrößerung der Zahlen $m_1, m_2, \ldots, m_n$ für jeden im Innern des Sternes E_n gelegenen Bereich X die Beziehung:

$$(46)\qquad \left| FE_n(x-a) - \sum_{\lambda_1=0}^{m_1}\sum_{\lambda_2=0}^{m_2}\cdots\sum_{\lambda_n=0}^{m_n}\frac{1}{\lambda_1!\,\lambda_2!\ldots\lambda_n!}F^{(\lambda_1+\lambda_2+\cdots\lambda_n)}(a)\binom{x-a}{n}^{\lambda_1+\lambda_2+\cdots\lambda_n}\right| < \delta.$$

Zwar wurde diese Ungleichung nur unter der Voraussetzung bewiesen, daß X einem zu $\mathfrak{E}_n$ konzentrischen und ähnlichen Stern $\mathfrak{E}_n^{(\vartheta)}$ angehört, der in seinem Innern gelegen ist und durch einen Halbstrahl von der Länge

$$n\varrho', \quad \varrho' = \vartheta\,\varrho\,(0 < \vartheta < 1)$$

erzeugt wird. Man sieht indessen, wenn man die beiden Größen ϑ und Θ dem Werte 1 sich genügend nähern läßt, daß die Ungleichung für jeden zu E_n konzentrischen und ähnlichen Stern und folglich für jeden innerhalb E_n gelegenen Bereich X richtig ist.

Setzt man

$$(47)\qquad m_1 = m_2 = \ldots m_n = m$$

so verwandelt sich die Ungleichung (46) in[1])

[1]) Vgl. G. Mittag-Leffler, „Sur la représentation analytique d'une branche uniforme d'une fonction monogène, Note 2." 1900. Acta Mathematica, Bd. 24, S. 201.

(48) $$FE_n(x-a) = \lim_{m=\infty} \sum_{\lambda_1=0}^{m} \sum_{\lambda_2=0}^{m} \cdots \sum_{\lambda_n=0}^{m} \frac{1}{\lambda_1!\,\lambda_2! \ldots \lambda_n!} F^{(\lambda_1+\lambda_2+\cdots\lambda_n)}(a) \left(\frac{x-a}{n}\right)^{\lambda_1+\lambda_2+\cdots\lambda_n}.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung konvergiert gleichmäßig für jeden Bereich X im Innern von E_n und stellt folglich $FE_n(x-a)$ in einem solchen Bereich dar.

Von der Formel (48) gelangt man leicht zu einem für jeden Bereich innerhalb des Sternes A gültigen Ausdruck.

Da nämlich $m_\mu = m$ gesetzt wurde ($\mu = 1, 2, \ldots m$), so ist

$$\varepsilon_1 | < |\varepsilon_2 < \cdots \varepsilon_n$$

und folglich

(49) $$|\varepsilon_1| + |\varepsilon_2| + |\varepsilon_3| + \cdots \varepsilon_n| < n|\varepsilon_n| = ng\frac{\vartheta^{m+1}}{(1-\vartheta)^n} = ng\left(\frac{\vartheta}{1-\vartheta}\right)^n \vartheta^p;$$

$$p = m + 1 - n.$$

Wir hatten vorausgesetzt, daß ϑ eine positive Größe sein soll, die dem Werte 1 beliebig nahe kommen darf. Also wächst

$$\beta = \frac{\vartheta}{1-\vartheta}$$

über alle Grenzen, wenn ϑ nach 1 strebt.

Setzen wir nun

$$\beta = \frac{\vartheta}{1-\vartheta} = \log \omega(n),$$

wo $\omega(n)$ eine reelle positive, mit n unbegrenzt wachsende Größe sein soll, so erhalten wir:

$$\frac{1}{\vartheta} = 1 + \frac{1}{\log \omega(n)}$$

$$n\beta^n \vartheta^p = e^{\beta\left(p\log\frac{1}{\vartheta} - \frac{n\beta\log\beta}{p} - \frac{\beta\log n}{p}\right)}; \quad p = m + 1 - n.$$

Setzt man

(50) $$m = n\omega(n),$$

d. h.

$$p = n\omega(n)\left(1 + \frac{1}{n\omega(n)} - \frac{1}{\omega(n)}\right),$$

so sieht man, daß $\frac{\beta \log n}{p}$ sowie $\frac{n\beta \log \beta}{p}$ nach Null konvergieren, wenn n unbegrenzt wächst, während $\beta \log \frac{1}{\beta}$ den Grenzwert 1 annimmt und $\frac{p}{\beta}$ gleichzeitig mit n über alle Grenzen wächst.

Führt man nun in der Gleichung (48) für m die erste ganze Zahl größer als $n\omega(n)$ ein, so verwandelt sich diese Gleichung in die Relation:

$$(51) \qquad FA(x-a) =$$

$$\lim_{n=\infty} \sum_{\lambda_1=0}^{m} \sum_{\lambda_2=0}^{m} \cdots \sum_{\lambda_n=0}^{m} \frac{1}{\lambda_1!\,\lambda_2! \ldots \lambda_n!} F^{(\lambda_1+\lambda_2+\cdots\lambda_n)}(a) \left(\frac{x-a}{n}\right)^{\lambda_1+\lambda_2+\cdots\lambda_n}$$

(m = erste ganze Zahl größer als $n\omega(n)$),

deren rechte Seite gleichmäßig und absolut in jedem innerhalb des Sterns A gelegenen Bereich konvergiert.[1]) Die Aus-

[1]) Vgl. G. Mittag-Leffler, „Om den analytiska framställningen af en allmän monogen funktion". 11 maj 1898. Öfversigt af Kgl. Vet. Ak. Förhandl. Stockholm 1898.

A. a. O., G. Mittag-Leffler, „Sur la représentation analytique d'une branche uniforme d'une fonction monogène". 1899. Acta Math., Bd. 23, S. 60.

Der Ausdruck

$$\sum_{\lambda_1=0}^{n^2} \sum_{\lambda_2=0}^{n^4} \cdots \sum_{\lambda_n=0}^{n^{2n}} \frac{1}{\lambda_1!\,\lambda_2! \ldots \lambda_n!} F^{(\lambda_1+\lambda_2+\cdots\lambda_n)}(a) \left(\frac{x-a}{n}\right)^{\lambda_1+\lambda_2+\cdots\lambda_n},$$

den man in diesen Arbeiten findet und der unter anderem in den folgenden Werken wiedergegeben ist:

Emile Borel, „Leçons sur les séries divergentes". Paris 1901 (Gauthier-Villars). Kap. V, S. 156—172;

G. Vivanti, „Theorie der eindeutigen analytischen Funktionen". Umarbeitung unter Mitwirkung des Verfassers, deutsch herausgegeben v. A. Gutzmer. Leipzig 1906 (B. G. Teubner), S. 351—364;

ist viel weniger einfach als der Ausdruck (51). Dieser ergibt sich überdies fast unmittelbar aus den ersten Grundbegriffen der Theorie der

drücke (48) und (51) haben beide die Form von Grenzwerten. Es ist evident, daß man sie in Reihen umformen kann, deren einzelne Glieder Polynome in $x - a$ sind. Bezeichnet man die rechte Seite jedes dieser Ausdrücke mit $S_m(x)$, so wird die entsprechende Reihe

$$F(a) + \sum_{m=0}^{\infty} (S_{m+1}(x) - S_m(x)). \tag{52}$$

Kehren wir andrerseits zurück zu unseren Ausdrücken

$$S_a(x-a) = c_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(k_1^{(\nu)}(a) \frac{c_1}{1!}(x-a) + k_2^{(\nu)}(a) \frac{c_2}{2!}(x-a)^2 + \cdots + k_\nu^{(\nu)}(a) \frac{c_\nu}{\nu!}(x-a)^\nu \right); \quad k_\mu^{(\nu)}(a) = 0 \text{ für } \mu > \nu, \tag{37}$$

so sieht man, daß diese in der Form geschrieben werden können:

$$S_a(x-a) = c_0 + \lim_{m=\infty} \left(k_1^{(m)}(a) \frac{c_1}{1!}(x-a) + k_2^{(m)}(a) \frac{c_2}{2!}(x-a)^2 + \cdots k_m^{(m)}(a) \frac{c_m}{m!}(x-a)^m \right) \tag{53}$$

$$k_\mu^{(m)}(a) = k_\mu^{(\mu)}(a) + k_\mu^{(\mu+1)}(a) + \cdots + k_\mu^{(m)}(a)$$
$$k_\mu^{(m)}(a) = 0 \text{ für } m < \mu.$$

analytischen Funktionen nach Weierstraß, während die Herleitung des anderen Ausdrucks, obgleich auf denselben Grundlagen beruhend, recht weitläufig war.

Es ist noch zu bemerken, daß man durchaus nicht leichter ans Ziel gelangt, wenn man zunächst für $\frac{1}{1-x}$ den Ausdruck herleitet und dann zu dem allgemeinen Falle mit Hilfe des Cauchyschen Integrals übergeht. Dies bedeutet im Gegenteil einen nutzlosen Umweg. Die Ableitung für den Ausdruck (51) ist vollkommen identisch mit derjenigen, die erforderlich wäre, um das entsprechende Resultat für $\frac{1}{1-x}$ zu erhalten.

(Vgl. das Buch von Herrn Jacques Hadamard, „La série de Taylor et son prolongement analytique". Scientia, Mai 1901, S. 55–60.

G. Mittag-Leffler, „Sur la représentation arithmétique des fonctions analytiques générales d'une variable complexe." Atti de IV Congresso internaz. dei matematici, Roma, 6–11 Aprile 1908. Roma 1909, S. 75.)

Ganz ebenso, wie wir verfuhren, um den Ausdruck

$$(51) \qquad FA(x-a) =$$

$$\lim_{n=\infty} \sum_{\lambda_1=0}^{m} \sum_{\lambda_2=0}^{m} \cdots \sum_{\lambda_n=0}^{m} \frac{1}{\lambda_1!\,\lambda_2! \ldots \lambda_n!} F^{(\lambda_1+\lambda_2+\cdots\lambda_n)}(a) \left(\frac{x-a}{n}\right)^{\lambda_1+\lambda_2+\cdots\lambda_n}$$

zu erhalten, kann man auch leicht eine Beziehung zwischen a und der ganzen positiven Zahl m aufstellen, derart, daß (53) für jeden innerhalb A gelegenen Bereich konvergiert. Wir legen der erzeugenden Funktion $f(u\,|\,a)$ die gleichen Bedingungen auf wie in den Fällen

$$(26) \qquad f(u\ a) = \frac{a\,u}{(1-\beta u)^{a}}$$

$$(29) \qquad f(u\,|\,a) = \frac{\log(1-\beta u)}{\log(1-\beta)}$$

nämlich: es soll $f(0\,|\,a) = 0$, $f(1\ a) = 1$, $f(u\ 1) = u$ sein, es soll ferner $f(u\ a)$ für alle Punkte des Kreises $u \leq 1$ regulär bleiben und das durch $f(u\ a)$ vermittelte Bild dieses Kreises soll die Strecke $(0, 1)$ immer enger umschmiegen, wenn a nach Null strebt.

Unter diesen Bedingungen ist

$$(54) \qquad \begin{aligned} F((x'-a)f(u\,|\,a)) &= \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{F^{(\nu)}((x'-a)f(u\,|\,a))_{u=0}}{\nu!}\, u^{\nu}; \\ F^{(\nu)}((x'-a)f(u\ a)) &= \frac{\partial^{(\nu)} F((x'-a)f(u\ a))}{\partial u^{\nu}}. \end{aligned}$$

Da diese Reihe für $u = \varrho$ konvergiert, wenn ϱ größer als 1, aber genügend nahe an 1 ist, so ist nach dem Cauchy-Weierstraßschen Satz:

$$\left| \frac{F^{(\nu)}((x'-a)f(u\ a))_{u=0}}{\nu!} \right| < g\,\vartheta^{\nu}; \qquad \vartheta = \frac{1}{\varrho} < 1$$

und folglich

$$\sum_{\nu=m+1}^{\infty} \left| \frac{F^{(\nu)}((x'-a)f(u\,|\,a))_{u=0}}{\nu!} \right| \leq g\,\frac{\vartheta^{m+1}}{1-\vartheta} = g\,\frac{\vartheta}{1-\vartheta}\,\vartheta^{m}.$$

Man setze nun:

$$a = \frac{1}{n}: \qquad m = \omega(n),$$

wo $\omega(n)$ eine positive Größe ist, die gleichzeitig mit n über alle Grenzen wächst. Wählen wir $\omega(n)$ so, daß

$$\vartheta = e^{-\frac{1}{\omega(n)^{\frac{1}{2}}}},$$

so erhalten wir:

$$\frac{\vartheta}{1-\vartheta} < \omega(n)^{\frac{1}{2}}; \qquad \vartheta^m = e^{-\frac{m}{\omega(n)^{\frac{1}{2}}}} = e^{-\omega(n)^{\frac{1}{2}}}.$$

Folglich strebt der absolute Wert von

$$\varepsilon = \sum_{\nu=m+1}^{\infty} \frac{F^{(\nu)}((x'-a)f(u\ a))_{u=0}}{\nu!}$$

nach Null, wenn n ins Unendliche wächst, und man erhält die Gleichung:

$$(55)\quad \begin{cases} FA(x-a) = c_0 + \lim\limits_{n=\infty} \sum\limits_{\nu=1}^{m} \left[k_1^{(\nu)} \left(\frac{1}{n}\right) \frac{c_1}{1!} (x-a) + k_2^{(\nu)} \left(\frac{1}{n}\right) \frac{c_2}{2!} (x-a)^2 \right. \\ \left. + \cdots + k_\nu^{(\nu)} \left(\frac{1}{n}\right) \frac{c_\nu}{\nu!} (x-a)^\nu \right] = c_0 + \lim\limits_{n=\infty} \left(k_1^{(m)} \left(\frac{1}{n}\right) \frac{c_1}{1!} (x-a) \right. \\ \left. + k_2^{(m)} \left(\frac{1}{n}\right) \frac{c_2}{2!} (x-a)^2 + \cdots + k_m^{(m)} \left(\frac{1}{n}\right) \frac{c_m}{m!} (x-a)^m \right) \\ (m = \text{erste ganze Zahl größer als } \omega(n)), \end{cases}$$

deren rechte Seite absolut und gleichmäßig für jeden im Innern des Hauptsterns A gelegenen Bereich konvergiert.

Wie schon hervorgehoben wurde, besteht ein wesentlicher Unterschied zwischen den zuerst erhaltenen Ausdrücken (37) und (53) und den neuen Ausdrücken (48), (51) und (55). Die ersteren besitzen, wie wir gesehen haben, einen Konvergenzstern, der sich A beliebig nähert, wenn ein gewisser Parameter a nach Null strebt. In diesem Falle konvergiert der Ausdruck für jeden innerhalb des Konvergenzsterns gelegenen Bereich gleichmäßig, divergiert dagegen in jedem Punkt außer-

halb des Sterns. Im zweiten Falle konvergieren zwar die Ausdrücke für jeden Bereich im Innern von A, aber die Bedingung, daß in jedem Punkte außerhalb Divergenz bestehen soll, wurde unterdrückt.

Man kennt seit der im Jahre 1880 veröffentlichten Arbeit von Weierstraß „Zur Funktionenlehre“ [1]) den wesentlichen Unterschied, der zwischen einem arithmetischen Ausdruck [2]) und der analytischen Funktion besteht. Man kann es geradezu als die allgemeine Regel bezeichnen, daß ein arithmetischer Ausdruck verschiedene analytische Funktionen darstellt, und als bemerkenswerte Ausnahme, wenn der Ausdruck nur ein und denselben Funktionszweig darstellt, aber außerhalb eines gewissen Bereiches keinen Sinn mehr besitzt. Gerade dieser letztere Fall liegt bei der Taylorschen Reihe und ebenso bei (37) und (53) vor. Insoferne also diese Ausdrücke diese wesentliche Eigenschaft der Taylorschen Reihe aufweisen, stellen sie eine wirkliche Verallgemeinerung dieser Reihe dar.

Was nun andrerseits die Ausdrücke (48), (51) und (55) betrifft, so liegt gar nichts besonders Bemerkenswertes in der Tatsache, daß sie außerhalb A bei passender Wahl der Konstanten $c_0, c_1, c_2 \ldots c_\nu \ldots$ konvergieren können. Man kann tatsächlich Ausdrücke dieser Art bilden, die für Kontinuen außerhalb A konvergent sind und für diese Kontinuen analytische Funktionen darstellen, die mit der durch die Konstanten $c_0, c_1, c_2 \ldots c_\nu \ldots$ definierten Funktion nichts zu tun haben. Es ist sogar der Fall nicht ausgeschlossen, daß ein solcher Ausdruck gleichmäßig für einen zweidimensionalen Be-

Die starken Linien sind Teile der Begrenzung des Sterns.

[1]) Monatsber. d. Kgl. Akad. d. Wiss. vom 12. Aug. 1880. Weierstraß, Werke, Bd. 2, S. 201—233.

[2]) Die Bezeichnung „arithmetischer Ausdruck“ im Gegensatz zu „analytische Funktion“ findet sich bei Weierstraß nicht. Sie wurde in diesem Sinne anscheinend das erste Mal in der Abhandlung: „Sur la représentation des fonctions monogènes uniformes . . .“ von G. Mittag-Leffler angewendet. Acta Math., Bd. 4, S. 1—79.

reich konvergiert, der zum Teil in das Innere, zum Teil in das Äußere des Sterns A fällt. (Die schraffierte Figur.) Er würde also für diesen Bereich eine Fortsetzung des Funktionszweiges $FA(x)$ darstellen. Man kann auch erreichen, daß ein solcher Ausdruck bei passender Wahl der Konstanten $c_0, c_1, c_2 \ldots c_\nu \ldots$ auf einem Abschnitt eines Halbstrahls gleichmäßig konvergiert, der vom Anfangspunkt ausgehend beliebig weit über den Begrenzungspunkt des Sterns hinausreicht, und auf diesem Abschnitt eine stetige Folge von Werten annimmt; dabei können die Werte, die dem außerhalb des Sterns gelegenen Teil entsprechen, in vollkommen willkürlicher Weise gewählt werden.

Nichtsdestoweniger scheint es beim ersten Blick nicht ausgeschlossen, daß Ausdrücke von der Form

$$\lim_{n=\infty} G(x; n)$$

($G(x; n)$ = ganze rationale Funktion von x, deren Glieder sich von $c_0, c_1 x, c_2 x^2, \ldots$ nur um numerische Faktoren unterscheiden, die von dem Parameter n abhängen.) existieren, für welche der Stern A immer Konvergenzstern bleibt, gleichviel, wie man die Konstanten $c_0, c_1, c_2, \ldots c_n \ldots$ auch wählt. Herr Borel hat durch eine tiefgehende Untersuchung gezeigt, daß dies nicht der Fall ist.[1]) Herr Phragmén ist noch weiter gegangen, indem er zeigte, daß es auch dann nicht der Fall sein kann, wenn man unter $G(x; n)$ ein ganze transzendente Funktion versteht.

Zu diesem bemerkenswerten Resultat kann man auf folgende Weise gelangen.

Wir setzen voraus, es sei

$$FA(x) = \lim_{\omega=\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} (\nu, \omega) \frac{c_\nu}{\nu!} x^\nu, \tag{56}$$

wo ω reell und positiv ist und die (ν, ω) numerische Koeffizienten bedeuten, die von ν und ω abhängen, während die Reihe

[1]) „Leçons sur les séries divergentes." Paris 1901. (Gauthier-Villars.) S. 172—175.

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} (\nu, \omega) \frac{c_\nu}{\nu!} x^\nu$$

für jeden positiven Wert von ω eine in Bezug auf x stets konvergente Reihe sein soll. Es wird ferner angenommen, daß die obere Grenze von

$$\left| \sum_{\nu=0}^{\infty} (\nu, \omega) \frac{c_\nu}{\nu!} x^\nu \right|$$

für jeden endlichen Bereich von ω, x endlich ist.

Wir setzen

$$(57) \quad G(x; \omega) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (\nu, \omega) x^\nu \quad \text{(stets konvergente Reihe), d. h.}$$

$$(58) \quad \frac{1}{1-x} = \lim_{\omega=\infty} G(x; \omega).$$

Der Hauptstern dieser Funktion ist die ganze Ebene außer der Geraden $(1, \infty)$.

Es werde andrerseits angenommen, daß der Hauptstern der durch die Konstanten $c_0, c_1, c_2, \ldots c_\nu \ldots$ definierten Funktion der Kreis $|x| < 1$ ist und daß diese Funktion auf folgende Weise definiert werde.

Wir wählen auf der Peripherie des Kreises die Punkte $a_q = e^{i\Theta_q}$ $(q = 1, 2, 3, \ldots)$ in der Art, daß sie eine auf dem Kreisumfang überall dichte Menge bilden, daß indessen die Punkte $x = 1$ und $x = -1$ nicht zu ihnen gehören.

Wir nehmen ferner positive Größen $A_q (q = 1, 2, 3, \ldots)$ derart an, daß

$$\text{die Reihe } \sum_{q=1}^{\infty} A_q \text{ konvergiert.}$$

Aus diesen beiden Voraussetzungen schließt man mit Hilfe des Weierstraßschen Satzes über iterierte Reihen die Gleichung:

$$(59) \quad \sum_{q=1}^{\infty} \frac{A_q}{1 - \frac{x}{a_q}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\sum_{q=1}^{\infty} A_q a_q^{-\nu} \right) x^\nu,$$

deren rechte und linke Seite beide mindestens für $|x| < 1$ konvergieren.

Man kann indessen auch folgern, daß der Kreis $x < 1$ der Hauptstern dieser beiden Ausdrücke ist. Um dies einzusehen, fixieren wir einen der Punkte a_q, etwa $a_p = e^{i\Theta_p}$. Setzt man $x = re^{i\Theta_p}$, $r < 1$, so erhält man:

$$\sum_{q=1}^{\infty} \frac{A_q}{1 - \frac{x}{a_q}} = \frac{A_p}{1-r} + \sum^{(p)} \frac{A_q}{1 - re^{i(\Theta_p - \Theta_q)}},$$

wobei die Summe auf der rechten Seite sich über alle Glieder außer dem p^{ten} erstreckt. Der reelle Teil der rechten Seite ist:

$$\frac{A_p}{1-r} + \sum^{(p)} A_q \frac{1 - r\cos(\Theta_p - \Theta_q)}{\sin^2(\Theta_p - \Theta_q) + (r - \cos(\Theta_p - \Theta_q))^2}.$$

Jeder dieser Terme ist positiv. Dieser reelle Teil wächst daher unbegrenzt, wenn x auf einem Radius $re^{i\Theta_p}$ sich dem Punkte a_p nähert. Andrerseits sind diese Punkte auf dem Umfang des Kreises $x < 1$ überall dicht. Es ist daher unmöglich, (59) über den Kreis hinaus fortzusetzen, der folglich den Hauptstern von (59) vorstellt.

Nunmehr unterwerfen wir die A_q zwei neuen Bedingungen:

1. Die Reihe

$$\sum_{q=1}^{\infty} \frac{A_q}{\sin\Theta_q}$$

soll konvergent sein.

Man zieht aus dieser neuen Voraussetzung eine wichtige Folgerung. Ist nämlich x reell und positiv, so ist

$$1 - \frac{x}{a_q} = 1 - x\cos\Theta_q + i\,x\sin\Theta_q = \sqrt{1 - 2x\cos\Theta_q + x^2}$$
$$= \sqrt{\sin^2\Theta_q + (x - \cos\Theta_q)^2}.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung nimmt ihr Minimum für $x = \cos\Theta_q$ an und wird in diesem Falle gleich $\sin\Theta_q$.

Die Reihe

$$\sum_{q=1}^{\infty} \frac{A_q}{1 - \frac{x}{a_q}}$$

ist folglich gleichmäßig konvergent für jeden Bereich $0 < x < X$, wenn X eine beliebige positive Größe bedeutet.

2. Sei q eine feste Zahl. Dann hat, wie man leicht sieht, der absolute Wert

$$\frac{1}{1-\frac{x}{a_q}} - G\left(\frac{x}{a_q}; \omega\right)$$

für $0 < x < X$ und $0 < \omega$ immer eine endliche obere Grenze M_q.

In der Tat, bezeichnet man mit δ eine beliebig kleine Zahl, so kann man immer eine Größe $\bar{\omega}$ so groß bestimmen, daß

$$\left| \frac{1}{1-\frac{x}{a_q}} - G\left(\frac{x}{a_q}; \omega\right) \right| < \delta; \quad \omega \geq \bar{\omega}.$$

Andrerseits hat

$$\left| \frac{1}{1-\frac{x}{a_q}} - G\left(\frac{x}{a_q}; \omega\right) \right|; \quad \omega < \bar{\omega}$$

in Anbetracht der über die a_q und über $G(x; \omega)$ gemachten Voraussetzungen eine endliche obere Grenze.

Unsere zweite Bedingung soll jetzt lauten:

Die Reihe

$$\sum_{q=1}^{\infty} A_q M_q$$

konvergiere.

Aus diesen verschiedenen Voraussetzungen folgt, daß die Reihe

$$\sum_{q=1}^{\infty} A_q \left(\frac{1}{1-\frac{x}{a_q}} - G\left(\frac{x}{a_q}; \omega\right) \right),$$

wo ω einen beliebigen positiven Wert haben soll, gleichmäßig für jeden Bereich $0 < x < X$ konvergiert und daß

$$\lim_{\omega = \infty} \sum_{q=1}^{\infty} A_q \left| \frac{1}{1-\frac{x}{a_q}} - G\left(\frac{x}{a_q}; \omega\right) \right| = 0.$$

Man erhält daher:

$$\lim_{\omega=\infty} \sum_{q=1}^{\infty} A_q G\left(\frac{x}{a_q}; \omega\right) = \sum_{q=1}^{\infty} \frac{A_q}{1-\frac{x}{a_q}}; \quad 0 < x < X. \tag{60}$$

Nun ist (vgl. (57)):

$$\sum_{q=1}^{\infty} A_q G\left(\frac{x}{a_q}; \omega\right) = \sum_{q=1}^{\infty} A_q \sum_{\nu=0}^{\infty} (\nu, \omega)\left(\frac{x}{a_q}\right)^{\nu}.$$

Für festes ω und beliebiges q besitzt der absolute Wert von $G\left(\frac{x}{a_q}; \omega\right)$ für $x < R$ (R sei eine beliebige positive Größe) eine bestimmte endliche obere Grenze.

Da die Reihe $\sum_{q=1}^{\infty} A_q$ konvergiert, so ist die Reihe

$$\sum_{q=1}^{\infty} A_q G\left(\frac{x}{a_q}; \omega\right)$$

für $|x| \leq R$ gleichmäßig konvergent.

Setzt man also

$$\frac{c_\nu}{\nu!} = \sum_{q=1}^{\infty} A_q a_q^{-\nu} \quad \text{(vgl. (59))}, \tag{61}$$

so ist

$$\sum_{q=1}^{\infty} A_q G\left(\frac{x}{a_q}; \omega\right) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (\nu, \omega) \frac{c_\nu}{\nu!} x^\nu; \quad x < R \quad \text{(vgl. (57))}$$

und man erhält

$$\sum_{q=1}^{\infty} \frac{A_q}{1-\frac{x}{a_q}} = \lim_{\omega=\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} (\nu, \omega) \frac{c_\nu}{\nu!} x^\nu. \tag{62}$$

Dieser Ausdruck hat den Kreis $x < 1$ als Hauptstern. Er stellt im Innern desselben den Funktionszweig $FA(x)$ dar (vgl. (56)), der durch die Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{c_\nu}{\nu!} x^\nu \quad \text{(vgl. (59), (61))}$$

definiert ist, und konvergiert nicht allein im Innern des Hauptsternes A, sondern er ist sogar für jeden Bereich $0 < x < X$ gleichmäßig konvergent, wo X eine beliebig große positive Zahl bedeutet.

Die Ergänzung des Borelschen Satzes durch Herrn Phragmén ist von Bedeutung. Man kann tatsächlich sehr elegante Ausdrücke vom Typus (56) bilden, die $FA(x)$[1]) darstellen. Man mußte daher fragen, ob es nicht hier möglich wäre, was im Falle des Herrn Borel

$$\lim_{m=\infty} \sum_{\nu=0}^{m} (\nu, m) \frac{c_\nu}{\nu!} (x-a)^\nu$$

nicht anging, nämlich Ausdrücke von der Form (56) zu finden, die nirgends außerhalb A konvergent sind.

Das eben behandelte Problem hat nichts zu tun mit einem anderen, von welchem Herr Borel eine interessante Lösung gefunden hat.[2]) Er weist durch ein sehr sinnreiches Beispiel die Existenz analytischer Funktionen nach, die eine auf natürliche Weise definierte lineare Fortsetzung über ihren Existenzbereich hinaus besitzen. Um zu diesem Ergebnis zu gelangen, muß man den Begriff der Derivierten erweitern. Man geht nämlich nicht mehr durch alle Punkte in der Umgebung eines bestimmten Punktes zur Grenze über, sondern nur durch solche Punkte, die eine auf gewisse Weise definierte, überall dichte Menge bilden. Das Wesentliche ist, daß die Funktion in ihrem ganzen Existenzbereich durch die Gesamtheit ihrer Derivierten in einem bestimmten Punkt eindeutig gegeben ist. Kennt man

[1]) Beispielsweise:

$$FA(x) = \lim_{\alpha=0} \left(c_0 + \frac{c_1}{(\alpha \cdot 1)!\,1!} x + \frac{c_2}{(\alpha \cdot 2)!\,2!} x^2 + \cdots \right); \quad \alpha = \frac{1}{\omega}$$

siehe Mittag-Leffler, „Sur la représentation arithmétique des fonctions analytiques générales d'une variable complexe." Atti del IV Congresso internaz. dei Matematici. Roma, 6—11 Aprile 1908, S. 82.

[2]) Émile Borel, „Définition et domaine d'existence des fonctions monogènes uniformes." Proceedings of the fifth international congress of Mathematics, vol. I, S. 133—144.

diese Ableitungen, so ist die Funktion vollständig gegeben, ganz wie es bei den analytischen Funktionen der Fall ist.

Ungeachtet des Interesses, das dieser neue Gedanke des Herrn Borel erweckt, erscheint es mir nicht angebracht, hierin den Ausgangspunkt einer neuen Theorie der analytischen Funktionen zu erblicken, welche allgemeiner als die klassische Theorie wäre und diese als Spezialfall enthielte. Man müßte hiefür zeigen können, daß die Funktionen des Herrn Borel in natürlicher Weise in einem von der Wissenschaft selbst gestellten Problem auftreten und keine künstliche Konstruktion sind, wie es so viele in den entlegenen Gebieten der allgemeinen Theorie der (nicht analytischen) Funktionen gibt.

Herr Borel hat gezeigt, daß seine Funktion durch einen Ausdruck

$$\lim_{m=\infty} G(x; m)$$

($G(x; m)$ = ganze rationale Funktion mit dem Parameter m.) dargestellt wird, der nicht nur im Innern des Hauptsterns Gültigkeit besitzt, sondern auch für die linearen Fortsetzungen der Funktion, die in der von ihm angegebenen Weise gebildet werden.

Indessen hat er, wie es scheint, nicht gezeigt, daß sein Ausdruck keine andere Folge von Werten darstellen kann, die mit der ursprünglich gegebenen Funktion nichts zu tun haben.

Aber gerade diese Frage erhebt sich hier wieder, ob man einen nur im Existenzbereich der Funktion konvergenten Ausdruck bilden kann, in den von der Funktion nur die Konstanten $c_0, c_1, c_2 \ldots c_\nu \ldots$ eingehen, die der einzigen Bedingung genügen sollen, daß

$$\lim_{\nu=\infty} \sqrt[\nu]{\frac{c_\nu}{\nu!}}$$

endlich ist. Würde ein solcher Ausdruck existieren, der gleichzeitig vom formalen Gesichtspunkte aus einfach genug wäre, so könnte man die Potenzreihe als Ausgangspunkt der Theorie der analytischen Funktionen verlassen und durch diesen neuen, vollkommeneren Begriff ersetzen.

Anhang.

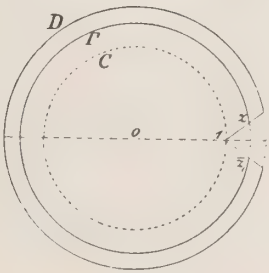
Ein Satz des Herrn Marcel Riesz.

„Es bedeute $F(z)$ eine Funktion der komplexen Veränderlichen z, die in dem Sterne D

$$|z| < R \qquad (R > 1)$$

$$\vartheta < \arg(z-1) \leqq 2\pi - \vartheta \qquad \left(0 < \vartheta < \frac{\pi}{2}\right)$$

einschließlich der Begrenzung stetig und in demselben Bereiche mit Ausnahme des Punktes $z = 1$ regulär ist.



Unter dieser Voraussetzung ist die Reihe

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots a_n z^n + \cdots,$$

die im Innern des Konvergenzkreises $C(|z| = 1)$ die Funktion $F(z)$ darstellt, in dem Bereiche $|z| < 1$ gleichmäßig konvergent."

Die Begrenzung des Sterns D wird offenbar von einem Kreisbogen mit dem Radius R und zwei vom Punkte $z = 1$ ausgehenden Strecken gebildet. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit des Satzes können wir $F(1) = 0$ annehmen. Es werde nun mit Γ eine Figur von gleicher Gestalt wie D bezeichnet, bei der der Kreisbogen mit dem Radius R durch einen Kreisbogen vom Radius r $(1 < r < R)$ ersetzt ist, den wir auf folgende Weise bestimmen:

Wir bezeichnen mit ε eine beliebig kleine Größe und wählen r so nahe an 1, daß auf dem geradlinigen Teile der Figur Γ

$$|F(z)| < \varepsilon.$$

Die Schnittpunkte der geradlinigen Teile der Begrenzung von Γ mit dem Kreisbogen vom Radius r bezeichnen wir mit z_1 und z_1.

Dann sagt ein bekannter Satz Cauchys:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{F(z)}{z^{n+1}}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\left[\int_{1}^{\varepsilon_1} \frac{F(z)}{z^{n+1}}\,dz + \int_{\varepsilon_1}^{z_1} \frac{F(z)}{z^{n+1}}\,dz + \int_{z_1}^{1} \frac{F(z)}{z^{n+1}}\,dz\right].$$

Nun ist

$$\left|\int_{1}^{\varepsilon_1} \frac{F(z)}{z^{n+1}}\,dz\right| < \varepsilon \int_{1}^{\varepsilon_1} \frac{|dz|}{|z|^{n+1}} = \varepsilon \int_{1}^{\varepsilon_1} \frac{d|z|}{|z|^{n+1}} \frac{|dz|}{d|z|}$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{\cos\vartheta}\int_{1}^{\varepsilon_1} \frac{d|z|}{|z|^{n+1}} = \frac{\varepsilon}{n\cos\vartheta}\left(1 - \frac{1}{|z_1|^n}\right)$$

und ebenso

$$\left|\int_{1}^{\varepsilon_1} \frac{F(z)\,dz}{z^{n+1}}\right| < \frac{\varepsilon}{n\cos\vartheta}\left(1 - \frac{1}{|z_1|^n}\right).$$

Bezeichnen wir die obere Grenze von $|F(z)|$ in dem Sterne D mit g, so ist noch

$$\frac{1}{2\pi i}\left|\int_{\varepsilon_1} \frac{F(z)}{z^{n+1}}\,dz\right| < \frac{g}{r^n} = \frac{1}{n}\,g\,\frac{n}{r^n}.$$

Versteht man unter δ eine neue beliebig kleine positive Größe, so ist für genügend großes n:

$$g\,\frac{n}{r^n} < \delta$$

und folglich:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{z_1}^{z_1}\frac{F(z)}{z^{n+1}}\,dz\Big| < \frac{\delta}{n}.$$

Man erkennt also, daß

$$|a_n| < \frac{\varepsilon}{n}, \text{ soferne } n \geqq N,$$

wenn ε beliebig klein und N hinreichend groß gewählt ist.[1])

Es folgt nunmehr aus dem Tauberschen Satz,[2]) daß die Gleichung stattfindet

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = F(z)$$

[1]) Dieser von Herrn Hardy gegebene Beweis wurde mir von Herrn Marcel Riesz mitgeteilt.

[2]) Tauber, „Ein Satz aus der Theorie der unendlichen Reihen." Monatshefte für Mathematik und Physik, Bd. 8, 1897, S. 274—275.

Es sei eine Potenzreihe

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} k_n x^n$$

gegeben, für die

$$\lim_{n=\infty} n k_n = 0.$$

Es werde ferner vorausgesetzt, daß $F(x)$ gegen einen bestimmten, mit $F(z)$ bezeichneten Grenzwert konvergiert, wenn x längs eines Radius gegen den auf dem Kreisumfang $|z| = 1$ gelegenen Punkt z strebt. Unter diesen Voraussetzungen konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} k_n z^n$$

gegen den Wert $F(z)$. Ist die zweite Bedingung für eine Punktmenge des Kreisumfanges $z = 1$ gleichmäßig erfüllt, so ist die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} k_n z^n$$

für alle Punkte dieser Menge eine gleichmäßige.

Der Beweis kann in das System folgender Formeln zusammengefaßt werden:

und zwar nicht nur im Punkte $z=1$, sondern auf dem ganzen Umfange $|z|=1$, und daß die Konvergenz von

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad \text{für} \quad |z|<1$$

eine gleichmäßige ist.

$$F(z)-\sum_{\nu=0}^{n} k_\nu z^\nu-\left(\sum_{\nu=0}^{\infty} k_\nu z^\nu\left(1-\frac{1}{n}\right)^\nu-\sum_{\nu=0}^{n} k_\nu z^\nu\right)<\delta;\ n>N,\ |z|<1.$$

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} k_\nu z^\nu\left(1-\frac{1}{n}\right)^\nu=\sum_{\nu=0}^{n} k_\nu z^\nu\left(1-\frac{1}{n}\right)^\nu+\sum_{\nu=n+1}^{\infty} k_\nu z^\nu\left(1-\frac{1}{n}\right)^\nu$$

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty} k_\nu z^\nu\left(1-\frac{1}{n}\right)^\nu<\sum_{\nu=n+1}^{\infty} |k_\nu z^\nu|\left(1-\frac{1}{n}\right)^\nu<\frac{\varepsilon}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n+1}\cdot\frac{1}{1-\left(1-\frac{1}{n}\right)}$$

$$=\varepsilon\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

$$\sum_{\nu=0}^{n} k_\nu z^\nu\left(1-\frac{1}{n}\right)^\nu-\sum_{\nu=0}^{n} k_\nu z^\nu=-\sum_{\nu=0}^{n} k_\nu z^\nu\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^\nu\right)$$

$$1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^\nu<\frac{\nu}{n}$$

$$\sum_{\nu=0}^{n}|k_\nu z^\nu|\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^\nu\right)\leq\sum_{\nu=0}^{n}\frac{\nu\,|k_\nu|}{n}=\frac{1}{n}\sum_{\nu=0}^{m}\nu\,|k_\nu|+\frac{1}{n}\sum_{\nu=m+1}^{n}\nu\,|k_\nu|$$

$$\frac{1}{n}\sum_{\nu=m+1}^{n}\nu\,|k_\nu|\leq\frac{(n-m)\varepsilon}{n}.$$

Folglich:

$$\left|F(z)-\sum_{\nu=0}^{n} k_\nu z^\nu\right|<\delta+\frac{1}{n}\sum_{\nu=0}^{m}\nu\,|k_\nu|+\frac{(n-m)\varepsilon}{n}+\varepsilon\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Eine geometrische Aufgabe.

Von **E. Czuber.**

Vorgelegt von W. v. Dyck in der Sitzung am 9. Januar 1915.

I. Der allgemeine Fall.

1. Drei nicht orientierte Gerade in einer Ebene bestimmen in dieser zwei Systeme ähnlicher Dreiecke, S und S'; jede zwei Dreiecke desselben Systems sind perspektiv ähnlich in Bezug auf einen äußeren Ähnlichkeitspunkt, und jedes Dreieck aus dem einen System ist mit jedem Dreieck aus dem andern perspektiv ähnlich in Bezug auf einen innern Ähnlichkeitspunkt.

Sind m, n, p, Fig. 1, die drei Geraden, so ziehe man zu einer von ihnen, z. B. zu m, eine Parallele und nehme auf dieser zwei Punkte N, P in der einen, oder N', P' in der entgegengesetzten Richtung an. Durch N und N' ziehe man je eine Parallele zu p, durch P und P' je eine Parallele zu n; dadurch entstehen zwei ähnliche Dreiecke MNP, $M'N'P'$ mit entgegengesetztem Umlaufssinn. Alle zu MNP ähnlichen und

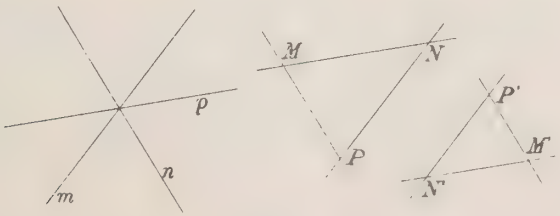


Fig. 1.

ähnlich liegenden Dreiecke bilden das eine System S, alle zu $M'N'P'$ ähnlichen und ähnlich liegenden Dreiecke das andere System S'. Die weiteren Aussagen bedürfen keiner Begründung.

2. Das Problem, um dessen Lösung es sich handelt, besteht in folgendem.

In der Ebene der drei Geraden m, n, p ist ein Dreiseit abc mit den Ecken A, B, C gegeben. Es sind jene Dreiecke der durch m, n, p bestimmten Systeme zu konstruieren, deren Ecken auf den Seiten von ABC liegen.

In anderer Formulierung:

In einer Ebene ist ein Dreiseit abc und ein Dreieck MNP gegeben. Man soll dem Dreiseit alle Dreiecke einschreiben, die dem gegebenen perspektiv ähnlich sind.

3. Da nach Art. 1 alle zu MNP perspektiv ähnlichen Dreiecke durch die drei Geraden m, n, p gegeben sind, so kann die Lösung wie folgt in Angriff genommen werden.

Man führe, Fig. 2, zwischen irgend zwei Seiten des Dreiseits, z. B. zwischen b und c, Transversalen parallel zu irgend einer der drei Geraden, z. B. zu m, und lege durch die Endpunkte N, N', ... Parallele zu p, durch die Endpunkte P, P', ... Parallele zu n. Dann liegen die Schnittpunkte M, M', ... homologer Paare auf einer Geraden, die durch A geht; und diese Gerade schneidet die Gegenseite a in einem Punkte $\mathfrak{M}$, der bereits ein Eckpunkt eines der gesuchten Dreiecke ist, von dem aus dieses selbst durch bloßes Ziehen von Parallelen erhalten wird.

Zur Begründung sei bemerkt, daß N, N', ... und P, P', ... ähnliche Punktreihen in perspektiver Lage sind; infolgedessen bilden auch die hindurchgeführten Parallelstrahlen ähnliche Büschel in perspektiver Lage, deren Erzeugnis eine Gerade ist, die notwendig durch den gemeinsamen, sich selbst entsprechenden Punkt A der Punktreihen läuft.

Dieser letzte Umstand bewirkt, daß zur Konstruktion von $\mathfrak{M}$ nur eine Transversale, NP, erforderlich ist.

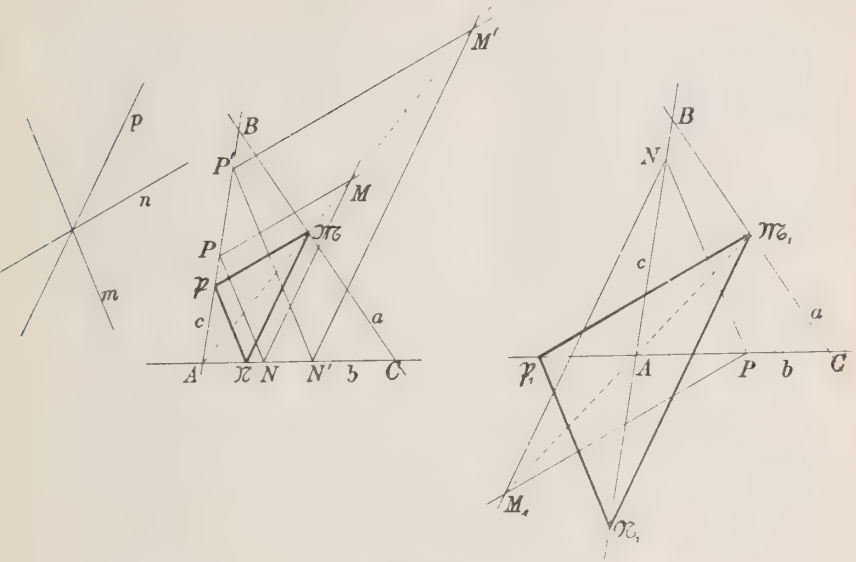


Fig. 2.

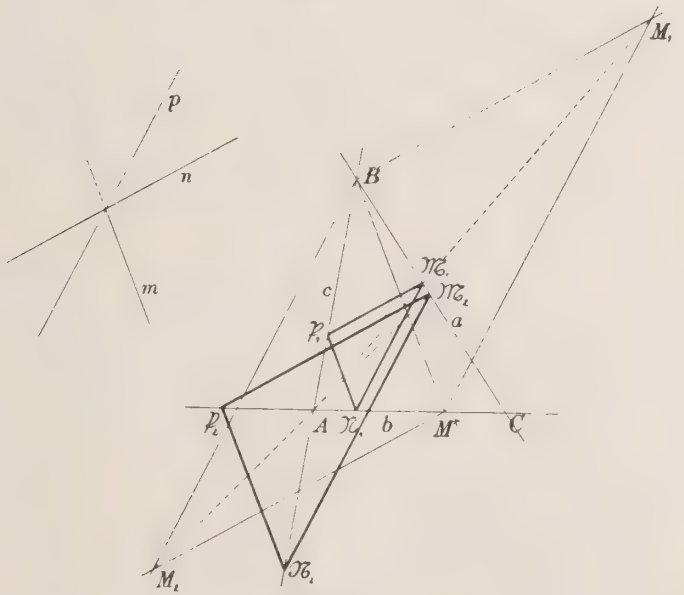


Fig. 3.

Vertauscht man die Bezeichnung der Endpunkte und führt die Konstruktion wie früher weiter, so kommt man zu dem Eckpunkt $\mathfrak{M}_1$ eines zweiten Dreiecks $\mathfrak{M}_1\mathfrak{N}_1\mathfrak{P}_1$ von der verlangten Beschaffenheit.

4. Dieses Konstruktionsverfahren läßt sich zweckmäßig in folgender Art weiter ausbilden. Man verlege, Fig. 3, die zu m parallele Transversale nach dem Eckpunkt B, gebe ihr also die Lage BM^*; verzeichnet man nun über BM^* als Diagonale ein Parallelogramm $B\mathrm{M}_1M^*\mathrm{M}_2$, dessen Seiten die Richtungen n und p haben, und projiziert die Gegenecken M_1, M_2 aus A auf a, so erhält man die Eckpunkte $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$ der beiden Dreiecke, die vorhin getrennt behandelt worden sind.

Diese Dreiecke haben das gemeinsame Merkmal, daß die Seite von der Richtung m der Ecke A des Dreiseits in dem Sinne zugeordnet ist, daß ihre Endpunkte auf den durch A laufenden Seiten liegen.

5. Man kann unter Beibehaltung des Seitenpaares b, c mit den Geraden n, p ebenso vorgehen, wie man soeben mit der Geraden m verfahren ist, und erhält auf diese Weise sechs eingeschriebene Dreiecke. Die andern Seitenpaare, ebenso behandelt, führen zu keinen neuen Dreiecken mehr; vielmehr ist jedes so konstruierte Dreieck, wie eine einfache Überlegung zeigt, unter den bereits gezeichneten.

Es ergibt sich also zur Lösung der Aufgabe das folgende Verfahren.

Man ziehe durch B die Transversalen BM^*, BN^*, BP^* parallel zu m, n, p bis zur Gegenseite b: verzeichne über diesen Transversalen als Diagonalen die Parallelogramme $B\mathrm{M}_1M^*\mathrm{M}_2$, $B\mathrm{N}_3N^*\mathrm{N}_4$, $BH_5P^*H_6$, deren Seiten beziehungsweise die Richtungen n, p; p, m; m, n haben; projiziere die Eckpunkte M_1, M_2, N_3, N_4, H_5, H_6 aus A auf die Gegenseite a, so hat man in den Projektionen $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$, $\mathfrak{N}_3$, $\mathfrak{N}_4$, $\mathfrak{P}_5$, $\mathfrak{P}_6$ je einen Eckpunkt für jedes der sechs Dreiecke, von denen aus diese selbst durch bloßes Ziehen von Parallelen verzeichnet werden können.

Dieses Verzeichnen kann noch durch folgende Bemerkung erleichtert werden. Die Transversalen BM^*, BN^*, BP^* können

ebensogut auf das Seitenpaar a, b bezogen werden wie auf b, c. Folglich liefern die Projektionen derselben sechs Punkte M_1, M_2, N_3, N_4, II_5, II_6 aus C auf c andere sechs Eckpunkte, die sich auf die Dreiecke verteilen. Diese Verteilung ergibt sich daraus, daß jeder der neuen sechs Punkte mit einem der früheren auf einer Geraden liegen muß, die zu einer der drei Geraden m, n, p parallel ist. Dadurch ist dann auch die Bezeichnung der neuen sechs Punkte und somit auch die der Eckpunkte auf der dritten Seite b bestimmt. Die Bezeichnung ist hier so gewählt, daß ein Eckpunkt jenen großen Buchstaben trägt, welcher dem kleinen Buchstaben entspricht, der die Richtung der gegenüber liegenden Seite anzeigt.

Es braucht nicht betont zu werden, daß statt der Ecke B auch jede der beiden andern hätte verwendet werden können.

Damit ist alles gesagt, was zur Durchführung und zum Verständnis der Fig. 4 erforderlich ist.

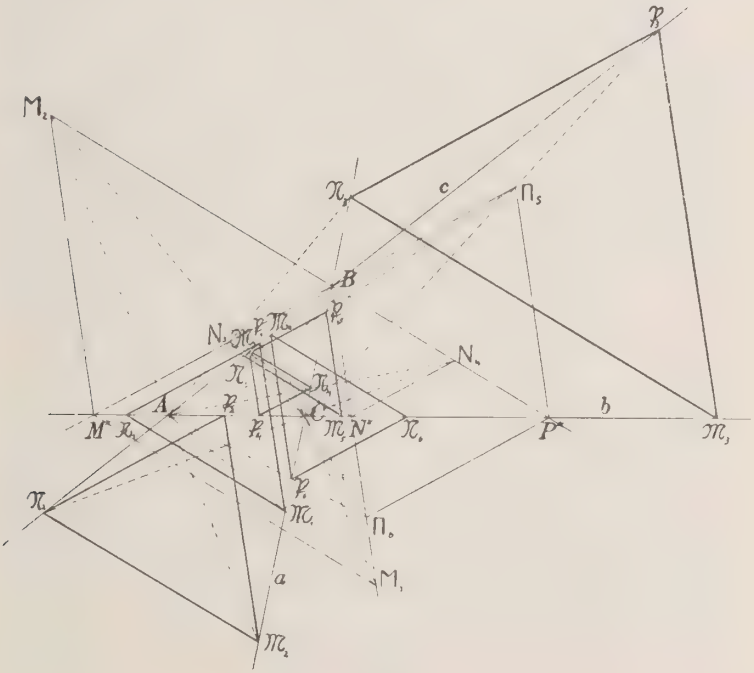


Fig. 4.

Die 18 Ecken der sechs Dreiecke verteilen sich auf die Seiten von ABC in dem vorliegenden Falle wie folgt:

Auf a liegen $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \mathfrak{N}_3, \mathfrak{N}_4, \mathfrak{P}_5, \mathfrak{P}_6$;
„ b „ $\mathfrak{M}_3, \mathfrak{M}_5, \mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_6, \mathfrak{P}_2, \mathfrak{P}_4$;
„ c „ $\mathfrak{M}_6, \mathfrak{M}_4, \mathfrak{N}_5, \mathfrak{N}_2, \mathfrak{P}_3, \mathfrak{P}_1$;

oder in anderer Anordnung: Es liegen die Ecken

$$\mathfrak{M}_1, \mathfrak{N}_1, \mathfrak{P}_1;\ \mathfrak{M}_2, \mathfrak{N}_2, \mathfrak{P}_2;\ \mathfrak{M}_3, \mathfrak{N}_3, \mathfrak{P}_3;\ \mathfrak{M}_4, \mathfrak{N}_4, \mathfrak{P}_4;\ \mathfrak{M}_5, \mathfrak{N}_5, \mathfrak{P}_5;\ \mathfrak{M}_6, \mathfrak{N}_6, \mathfrak{P}_6$$

beziehungsweise auf

$$a, b, c;\ a, c, b;\ b, a, c;\ c, a, b;\ b, c, a;\ c, b, a.$$

Zu bemerken ist, daß die Punkte M_1, M_2 sowohl bei dem Projizieren aus A auf a wie auch bei dem Projizieren aus C auf c Punkte von der Art $\mathfrak{M}$ geben; das gleiche gilt bezüglich N_3, N_4 und Π_5, Π_6.

Ist die Aufgabe so gestellt: Dem Dreiseit abc ein Dreieck mit den Seitenrichtungen m, n, p einzuschreiben in der Weise daß zwischen Ecken und Seiten eine bestimmte Zuordnung eingehalten wird, daß z. B. die Seite von der Richtung m zwischen c und a, die Seite von der Richtung n zwischen b und c, endlich die Seite von der Richtung p zwischen a und b verläuft, so handelt es sich nach der obigen Zusammenstellung um das Dreieck $\mathfrak{M}_3\mathfrak{N}_3\mathfrak{P}_3$; zu seiner Konstruktion braucht man nur das Dreieck BN^*N_3 zu verzeichnen; denn die Projektion von N_3 aus A auf a gibt die Ecke $\mathfrak{N}_3$, von der aus das ganze Dreieck hergestellt werden kann.

6. Zu einer andern Methode der Lösung führen die folgenden Erwägungen.

Dem Dreiseit abc sei ein Dreieck $\mathfrak{M}\mathfrak{N}\mathfrak{P}$ eingeschrieben. Wir ordnen dessen Seiten $\mathfrak{N}\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}\mathfrak{N}$ den Ecken A, B, C zu nach der aus Fig. 5 ersichtlichen Gesetzmäßigkeit und ziehen durch A eine Parallele zu $\mathfrak{N}\mathfrak{P}$, durch B eine Parallele zu $\mathfrak{P}\mathfrak{M}$, durch C eine Parallele zu $\mathfrak{M}\mathfrak{N}$. Dadurch entsteht ein ABC umschriebenes Dreieck MNP mit zu $\mathfrak{M}\mathfrak{N}\mathfrak{P}$ parallelen Seiten. Wir ordnen die Ecke M der Seite BC usw. zu, wie das

der Figur unmittelbar zu entnehmen ist. Die Dreiecke $\mathfrak{M}\mathfrak{N}\mathfrak{P}$ und MNP als perspektiv ähnlich besitzen einen Ähnlichkeitspunkt O, der durch Ziehen der Verbindungslinien homologer Ecken erhalten wird. Die homologe Ecke zu M liegt auf der M zugeordneten Seite von ABC usw.

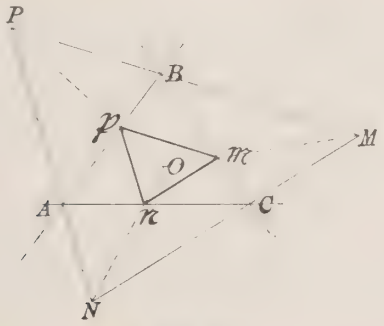


Fig. 5.

Ist umgekehrt neben dem Dreiseit abc ein ihm umschriebenes Dreieck MNP gegeben und soll das dem letzteren zugeordnete perspektiv ähnliche, abc eingeschriebene Dreieck bestimmt werden, so genügt es, den Ähnlichkeitspunkt O zu kennen; durch Projizieren der Ecken von MNP aus O auf die zugeordneten Seiten von ABC ergeben sich die Ecken von $\mathfrak{M}\mathfrak{N}\mathfrak{P}$.

Um O zu finden, überlege man wie folgt.

Die Seite $\mathfrak{N}\mathfrak{P}$ befindet sich in der Schar der zu NP parallelen Transversalen zwischen b und c; diese Transversalen bestimmen auf b und c zwei ähnliche, perspektiv liegende Punktreihen, und projiziert man diese aus N, beziehungsweise P, durch Strahlenbüschel, so sind diese projektiv und perspektiv liegend und erzeugen somit einen in zwei Gerade zerfallenden Kegelschnitt mit dem Doppelpunkt A: die eine Gerade ist NP, die andere geht notwendig durch den gesuchten Punkt O. Wiederholt man dasselbe Verfahren noch an einer zweiten

Ecke von ABC, z. B. bei C, wie in Fig. 6, so ist O gefunden und das Dreieck $\mathfrak{M}\mathfrak{N}\mathfrak{P}$ bestimmt.

Die Lösung kann noch dadurch vereinfacht werden, daß man die erforderlichen Transversalen durch die Ecken des Dreiseits bis an die gegenüber liegenden Seiten führt. Dabei fällt

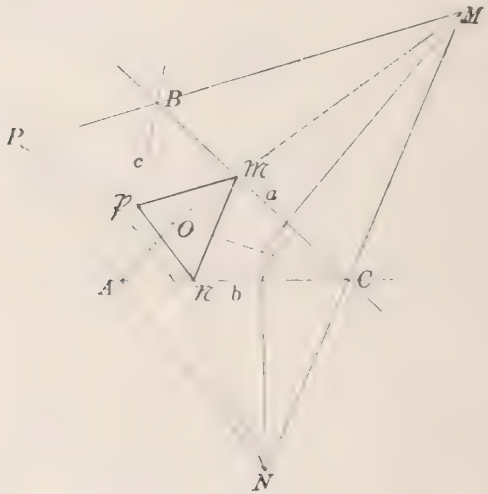


Fig. 6.

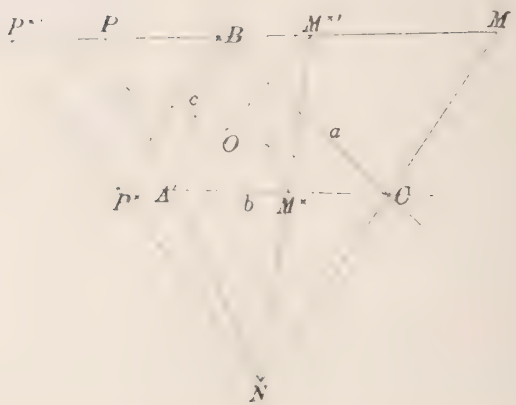


Fig. 7.

nämlich einer der beiden zugeordneten Strahlen mit einer Seite von MNP zusammen, wie das in Fig. 7 dargestellt ist. In dieser Figur sind die Transversalen BM^*, BP^* beziehungsweise NP, MN parallel; ihre Endpunkte M^*, P^* aus N auf PM projiziert geben die Punkte $M^{*\prime}$, $P^{*\prime}$, die mit A, beziehungsweise C zu verbinden sind, um den Punkt O zu erhalten.

Ist nun wieder die Aufgabe gestellt, einem gegebenen Dreiseit abc alle Dreiecke einzuschreiben, welche durch ein ebenfalls gegebenes Geradentripel m, n, p in der früher erklärten Weise bestimmt sind, so wird man damit beginnen, daß man ABC alle Dreiecke umschreibt, deren Seiten den Geraden m, n, p parallel sind. Man kann durch jede Ecke von ABC zu jeder der drei Geraden eine Parallele ziehen und jeweils die zwei andern Parallelen auf die übrigen zwei Ecken in zweifacher Art verteilen, das gäbe 18 Anordnungen; es finden jedoch dabei mehrfache Zählungen statt; scheidet man die wiederholten Fälle aus, so verbleiben sechs verschiedene umgeschriebene Dreiecke, die wir in folgender Weise ordnen und numerieren wollen:

Durch		A	B	C
geht die Parallele zu	1.	m	n	p
	2.	m	p	n
	3.	n	m	p
	4.	n	p	m
	5.	p	m	n
	6.	p	n	m.

Dementsprechend sind in Fig. 8 die sechs Dreiecke mit $M_1N_1P_1$ bis $M_6N_6P_6$ bezeichnet.

Nun hat man nach dem vorhin angegebenen Verfahren zu jedem von ihnen den Ähnlichkeitspunkt, O_1 bis O_6, zu konstruieren und mit dessen Hilfe das eingeschriebene Dreieck herzustellen.

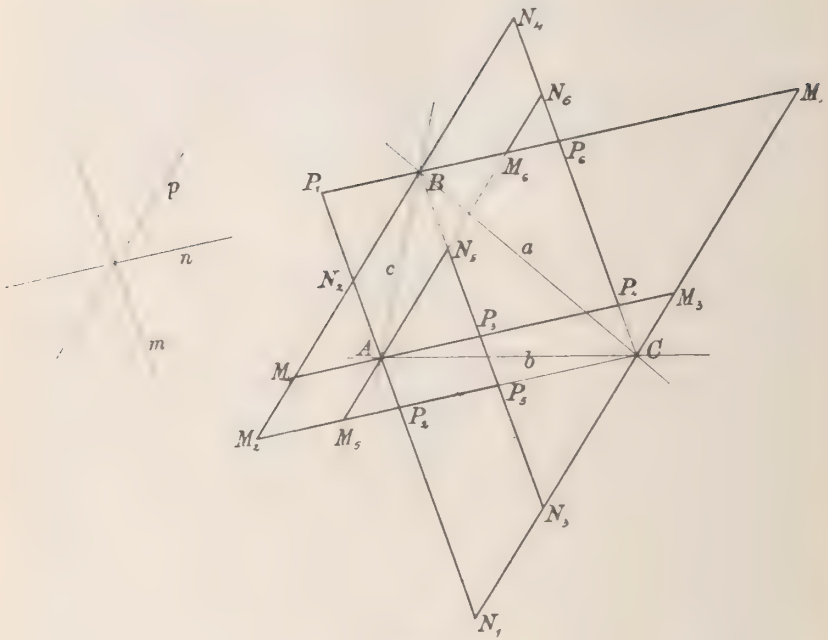


Fig. 8.

In Fig. 9 ist die Lösung für zwei von den sechs Fällen, und zwar für die Fälle 1 und 3 durchgeführt. Nach dem Vorausgeschickten erübrigt sich eine weitere Erklärung.

Das erste Verfahren ist diesem zweiten in zeichnerischer Beziehung überlegen.

II. Besondere Fälle.

7. Bei dem ersten Lösungsverfahren kann es geschehen, daß einer der Projektionsstrahlen $A(M_1, \ldots \Pi_6)$ oder auch deren mehrere parallel ausfallen zur Seite a; dann rückt die bezügliche Projektion und damit auch das von ihr aus zu konstruierende eingeschriebene Dreieck ins Unendliche; es müssen daher auch ebenso viele der Projektionsstrahlen $C(M_1, \ldots \Pi_6)$ parallel sein der Seite c. Infolgedessen vermindert sich in

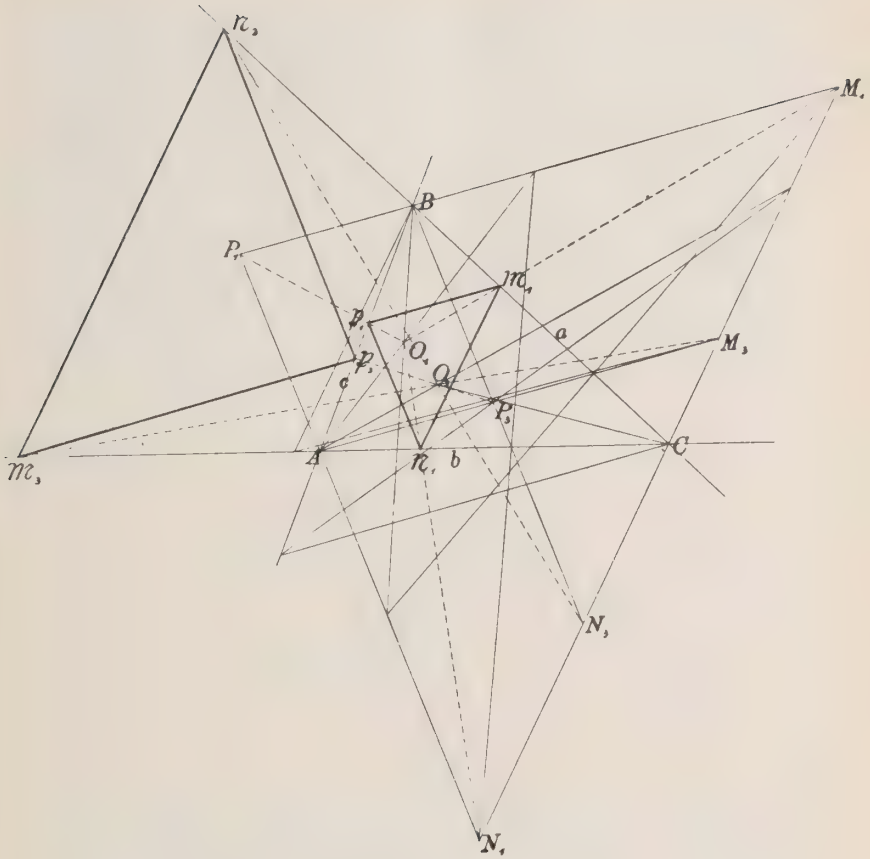


Fig. 9.

einem solchen Falle die Anzahl der eigentlichen eingeschriebenen Dreiecke.

Bei dem zweiten Lösungsverfahren kann es sich ereignen, daß eines der umschriebenen Dreiecke sich auf einen Punkt reduziert, mit anderen Worten, daß die Parallelen zu den Geraden m, n, p bei einer bestimmten Verteilung auf die Ecken des Dreiseits in einem einzigen Punkte sich schneiden; auch dies kann wiederholt eintreten.

Um die geometrische Bedeutung eines solchen Sachverhalts zu erkennen, wenden wir auf ihn die erste Methode an. Fig. 10 soll der Verteilung der Richtungen m, n, p auf die Ecken B, A, C entsprechen, wobei statt eines Dreiecks nur ein Punkt, Δ, zustande kommt. Zieht man die Transversale CM^* parallel zu m und verzeichnet über ihr das Dreieck $CM^*\mathrm{M}$ so, daß die Seiten $M^*\mathrm{M}$, $C\mathrm{M}$ beziehungsweise die Richtungen von n, p haben, so schneidet der Strahl $B\mathrm{M}$ die Gegenseite AC in einem Eckpunkt $\mathfrak{M}$ des gesuchten eingeschriebenen Dreiecks. Die folgende Überlegung zeigt aber, daß der genannte Strahl der Gegenseite parallel ist, daß also der Punkt $\mathfrak{M}$ und mit ihm das ganze Dreieck $\mathfrak{M}\mathfrak{N}\mathfrak{P}$ ins Unendliche rückt. Nimmt

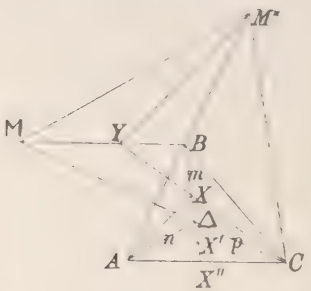


Fig. 10.

man nämlich auf dem festgehaltenen Strahl $B\Delta$ eine Punktreihe $X, X', \ldots$ an und projiziert sie aus A und C, so entstehen zwei perspektiv liegende, projektive Strahlenbüschel; ebensolche Büschel bilden sich bei dem beschriebenen Vorgang um die Punkte M^* und C aus; ihr Erzeugnis ist ein Geradenpaar: die eine Gerade ist CM^*, hervorgehend aus dem unendlich fernen Punkte der Punktreihe $X, X', \ldots$, die andere geht durch B und ist parallel zu AC, wie man erkennt, wenn man X einmal nach B, ein zweites Mal nach X'' verlegt.

Das Ergebnis der Untersuchung lautet also dahin, daß, so oft die Parallelen zu m, n, p bei einer Verteilung auf die Ecken des Dreiseits abc durch einen Punkt gehen, eines der

eingeschriebenen Dreiecke ein uneigentliches, weil unendlich fernes wird.

8. Sind die Geraden m, n, p so gerichtet, daß sie Dreiecke bestimmen, welche dem zugrunde liegenden Dreieck ABC symmetrisch ähnlich sind, so gibt es eine Anordnung, in der sich die Parallelen in einem Punkte schneiden.

In zwei symmetrisch ähnlichen Dreiecken sind zwei Winkel miteinander vertauscht. Es seien in Fig. 11 AC und MP die Seiten, an welchen die vertauschten Winkel liegen, so zwar, daß der Winkel bei C gleich ist dem Winkel bei M und der Winkel bei A gleich dem Winkel bei P.

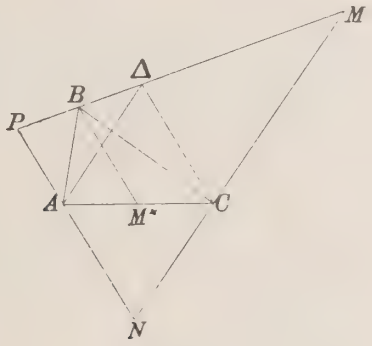


Fig. 11.

Man ziehe nun die Transversale $C\Delta$ parallel zu NP bis an PM und verbinde ihren Endpunkt Δ mit A; dann fällt $A\Delta$ parallel zu NM aus, folglich schneiden sich die Parallelen bei der Anordnung

$$\begin{matrix} A & B & C \\ p & n & m \end{matrix}$$

in einem Punkte, nämlich Δ.

Der Beweis für den behaupteten Parallelismus ergibt sich wie folgt. Man ziehe in ABC die Transversale BM^* parallel zu PN. Dann sind die Dreiecke AM^*B und PBA ähnlich; denn ihre Winkel bei A, beziehungsweise P, sind gleich nach

der Voraussetzung und die Winkel bei B, beziehungsweise A, sind es als Wechselwinkel an Parallelen; folglich stimmen auch die Winkel bei M^* und B überein. Daraus ergibt sich weiter die Ähnlichkeit der Dreiecke M^*CB und $B\Delta A$; denn dem eben Gesagten zufolge sind ihre Winkel bei M^* und B beziehungsweise gleich: ferner ergibt sich aus der Proportion

$$\frac{M^*C}{AM^*} = \frac{B\Delta}{PB}$$

unter Beachtung der erstgedachten Ähnlichkeit

$$\frac{M^*C}{M^*B} = \frac{B\Delta}{PB}\frac{AM^*}{M^*B} = \frac{B\Delta}{PB}\frac{PB}{AB} = \frac{B\Delta}{AB},$$

so daß die die gleichen Winkel einschließenden Seiten proportional sind. Daraus folgt die Gleichheit der Winkel M^*CB und $B\Delta A$, und da der Winkel M^*CB voraussetzungsgemäß gleich ist dem Winkel bei M, so ist in der Tat $A\Delta$ parallel zu NM.

Als Ergebnis kann also der Satz ausgesprochen werden:

Man kann einem zum Dreiseit erweiterten Dreieck fünf eigentliche Dreiecke einschreiben, die ihm symmetrisch ähnlich sind.

9. Der im vorigen Artikel behandelte Fall ergibt sich immer, wenn das zugrunde liegende Dreieck ABC gleichschenklig und das einzuschreibende ihm ähnlich ist; denn zwei derartige Dreiecke können auch als symmetrisch ähnlich, mit vertauschten Basiswinkeln, aufgefaßt werden.

Dies ergibt den weiteren Satz:

Einem gleichschenkligen Dreieck können fünf ihm ähnliche, untereinander paarweise perspektive Dreiecke eingeschrieben werden.

10. Die drei gegebenen Geraden m, n, p seien den Höhen des Dreiecks ABC parallel. Es handelt sich dann um solche eingeschriebene Dreiecke, deren Seiten zu den Seiten des zugrunde liegenden Dreiecks normal stehen.

Da die Parallelen zu m, n, p bei einer Verteilung auf die Ecken von ABC, nämlich dann, wenn sie als Höhen des Dreiecks erscheinen, sich in einem Punkte schneiden, so gibt es nur fünf eigentliche Dreiecke der beschriebenen Art.

Fig. 12 bringt einen solchen Fall zur Darstellung. Die drei Transversalen BM^*, BN^*, BP^*, mit deren Hilfe die Konstruktion durchgeführt ist, stehen der Reihe nach senkrecht auf a, b, c. Von den Seiten der eingeschriebenen Dreiecke stehen

$\mathfrak{N}_1\mathfrak{P}_1$ $\mathfrak{N}_3\mathfrak{P}_3$ $\mathfrak{N}_4\mathfrak{P}_4$ $\mathfrak{N}_5\mathfrak{P}_5$ $\mathfrak{N}_6\mathfrak{P}_6$ senkrecht auf a und verlaufen zwischen c, b a, b a, c c, a b, a;

$\mathfrak{P}_1\mathfrak{M}_1$ $\mathfrak{P}_3\mathfrak{M}_3$ $\mathfrak{P}_4\mathfrak{M}_4$ $\mathfrak{P}_5\mathfrak{M}_5$ $\mathfrak{P}_6\mathfrak{M}_6$ senkrecht auf b und verlaufen zwischen b, a b, c c, b a, b a, c;

$\mathfrak{M}_1\mathfrak{N}_1$ $\mathfrak{M}_3\mathfrak{N}_3$ $\mathfrak{M}_4\mathfrak{N}_4$ $\mathfrak{M}_5\mathfrak{N}_5$ $\mathfrak{M}_6\mathfrak{N}_6$ senkrecht auf c und verlaufen zwischen a, c c, a b, a b, c c, b.

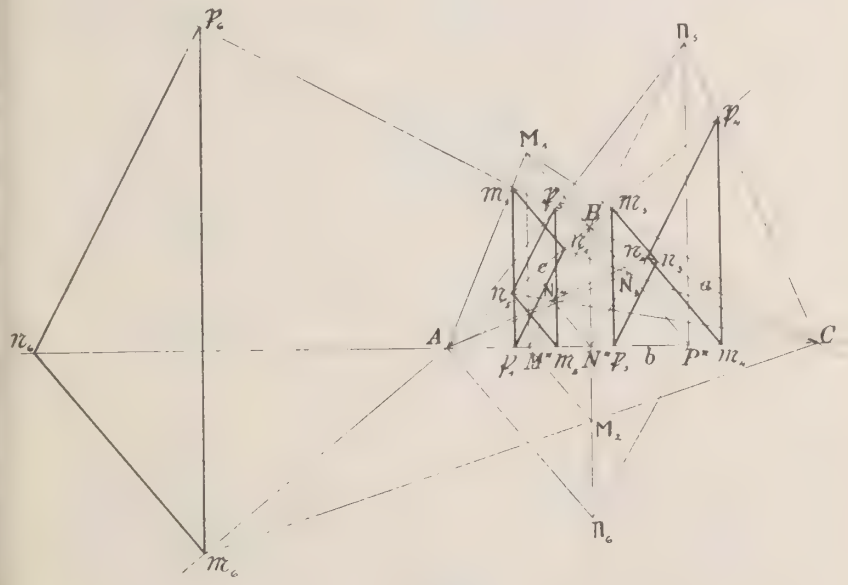


Fig. 12.

Die Lücke, welche das uneigentliche Dreieck $\mathfrak{M}_2\mathfrak{N}_2\mathfrak{P}_2$ läßt, macht sich durch das Fehlen der Seitenpaare b, c; c, a; a, b bemerkbar.

Ist bei derselben Sachlage das Dreieck ABC gleichschenklig, so gibt es noch eine zweite Verteilung der Parallelen, bei der sie durch einen Punkt gehen; wegen der Symmetrie tritt dies nämlich noch ein, wenn man die Parallelen durch die Basisendpunkte miteinander vertauscht. Die Folge davon ist, daß einem gleichschenkligen Dreieck nur vier Dreiecke eingeschrieben werden können, deren Seiten zu denen des ersten normal stehen. Fig. 13 zeigt einen solchen Fall; zu seiner Durchführung genügt es, bloß das Parallelogramm $B\mathrm{M}_1M^*\mathrm{M}_2$ über der Höhe BM^* als Diagonale zu verzeichnen, das durch Projizieren seiner Ecken M_1, M_2 aus A und C auf die Gegenseiten für jedes der vier Dreiecke je einen Eckpunkt liefert.

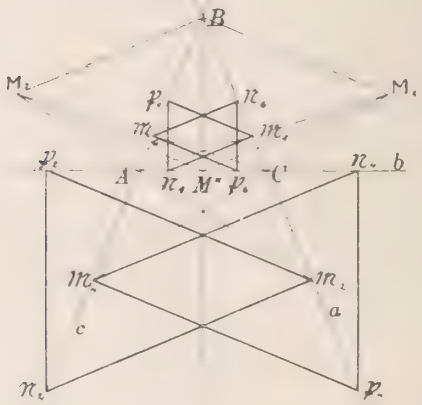


Fig. 13.

11. Sind die Geraden m, n, p den Halbierungslinien der Innenwinkel von ABC oder den Halbierungslinien zweier Außenwinkel und des Innenwinkels an der dritten Ecke parallel, so gibt es für die Parallelen zu m, n, p jedesmal eine

Verteilung auf die Ecken, bei der sie sich in einem Punkte schneiden. Auch in diesen Fällen wird also eines der eingeschriebenen Dreiecke uneigentlich.

12. Nun setzen wir voraus, die Geraden m, n, p seien den Medianen des Dreiecks ABC parallel.

In Fig. 14 seien m, n, p durch die Medianen AM^*, BN^*, CP^* selbst vertreten. Bei den verschiedenen Verteilungen der Parallelen hierzu auf die Ecken von ABC ergeben sich folgende Gebilde:

	A	B	C	
1.	m	n	p	der Punkt Δ_1;
2.	m	p	n	„ „ Δ_2;
3.	n	m	p	„ „ Δ_3;
4.	n	p	m	das Dreieck $M_4N_4P_4$;
5.	p	m	n	„ „ $M_5N_5P_5$;
6.	p	n	m	der Punkt Δ_6.

Um die Richtigkeit der unter 2 aufgestellten Behauptung zu erkennen, beachte man, daß nach dem Gange der Konstruktion $B\Delta_1C\Delta_2$ ein Parallelogramm ist, das BC zur einen Dia-

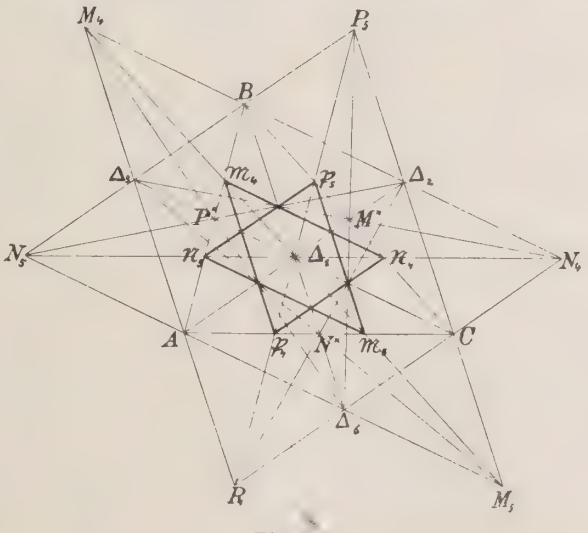


Fig. 14.

gonale hat, während die andere notwendig in die Gerade AM^* fällt; demnach schneiden sich die Geraden M_4N_4, P_5M_5 und AM^* tatsächlich in einem Punkte. Ebenso sind die Behauptungen 3 und 6 zu begründen.

Die Verfolgung der in Art. 6 entwickelten Konstruktionsverfahren an der Figur 14 läßt den Schwerpunkt A_1 von ABC als den gemeinsamen Ähnlichkeitspunkt der umschriebenen Dreiecke $M_4N_4P_4$, $M_5N_5P_5$ und der ihnen entsprechenden eingeschriebenen Dreiecke erkennen. Schließlich kann das Ergebnis wie folgt zusammengefaßt werden:

Einem Dreieck können nur zwei Dreiecke eingeschrieben werden, deren Seiten seinen Medianen parallel sind. Ihre sechs Ecken liegen auf den drei Geraden M_4M_5, N_4N_5, P_4P_5, welche die homologen Ecken der zwei umschriebenen Dreiecke verbinden.

13. Eine der Geraden m, n, p sei parallel einer Seite des Dreiecks ABC.

Es gibt dann sechs eingeschriebene Dreiecke in besonderer Gruppierung. In jeder der beiden Ecken, die der bevorzugten Seite angehören, stoßen zwei der sechs Dreiecke zusammen, und nur zwei davon liegen so, daß sie mit ABC keine Ecke gemein haben.

14. Zwei der Geraden m, n, p seien zwei Seiten des Dreiecks ABC parallel, z. B. sei m parallel AB, n parallel BC.

In diesem Falle gibt es eine Verteilung der Parallelen zu m, n, p auf die Ecken von ABC, bei der sie sich in einem Punkte schneiden; es ist dies die Verteilung

$$\begin{matrix} A & B & C \\ m & p & n \end{matrix}$$

und der gemeinsame Punkt ist B.

Die fünf Dreiecke, die sich jetzt ergeben, zeigen die besondere Anordnung, daß vier von ihnen in der Ecke B zusammenstoßen, während die beiden anderen Ecken von ABC nur je einem von ihnen angehören. Nur ein Dreieck liegt so, daß es mit ABC keine Ecke gemein hat.

Auf den eben besprochenen Fall führt die Aufgabe des Art. 10, wenn sie auf ein rechtwinkliges Dreieck angewendet wird. Dies bringt die Fig. 15 zur Darstellung. In der Ecke B stoßen die Dreiecke I, III, IV, VI zusammen, A gehört dem Dreieck VI, C dem Dreieck III als Ecke an, und nur das Dreieck II hat mit ABC keine Ecke gemein. Das Dreieck V ist im Unendlichen.

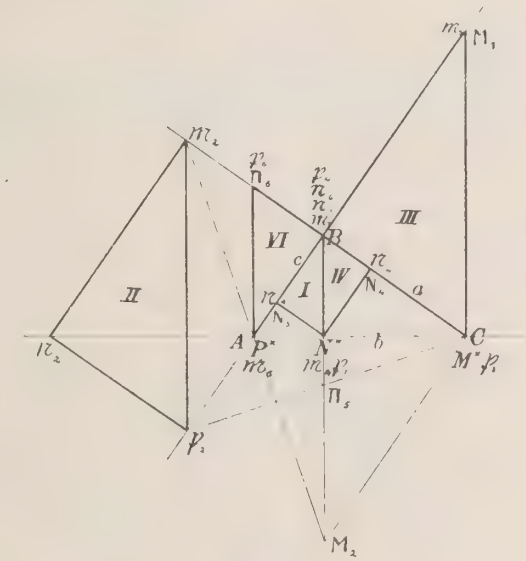


Fig. 15.

15. Die drei Geraden m, n, p seien den Seiten von ABC parallel, und zwar m parallel a, n parallel b und p parallel c.

Es gibt drei Verteilungen der Parallelen zu m, n, p auf die Ecken von ABC, bei denen statt eines umschriebenen Dreiecks ein Punkt entsteht, nämlich die folgenden:

	A	B	C				
2.	m	p	n	mit	dem	Schnittpunkt	A
6.	p	n	m	„	„	„	B
3.	n	m	p	„	„	„	C;

hiernach rücken drei eingeschriebene Dreiecke ins Unendliche. Von den drei übrigen fallen, wie die konstruktive Durchführung des Falles nach der ersten Methode, Fig. 16, zeigt, zwei mit dem gegebenen Dreieck zusammen, und zwar sind es die Dreiecke $\mathfrak{M}_4\mathfrak{N}_4\mathfrak{P}_4$, $\mathfrak{M}_5\mathfrak{N}_5\mathfrak{P}_5$ mit folgender Verteilung ihrer Ecken auf die Seiten von ABC:

	$\mathfrak{M}_4$	$\mathfrak{N}_4$	$\mathfrak{P}_4$:	$\mathfrak{M}_5$	$\mathfrak{N}_5$	$\mathfrak{P}_5$
liegt auf	b	c	a	c	a	b

Zählt man auch diese Lösungen zu den uneigentlichen, so bleibt nur ein eigentliches eingeschriebenes Dreieck, $\mathfrak{M}_1\mathfrak{N}_1\mathfrak{P}_1$.

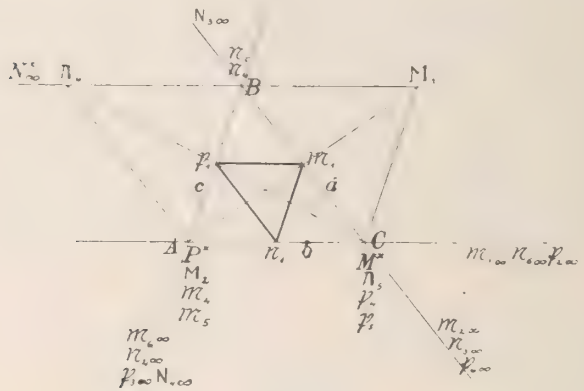


Fig. 16.

16. Das zugrunde liegende Dreieck ABC sei gleichseitig und auch die Geraden m, n, p seien so gerichtet, daß sie gleichseitige Dreiecke bestimmen.

Wir beginnen damit, zu zeigen, daß zwei gleichseitige Dreiecke, von denen das eine dem andern umschrieben ist, einen gemeinsamen Mittelpunkt haben.

Wenn in Fig. 17 s die Seite von ABC und α der Orientierungswinkel des zweiten Dreiecks gegen das erste ist, so hat man

$$BM = CN = AP = s\,\frac{\sin\left(\frac{2\pi}{3} - \alpha\right)}{\sin\frac{\pi}{3}} = s\,\frac{\sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right)}{\sin\frac{\pi}{3}}$$

$$MC = NA = PB = s\,\frac{\sin\alpha}{\sin\frac{\pi}{3}},$$

somit ist die Seite von MNP

$$S = 2s\cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right).$$

In dem Dreieck BMO, das durch die Höhen BD und MQ bestimmt wird, betragen die Winkel bei B, M, O der Reihe nach $\frac{\pi}{6} + \alpha$, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{2\pi}{3} - \alpha$, folglich ist

$$BO = BM\,\frac{\sin\left(\frac{2\pi}{3} - \alpha\right)}{\sin\frac{\pi}{6}} = \frac{s}{3}\sqrt{3} = \frac{2}{3}BD$$

$$MO = BM\,\frac{\sin\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right)}{\sin\left(\frac{2\pi}{3} - \alpha\right)} = s\,\frac{\sin\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right)}{\sin\frac{\pi}{3}}$$

$$= s\,\frac{\cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)}{\sin\frac{\pi}{3}} = \frac{S\sqrt{3}}{3} = \frac{2}{3}MQ.$$

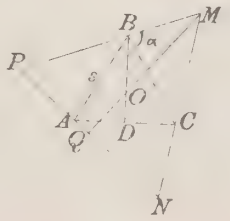


Fig. 17.

Da ein gleichseitiges Dreieck in dreifacher Weise als gleichschenklig aufgefaßt werden kann, so tritt auch der in Art. 9 angeführte Fall dreimal ein, d. h. es gibt drei Verteilungen der Parallelen zu m, n, p auf die Ecken von ABC, bei welchen sie sich in einem Punkte schneiden. Daraus folgt:

Einem gleichseitigen Dreieck können nur drei gleichseitige Dreiecke von allgemeiner Orientierung eingeschrieben werden.

Zum Zwecke ihrer Konstruktion beachte man, daß die drei umschriebenen Dreiecke $M_1N_1P_1$, $M_4N_4P_4$ und $M_5N_5P_5$, Fig. 18, mit ABC einen gemeinsamen Mittelpunkt O haben, daß mithin die homologen Eckpunkte M_1, M_4, M_5; N_1, N_4, N_5; P_1, P_4, P_5 je auf einer Geraden durch O liegen, welche drei Geraden auf den drei Geraden m, n, p beziehungsweise senkrecht stehen.

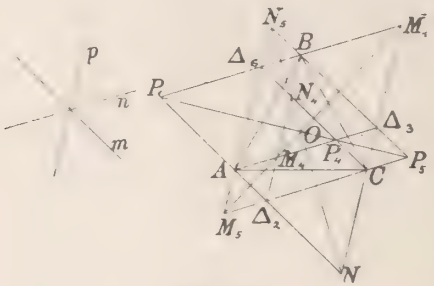


Fig. 18.

Hiernach ergibt sich das folgende Konstruktionsverfahren:

Man umschreibe dem gegebenen gleichseitigen Dreieck ABC, Fig. 19, eines der drei gleichseitigen Dreiecke, deren Seiten den Geraden m, n, p parallel sind, z. B. $M_1N_1P_1$, und projiziere seine Ecken aus dem Mittelpunkte O von ABC auf alle Seiten dieses Dreiecks; dann sind die so erhaltenen neun Punkte die Ecken der drei ABC eingeschriebenen gleichseitigen Dreiecke von der vorgeschriebenen Orientierung.

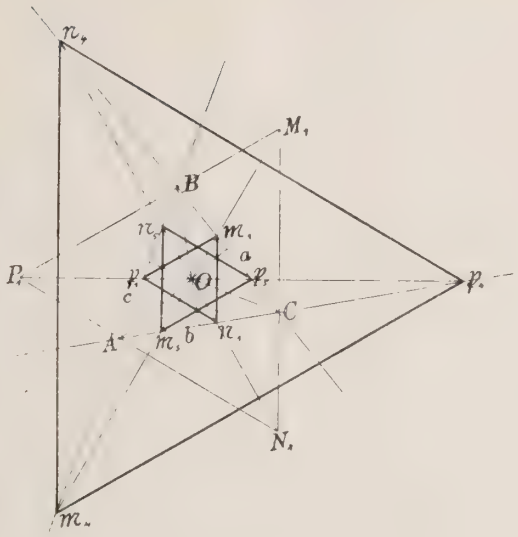


Fig. 19.

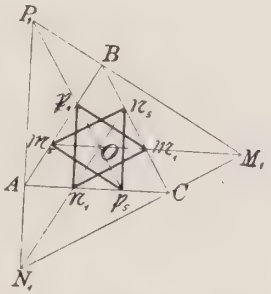


Fig. 20.

In dem besonderen Falle, wo die Seiten des einzuschreibenden Dreiecks auf jenen des gegebenen Dreiecks senkrecht stehen, ist jeder der drei Projektionsstrahlen einer Seite von ABC parallel. Mithin rückt eines der drei eingeschriebenen Dreiecke ins Unendliche, die Aufgabe hat nur zwei eigentliche Lösungen, wie dies in Fig. 20 dargestellt ist.

Die Liesche Geraden-Kugeltransformation und ihre Verallgemeinerungen.

Von **Heinrich Liebmann.**

Vorgelegt von S. Finsterwalder in der Sitzung am 1. Mai 1915.

Keine der zahlreichen Darstellungen der Lieschen Geraden-Kugeltransformation[1]) läßt, das darf wohl gesagt werden, die einfachen Gedankengänge der projektiven Geometrie scharf umrissen in den Vordergrund treten, auf deren Grundlage diese durch ihre wichtigen Eigenschaften und mannigfachen Anwendungen so bekannte Berührungstransformation abgeleitet werden kann. Das hat seine geschichtlich wohl begreiflichen, auch von ganz bestimmten Lehrmeinungen und Absichten herrührenden Ursachen,[2]) auf die hier nicht eingegangen werden kann. Auf jeden Fall erscheint eine solche Ableitung berechtigt, um so mehr, wenn sie nicht nur beim Bekannten stehen bleibt, sondern sich auch mit Verallgemeinerungen befaßt, die in den bisher vorliegenden Untersuchungen zum Teil noch nicht einmal angedeutet zu sein scheinen.

Als Grundlage aus der Lehre von den Berührungstransformationen dient der Satz von Lie:[3])

Soll eine Berührungstransformation die Punkte P des Raumes $R\,(x, y, z)$ in ∞^3 Gerade s' des Raumes R' überführen,

[1]) Lie-Scheffers, Geometrie der Berührungstransformationen I (Leipzig 1896), Kap. 10.

[2]) Lie-Engel, Theorie der Transformationsgruppen III (Leipzig 1893), S. 137—138.

[3]) S. Lie, Liniengeometrie und Berührungstransformationen (Leipzig, Ber. 49, 1897, S. 687—740).

und ihre Umkehrung die Punkte P' des Raumes R' in ∞^3 Gerade s des Raumes R, so bestehen, wenn dabei die Geraden s einem linearen Komplex (Nullsystem) angehören sollen, nur zwei Möglichkeiten, nämlich

1. die Geraden s' sind die Treffgeraden eines Kegelschnitts K',

2. die Geraden s' sind die Tangenten einer Fläche zweiten Grades.

Hierzu ist noch zu bemerken, daß der Satz zur Konstruktion der Abbildungen in keiner Weise benützt werden kann, er weist nur auf Möglichkeiten hin, und er spricht aus, daß es außer den — wie gesagt durch rein projektive Konstruktionen herstellbaren — Abbildungen, welche diese Möglichkeiten verwirklichen, keine weiteren geben kann.

I. Die Geraden-Kugeltransformation.

Die erste Abbildung, aus der übrigens die Liesche Transformation wird, wenn der ausgezeichnete Kegelschnitt K' der imaginäre Kugelkreis ist, läßt sich in folgender Weise aufbauen.[1])

Im Gegenstandsraum R und im Bildraum R' sind je zwei Punkte A, B und A', B' gegeben. Sodann werden die Geraden h_1 durch A den Ebenen σ_1' durch A' linear („korrelativ") zugeordnet, eine Zuordnung, bei der zugleich den Ebenen σ_1 durch A die Geraden h_1' durch A' entsprechen; sie möge mit $(h_1 \longrightarrow \sigma_1')$ oder $(\sigma_1 \dashrightarrow h_1')$ bezeichnet werden und ihre Umkehrung mit $(\sigma_1' \longrightarrow h_1)$ oder auch $(h_1' \dashrightarrow \sigma_1)$. Ebenso sollen auch die Geraden h_2 durch B den Ebenen σ_2' durch B' und damit die Ebenen σ_2 durch B den Geraden h_2' durch B_1 linear zugeordnet werden, was mit $(h_2 \longrightarrow \sigma_2')$ bzw. $(\sigma_2 \longrightarrow h_2')$ bezeichnet wird. Diese beiden Zuordnungen sollen aber nicht völlig unabhängig voneinander sein, es wird nämlich die Beschränkung auferlegt, daß dem gemeinsamen Strahl h_0 der beiden Strahlenbündel (A) und (B) in $(h_1 \longrightarrow \sigma_1')$ und in $(h_2 \longrightarrow \sigma_2')$ beidesmal dieselbe Ebene σ_0' entspricht.

[1]) Vgl. hierzu Lie-Scheffers, a. a. O., S. 446 ff.

Aus $(h_1 \longrightarrow \sigma_1')$ und $(h_2 \longrightarrow \sigma_2')$ entsteht dann die zu untersuchende Punktgeraden-Verwandtschaft $(P \longrightarrow s')$ durch die folgende Vorschrift: Als Bild s' von P gilt die Schnittgerade der den Geraden h_1 (AP) und h_2 (BP) entsprechenden Ebenen σ_1' und σ_2'. Bei der Umkehrung $(P' \longrightarrow s)$ ist s der Schnitt der Ebenen σ_1 und σ_2, welche den Geraden h_1' $(A'P')$ und h_2' $(B'P')$ in $(h_1' \longrightarrow \sigma_1)$ und $(h_2' \longrightarrow \sigma_2)$ entsprechen.

Wir stellen im Anschluß hieran zunächst fest, was das Bild einer beliebigen, nicht dem System s angehörigen Geraden g ist. Verbindet man ihre Punkte P mit A und B, so erhält man zwei perspektivisch aufeinander bezogene ebene Strahlenbüschel, denen zwei projektiv aufeinander bezogene Ebenenbüschel entsprechen, deren Achsen übrigens die den Ebenen $\sigma_1 = (A, g)$ und $\sigma_2 = (B, g)$ in $(\sigma_1 \longrightarrow h_1')$ bzw. $(\sigma_2 \longrightarrow h_2')$ zugeordneten Strahlen sind. Da die entsprechenden Ebenen der beiden Büschel einander in den Erzeugenden einer Fläche zweiten Grades F_2' schneiden, so verwandelt demnach $(P \longrightarrow s')$ eine Gerade g in eine Fläche F_2'.

Betrachten wir dagegen eine Systemgerade s, so gehen die Achsen der F_2' erzeugenden Ebenenbüschel jetzt beide durch P', die Fläche artet also in einen Kegel aus, dessen Spitze P' ist.

Wir wollen nunmehr zeigen, daß alle Systemgeraden s' Treffgeraden eines bestimmten in σ_0' gelegenen Kegelschnittes K' sind. Jeder Ebene σ_{12}, d. h. jeder Ebene, die sowohl A wie B enthält, wird durch $(\sigma_1 \longrightarrow h_1')$ eine in σ_0' gelegene Gerade t_1', durch $(\sigma_2 \longrightarrow h_2')$ eine ebenfalls in σ_0' gelegene Gerade t_2' zugeordnet, und der Ort der Schnittpunkte ist wegen der linearen Zuordnung ein Kegelschnitt K'. Jeder Punkt P bestimmt zusammen mit A und B eine Ebene σ_{12}, und den Strahlen h_1 und h_2, welche A und B mit P verbinden, werden zwei Ebenen σ_1' und σ_2' zugeordnet, die t_1' und t_2' enthalten, die Schnittgerade s' der Ebenen ist also eine Treffgerade von K', was zu zeigen war. Durch K' gehen dann auch die Flächen F_2', welche den Geraden g in der Verwandtschaft $(P \longrightarrow s')$ entsprechen.

Betrachten wir jetzt die Umkehrung $(P' \longrightarrow s)$. Es gilt wie oben der Satz, daß die Bilder der Punkte P' einer Systemgeraden s' die Schnitte entsprechender Ebenen zweier projektiven Ebenenbüschel sind, deren Achsen durch P gehen, nur artet die projektive Zuordnung jetzt in eine Perspektive aus, denn den beiden Strahlen t_1' und t_2', die den Schnittpunkt S' von s' und σ_0' mit A' und B' verbinden, ist in $(h_1' \longrightarrow \sigma_1)$ und $(h_2' \longrightarrow \sigma_2)$ beidesmal dieselbe Ebene σ_{12} zugeordnet, d. h. diese Ebene, welche die Achsen der projektiv zugeordneten Ebenenbüschel enthält, entspricht sich selbst. Es ergibt sich also der Satz:

Durchläuft P' eine Systemgerade s', so bilden die entsprechenden Strahlen s ein ebenes Strahlenbüschel durch P (dessen Ebene in der Folge mit τ bezeichnet werden soll).

(Beiläufig bemerkt, kann man nun noch zeigen, daß die Ebenen τ sich um eine Achse q drehen, wenn P eine Gerade g durchläuft, und dadurch tritt dann die Beziehung $P \longrightarrow \tau$ als Nullsystem deutlich hervor. Legt man nämlich durch zwei Punkte P_1 und P_2 von g die zugehörigen Ebenen τ_1 und τ_2, so schneiden sie einander in einer Geraden q, deren Punkte Q einerseits den Systemgeraden QP_1, anderseits den Systemgeraden QP_2 perspektivisch zugeordnet sind. Bei der Abbildung $(P \longrightarrow s')$ gehen P_1 und P_2 in zwei Erzeugende s_1', s_2' des Bildes F_2' von g über, die Bilder der Punkte Q aber sind ebenfalls Systemgerade s', also Treffgerade von K', die sich überdies auf s_1' und s_2' stützen, also der Fläche F_2' angehören. Jede Gerade des einen Systems von geradlinigen Erzeugenden der F_2' (d. h. die Bilder aller Punkte P), schneidet aber alle Geraden des andern Systems, und hieraus folgt, daß die Verbindungsstrahlen eines beliebigen Punktes P von g mit den Punkten Q von q lauter Systemgeraden s sind, d. h. daß τ sich um q dreht, wenn P auf g wandert.)

Ein einfaches Beispiel einer derartigen Berührungstransformation ist gegeben durch die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} x x_1 + y y_1 + 1 &= 0, \\ x y_1 + y z_1 + z &= 0. \end{aligned} \tag{1}$$

dessen Natur deutlicher hervortritt, wenn man statt der rechtwinkligen Koordinaten homogene $(x:y:z:t)$ einführt. Die erste Gleichung gibt die Zuordnung $(h_1 \longrightarrow \sigma_1')$, wobei A und A' die Koordinaten haben

$$A : x = y = t = 0,$$
$$A' : x_1 = y_1 = t_1 = 0,$$

und die zweite Gleichung gibt die Zuordnung $(h_2 \longrightarrow \sigma_2')$, wobei B und B' die Koordinaten haben

$$B : x = y = z = 0,$$
$$B' : y_1 = z_1 = t_1 = 0.$$

Der Geraden (h_0), nämlich:

$$x = y = 0$$

entspricht bei beiden Zuordnungen die Ebene (σ_0'), nämlich

$$t_1 = 0.$$

Die Systemgeraden s gehören hier dem Nullsystem

$$y\,dz - z\,dy - dx = 0$$

an, und die Systemgeraden s' sind die Treffgeraden des Kegelschnittes (K')

$$t_1 = 0, \qquad x_1 z_1 - y_1^2 = 0.$$

Auf bekanntem Weg[1]) findet man aus den beiden Grundgleichungen (1) dann die Darstellung der Berührungstransformation:

$$x_1 = \frac{py - 1}{1 + \lambda y}, \quad y_1 = \frac{qy - z}{\lambda y + x}, \quad z_1 = -\frac{qx + \lambda z}{\lambda y + x},$$

$$p_1 = \frac{\lambda x}{y}, \quad q_1 = \lambda y - x,$$

wobei zur Abkürzung

$$z - px - qy = \lambda$$

gesetzt ist.

[1]) Lie-Engel, Theorie der Transformationsgruppen II (Leipzig 1890), S. 53.

Man braucht nun nur noch die Transformation

$$x_1 = X + iY, \quad z_1 = -X + iY, \quad y_1 = Z$$

hinzuzufügen, um eine Liesche Geraden-Kugeltransformation zu erhalten.

2. Die verallgemeinerte Geraden-Kugeltransformation.[1])

Um jetzt eine Transformation zu erhalten, welche die Punkte P in die Tangenten u' einer Fundamentalfläche zweiten Grades Σ' überführt, braucht man noch eine Punktverwandtschaft $(P' \dashrightarrow Q')$, die den Treffgeraden s' von K' die Tangenten u' von Σ' zuordnet $(s' \longrightarrow u')$.

Eine solche Verwandtschaft erhält man in folgender Weise: Zunächst muß Σ' den Kegelschnitt K' enthalten. Jede Treffgerade s' schneidet dann Σ' noch in einem weiteren Punkt. Durch diesen Punkt denke man sich die Tangentialebene an Σ' gelegt und zum Schnitt gebracht (u') mit der Ebene, die s' und den Pol C' der Ebene σ_0' von K' in Bezug auf Σ' enthält. Diese Gerade ist Tangente an die Fläche Σ' und soll der Treffgeraden σ' entsprechen, wodurch die gewünschte Abbildung hergestellt ist. Die Umkehrung dieser Abbildung ist zweideutig, denn die durch C' und die Tangente u' gelegte Ebene schneidet K' in zwei Punkten. Die Abbildung $(s' \to u')$ ist tatsächlich eine Punkttransformation $(P' \to Q')$, denn wenn man durch einen Punkt P' alle Treffgeraden von K' legt, so entsteht ein Kegel, der Σ' in einem zweiten Kegelschnitt trifft, und die Ebenen, welche durch die Erzeugenden des Kegels und durch C' gehen, also durch P' und C', enthalten alle den auf $P'C'$ gelegenen Pol Q' der Ebene des zweiten Kegelschnitts, d. h. den Treffgeraden von K', welche P' enthalten, werden die von Q' an Σ' gelegten Tangenten zugeordnet. Wir haben das Ergebnis:

[1]) Vgl. Lie, a. a. O. (Anm. 3), S. 736 und F. Engel, Verzeichnis der Schriften von Lie (Bibliotheca mathematica 3 (1), 1900, S. 166—204), Nr. 83 (S. 187).

Ordnet man jedem Punkt P' des Raumes R' den Pol Q' derjenigen Ebene zu, in der der Kegelschnitt liegt, nach dem die durch P' gehenden Treffgeraden s' von K' die Fundamentalfläche Σ' zum zweiten Male schneiden, so gehen bei dieser einzweideutigen Punktverwandtschaft die Geraden s' in die Tangenten u' der Fundamentalfläche über.

Weitere Einzelheiten zur Ausführung und Begründung sind aus der folgenden analytischen Darstellung zu entnehmen, bei der wir die Koordinaten von P mit x, y, z, die von Q mit x_1, y_1, z_1 bezeichnen.

Wir wählen für K' wieder den imaginären Kugelkreis und für Σ' die imaginäre Kugel

$$x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0.$$

Um die Verwandtschaft herzustellen, hat man den Kegel

$$(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2 = 0$$

mit Σ' zu schneiden. Die Gleichung der (zweiten) Schnittebene ist

$$2x\xi + 2y\eta + 2z\zeta + 1 - x^2 - y^2 - z^2 = 0,$$

und ihr Pol Q' ist gegeben durch

$$x_1 = \lambda x,\ y_1 = \lambda y,\ z_1 = \lambda z,$$
$$\lambda = \frac{2}{1 - x^2 - y^2 - z^2}. \tag{2}$$

Die Umkehrung ($Q' \rightarrow P'$) der Abbildung ist dann gegeben durch

$$x = \mu x_1,\ y = \mu y_1,\ z = \mu z_1:$$

dabei ist noch

$$1 - \mu^2(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) = 1 - x^2 - y^2 - z^2 = 2\mu,$$

woraus die schon erwähnte Zweideutigkeit hervorgeht.

Den Treffgeraden (s')

$$y = rx + \varrho,\ z = sx + \sigma,\ (1 + r^2 + s^2 = 0$$

des imaginären Kugelkreises (K') werden die Tangenten (u')

$$x_1 : y_1 : z_1 : 1$$
$$= 2x : 2(rx + \varrho) : 2(sx + \sigma) : (1 - \varrho^2 - \sigma^2 - 2x(r\varrho + s\sigma))$$

von Σ' zugeordnet.

Wir wollen auch noch die für die Zusammensetzung der hier besprochenen Punkttransformation $(P' \to Q')$ oder $(s' \to u')$ mit der Berührungstransformation $(P \to s')$ wichtige Frage beantworten, was aus einer beliebigen K' enthaltenden Fläche zweiten Grades F_2' bei $(P' \to Q')$ hervorgeht.

Die F_2' hat eine Gleichung von der Form

$$F_2' \equiv x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d \equiv x^2 + y^2 + z^2 + E(x, y, z) = 0,$$

und sie schneidet Σ' außer in K' noch in einem zweiten Kreis, dessen Ebene die Gleichung hat

$$E(x, y, z) - 1 = 0.$$

Das Bild von F_2' ist gegeben durch die Gleichung

$$1 - 2\mu + \mu(ax_1 + by_1 + cz_1) + d = 0$$

in Verbindung mit

$$1 - 2\mu - \mu^2(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) = 0.$$

Aus diesen beiden Gleichungen zusammen folgt, wenn wir $E(x_1, y_1, z_1)$ zur Abkürzung mit E_1 bezeichnen

$$(E_1 - 1)^2 - (1 + d)^2(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + 1) = 0, \quad \text{d. h.}$$

Jede F_2', welche K' enthält, verwandelt sich bei der Abbildung $(P' \to Q')$ in eine F_2'', die Σ' längs des Kegelschnitts berührt, den F_2' und Σ' außer K' noch gemein haben.

Denkt man sich eine nichteuklidische (in unserem Fall elliptische) Maßbestimmung mit der Fundamentalfläche Σ' eingeführt, dann sind die F_2' als Kugeln zu deuten, also läßt sich das Ergebnis in aller Kürze so aussprechen:

Die durch Zusammensetzung von $P \to s'$ mit $s' \to u'$ entstehende einzweideutige Punktgeraden-Transformation führt die Geraden g in die Kugeln über bei geeigneter nichteuklidischer Maßbestimmung.

Diese durch Zusammensetzung entstehende „nichteuklidische Geraden-Kugeltransformation“ ist in Lie-Scheffers, Btr. f. trotz ihres einfachen Aufbaus nicht einmal erwähnt; es ist anzunehmen, daß sie in den nicht erschienenen zweiten Band Aufnahme finden sollte.

3. Entsprechende Transformationen in Räumen von höherer Dimension.

Lie hat die Frage nach Punktgeraden-Transformationen in Räumen höherer Dimension nur erwähnt,[1]) außerdem scheinen von anderer Seite[2]) nur völlig unzulängliche Versuche einer Verallgemeinerung der Geraden-Kugeltransformation vorzuliegen.

Wir wollen deshalb auf eine dieser Verallgemeinerungen eingehen, nämlich die durch die Gleichungen:

$$\begin{aligned} x x_1 + y y_1 + 1 &= 0, \\ x y_1 + y z_1 + z &= 0, \\ x z_1 + y u_1 + u &= 0 \end{aligned} \tag{3}$$

gegebene Berührungstransformation des R_4. Denkt man sich wieder homogene Koordinaten $(x : y : z : u : t)$ eingeführt, so erkennt man leicht die Bedeutung dieser Gleichungen. Gegeben sind in den Räumen R_4 und R_4' je drei Gerade:

$$(A) : x = y = t = 0, \quad (B) : x = y = z = 0, \quad (C) : x = y = u = 0$$

und $$(A') : x_1 = y_1 = t_1 = 0, \quad (B') : y_1 = z_1 = t_1 = 0,$$
$$(C') : z_1 = u_1 = t_1 = 0.$$

Durch die Gleichungen (3) werden den drei Bündeln von je ∞^2 Ebenen durch A, B, C die drei Bündel von je ∞^2 linearen R_3 durch A', B', C' zugeordnet, wobei die Ebene $x = y = 0$, in der die drei Geraden A, B, C liegen, in jeder der drei Zuordnungen dem linearen R_3 $(t_1 = 0)$ zugeordnet wird, welcher A', B' und C' enthält. Das Bild von P ist die Gerade s', in der die drei R_3 einander schneiden, welche den Ebenen (PA), (PB) und (PC) zugeordnet sind. Entsprechend ist die Umkehrung $(P' \to s)$ der Abbildung zu deuten.

[1]) Lie, a. a. O. (Anm. 3), S. 740.

[2]) Vgl. den Bericht von F. Engel (Jahrbuch der Fortschritte der Mathematik 30, Jahrgang 1899, S. 338—339).

Die Geraden s' sind hier die Treffgeraden der unendlich fernen Kurve dritter Ordnung (des kubischen Kegelschnittes)

$$(K'): t_1 = 0,\ x_1 z_1 - y_1^2 = y_1 u_1 - z_1^2 = z_1 y_1 - x_1 u_1 = 0.$$

Die Geraden s bilden wieder ein Nullsystem, wie oben in (1), d. h. durch jeden Punkt P gehen ∞^1 Gerade s, die wieder ein ebenes Strahlenbüschel bilden. Ihre Fortschreitungsrichtungen im Punkte x, y, z, u sind durch das nicht integrale System von Pfaffschen Gleichungen bestimmt

$$\begin{aligned} y\,dz - z\,dy - dx &= 0, \\ y\,du - u\,dy + x\,dz - z\,dx &= 0. \end{aligned}$$

Jede Ebene
$$\begin{aligned} z &= a_1 x + b_1 y + c_1, \\ u &= a_2 x + b_2 y + c_2 \end{aligned}$$

bildet sich auf eine (dreifach ausgedehnte) F_2 ab, die (K') enthält. Insbesondere kann man (vgl. den Schluß von Nr. 1) die Transformation auch so wählen, daß sich unter den ∞^6 Bildern der Ebenen auch ∞^4 (dreidimensionale) Kugeln befinden. Man erhält damit eine (unvollständige) Ebenen-Kugeltransformation des R_4. Eine vollständige Geraden-Kugel- oder Ebenen-Kugel-Transformation ist schon deshalb unmöglich, weil die Schar der Geraden und Ebenen je sechs, die der Kugeln aber nur fünf Parameter enthält.

Genau entsprechend zu der Untersuchung in Nr. 2 kann auch im R_4 die Abbildung verallgemeinert werden zu einer Transformation, welche die Punkte P abbildet auf ∞^4 von den ∞^5 Tangenten einer dreidimensionalen F_2 oder Fundamentalmannigfaltigkeit Σ', die K' enthält.

Schon die Gestalt der Gleichungen (3) zeigt, wie man von hier aus zu bestimmten Verallgemeinerungen, zu entsprechenden Punkt-Geradentransformationen in Räumen höherer Dimension gelangen kann. Daneben besteht die Aufgabe, zunächst im R_4 einen Überblick über alle Möglichkeiten zu gewinnen, wie ihn Lie für den R_3 gegeben hat, und alle diese Möglichkeiten auch durch einfache Beispiele zu verwirklichen.

Über die Ausgleichung des zukünftigen bayerischen Hauptdreiecksnetzes.

Von **Sebastian Finsterwalder.**

Vorgetragen in der Sitzung am 1. Mai 1915.

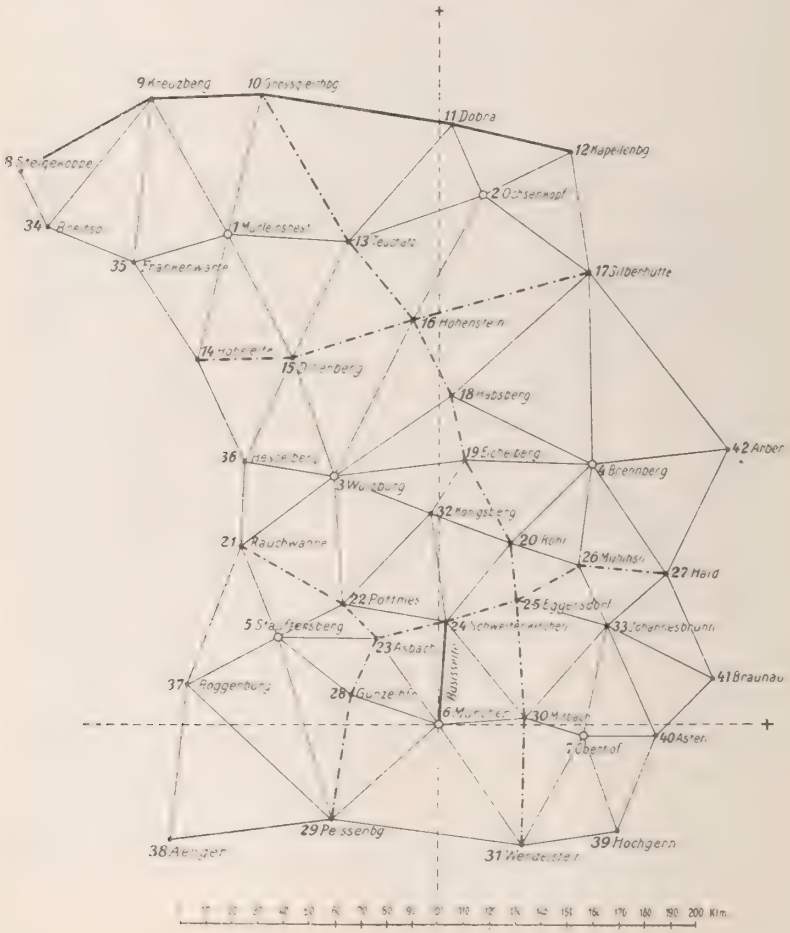
Das zukünftige bayerische Hauptdreiecknetz, welches nach den Erkundungen des K. Bayer. Katasterbureaus entworfen[1]) und in Fig. 1 dargestellt ist, umfaßt 42 Hauptdreieckspunkte, 62 Dreiecke, 103 Seiten und 22 innere Punkte, die zu Kranzsystemen Veranlassung geben. Im Norden hängt es mit 4 Punkten und 3 Seiten mit dem preußischen Hauptdreiecksnetz zusammen, dem noch ein Punkt (Kapellenberg) des sächsischen Dreiecksnetzes[2]) annähernd gleichwertig angeschlossen ist, so daß ein 223 Kilometer langer Anschlußzug (Steigekoppe, Kreuzberg, Großgleichberg. Döbra, Kapellenberg) zur Verfügung steht, der eine Basismessung im Norden des Netzes überflüssig erscheinen läßt. Im Süden ist eine Basismessung vorgesehen, welche die Länge der Dreiecksseite München-Schweitenkirchen liefern soll. Das Netz ist also, obwohl es im übrigen nur eine schlichte Folge von Dreiecken ohne Diagonalen darstellt, reichlich verwickelt und seine Ausgleichung stellt auf alle Fälle eine umfangreiche Arbeit dar, die wohl überlegt sein will. Wenn das Netz als Ganzes ausgeglichen

[1]) Es ist hier gegenüber dem ursprünglichen Entwurf um die Punkte 8 (Steigekoppe) und 34 (Breitsöl) erweitert um eine weitere preußische Anschlußseite einbeziehen zu können.

[2]) Vgl. diese Berichte, Jahrgang 1914, S. 241.

werden soll, so kommen vornehmlich zwei Methoden in Betracht, die zuerst besprochen werden sollen.

Die Methode der bedingten Beobachtungen. Die Beobachtungen an den 42 Stationen ergeben ebensoviele Richtungssätze mit $2 \cdot 103 = 206$ Richtungen, die durch $206 - 42 = 164$ Richtungswinkel ausgedrückt werden können. Wegen des im Norden zu übernehmenden Anschlußzuges fallen 3 von den in den mittleren Ecken sonst zu beobachtenden Winkel



weg, da diese dem Anschlußzug zu entnehmen sind. Es verbleiben also 161 beobachtete Richtungswinkel. Diese unterliegen zunächst den 62 Dreiecks-Schlußbedingungen und den 22 Kranzbedingungen. Außerdem kommen noch 4 Seitenbedingungen hinzu, welche aussagen, daß die Basis im Süden ein bestimmtes Verhältnis zu den 4 Anschlußseiten im Norden hat. Es sind also im Ganzen $62 + 22 + 4 = 88$ Bedingungen zu berücksichtigen. Dementsprechend ergeben sich ebensoviele Gleichungen für die unbekannten 88 Korrelaten, aus denen sich die Verbesserungen der 161 beobachteten Richtungswinkel aufbauen. Die verbesserten Winkel gewährleisten dann eine widerspruchfreie Berechnung der Seiten des Netzes und der Koordinaten der Eckpunkte.

Die Methode der vermittelnden Beobachtungen. Von den 42 Netzpunkten sind 37 neu zu bestimmen. Diese haben 74 unbekannte Koordinaten. Letztere werden so gewählt, daß die 161 gemessenen Winkel möglichst richtig und die Seite München-Schweitenkirchen genau nach der Messung wiedergegeben werden. Mittels der letzteren Bedingung kann man eine (z. B. die nordsüdliche) Koordinate von Schweitenkirchen eliminieren, so daß 73 unbekannte Koordinaten übrig bleiben, durch deren Wahl den 161 Beobachtungen möglichst Rechnung getragen wird. Die Zahl der Unbekannten ist hier also nur 73 und die Unbekannten sind das gewünschte Schlußergebnis der Ausgleichung.

Beide Arten der Ausgleichung haben ihre Vor- und Nachteile; es unterliegt aber kaum einem Zweifel, daß, so lange man nur unter ihnen zu wählen hat, im vorliegenden Falle die zweite Art den Vorzug verdient. Die Hauptrechenarbeit beruht in der Auflösung der Gleichungen für die Unbekannten und wächst mit dem Quadrat ihrer Anzahl; diese Rechenarbeit verhält sich also in den beiden Fällen wie $88^2 : 73^2 = 7744 : 5329$. Der Umstand, daß die Bedingungsgleichungen bei der ersten Methode erheblich leichter zu bilden sind als die Fehlergleichungen bei der zweiten, hebt den Unterschied zu Gunsten der zweiten Methode nicht auf. Aber auch in der Art des Schluß-

ergebnisses ist die zweite Art der ersten überlegen, da dieses gerade in den gesuchten Punktkoordinaten besteht, wobei deren mittlere Fehler, ja wenn man will sogar die Fehlerellipsen der gefundenen Lagen der Punkte in unmittelbarem Anschluß an die Auflösung der Normalgleichungen gefunden werden können. Die erste Art liefert unmittelbar und einfach nur den mittleren Fehler der gemessenen Winkelgrößen und dient in diesem Sinne gewissermaßen nur der Befriedigung der persönlichen Eitelkeit der Messenden, ohne zugleich eine ausreichende Kritik des Ergebnisses zu ermöglichen, da die Punktlagen nicht bloß von der Genauigkeit der gemessenen Winkel, sondern in nicht minderem Grade von der Anlage des Netzes abhängen. Eine Berechnung der Koordinatenfehler, die ja an sich möglich ist, erweist sich hier wegen der großen Zahl der Korrelaten praktisch als ganz undurchführbar. Welche von den beiden Arten der Ausgleichung man auch wählen mag, stets wird die riesige Rechenarbeit in einem gewissen Mißverhältnis zu dem erzielten Schlußergebnis stehen, wenn man nämlich praktische Erwägungen als ausschlaggebend erachtet und nicht das Bewußtsein, das Beste unter dem Möglichen erreicht zu haben, als genügenden Ausgleich für die aufgewendete Arbeit ansieht. Das erwähnte Mißverhältnis liegt in der Natur der Ausgleichung aus einem Guß begründet. Gerade, weil sie den vielen auf das Ergebnis einwirkenden Umständen einzeln und unparteiisch Rechnung trägt, wird die Abhängigkeit des Ergebnisses von diesen Umständen so verwickelt, daß sie weder genau ausgerechnet, noch auch im Einzelnen durchschaut werden kann. Rein praktische Erwägungen haben in vielen ähnlichen Fällen, z. B. auch bei der Ausgleichung des alten bayerischen Hauptdreiecksnetzes durch v. Orff zu einer Teilung des Netzes (bei v. Orff in 30 Polygone) geführt, wobei das Ergebnis der Ausgleichung des einen Teils immer als Zwangsbedingung für die Ausgleichung des anschließenden Teiles eingeführt wird. Dadurch wird die Rechenarbeit auf alle Fälle sehr erheblich vermindert. Allerdings ist das Schlußergebnis abhängig von der Art der Zerlegung des Netzes und der Reihenfolge der Teile

bei der Ausgleichung. Auch verzichtet man von vorneherein auf die möglichst günstige Ausgleichung. In wieweit bei einer solchen teilweisen Ausgleichung eine ausreichende Kritik der Messungsgenauigkeit und ein genügender Einblick in die Sicherheit des Messungsergebnisses erzielt wird, hängt ganz und gar von der Anordnung der Ausgleichung ab. Es soll im folgenden ein diesbezüglicher Vorschlag gemacht werden, welcher die genannten Gesichtspunkte in befriedigender Weise berücksichtigt.

Der Vorschlag setzt voraus, daß Näherungskoordinaten von den Hauptdreieckspunkten bereits bekannt sind, was für das bayerische Netz durch die Vorarbeit des Verfassers[1]) zutrifft. In dieser sind in gemeinsamer konformer Doppelprojektion die genauen Koordinaten der Anschlußpunkte und die genäherten Koordinaten der übrigen Netzpunkte gegeben[2]) und es ist das System so gewählt, daß unter Beibehaltung der Gaußschen Projektionskugel die genäherten Koordinaten des nördlichen Frauenturms in München die Werte Null erhalten. Von dem preußischen System der konformen Doppelprojektion unterscheidet sich das genannte nur in der Wahl des Ausgangsmeridians, der durch München statt durch 31° öst. Ferro geht und die Zählung der Abszissen, die von München aus, statt von 52° 42′ 2″5 n. B. aus geschieht. Das Netz wird nun durch die in Fig. 1 angedeuteten strichpunktierten Linien in 7 Felder zerschnitten und in jedem Feld ein trigonometrischer Punkt als Ausgangspunkt gewählt. Jedes Feld stellt ein einfaches Teilnetz mit wenigen Bedingungen dar; es soll ohne jeden Zwang für sich ausgeglichen werden und zwar nach der Methode der bedingten Beobachtungen. Folgende Tabelle gibt eine Übersicht der in Betracht kommenden Verhältnisse.

---

[1]) Es fehlen die genäherten Koordinaten des Punktes 34 (Breitsöl); diese sind: Absc. + 198394,4, Ord. — 154145,7.

[2]) Der Zusammenschluß des preußischen und sächsischen Hauptdreiecksnetzes im Norden von Bayern. Diese Berichte 1914, S. 259.

Nummer des Feldes	1	2	3	4	5	6	7	Summe
Zahl der Dreiecke	9	6	14	9	7	7	10	62
Zahl der Zentralp.	1	1	2	1	1	1	2	9
Zahl der Bedingungsgl. . .	10	7	16	10	8	8	12	71
Rechenarbeit	100	49	256	100	64	64	144	777

Es werden nun mit den ausgeglichenen Winkelwerten und einem passenden Näherungswert für die Längen ausgehend von den Näherungskoordinaten des gewählten Ausgangspunktes des Feldes Koordinaten aller derjenigen Punkte des zugehörigen Teilnetzes gerechnet, welche mit den preußischen Festpunkten oder mit den Grenzpunkten eines Nachbarfeldes zusammentreffen sollen. Naturgemäß entstehen dabei gegenüber den preußischen Festpunkten und an den Grenzpunkten benachbarter Felder Koordinatenunterschiede, die einer zusammenfassenden Hauptausgleichung unterzogen werden sollen. Wir denken uns dabei die einzelnen Felder unter Beibehaltung ihrer Form ähnlich verändert, verschoben und gedreht, so daß ein möglichstes Zusammenpassen der Felder untereinander und gleichzeitig ein möglichst günstiger Anschluß an die preußischen Festpunkte erfolgt. In dem 6. Feld, das die Basisseite München-Schweitenkirchen (6—24) enthält und das in seinen Abmessungen hiedurch schon bestimmt ist, soll sich die Veränderung bloß auf Verschiebung und Drehung beschränken. Da die Verschiebung des Ausgangspunktes je zwei, die Verdrehung und Maßstabänderung je eine unbekannte Größe für das Feld einführt, so sind hiernach $6 \cdot 4 + 3 = 27$ Unbekannte zu bestimmen. Die dabei notwendige Rechenarbeit wird durch $27^2 = 729$ ausgedrückt und es beziffert sich die Gesamtrechenarbeit einschließlich der in der Tabelle ausgewiesenen auf $729 + 777 = 1506$ gegenüber 7744 bzw. 5329 bei der Ausgleichung aus einem Guß. Sie kann also auf ein Fünftel bis ein Drittel von jener geschätzt werden. Ehe wir auf die weiteren erheblicheren Vorteile dieser Ausgleichung in Teilen auf-

merksam machen, soll auf die genauere Durchführung derselben näher eingegangen werden.

Von den 24 Punkten, welche bei der angegebenen Feldereinteilung auftreten, haben 4, nämlich 8, 9, 11 und 12 feste preußische Koordinaten und einfache Felderkoordinaten, die bei 8 und 9 dem Felde 1, bei 11 und 12 dem Felde 2 angehören. Man wird die Quadrate der Koordinaten-Unterschiede der Feldkoordinaten gegenüber den festen Koordinaten, oder, was auf das Gleiche hinausläuft,[1]) die Quadrate der Entfernungen der Feldlagen von den festen Lagen in die Fehlerquadratsumme aufnehmen. Der Punkt 10 kommt in 2 Feldern vor und ist außerdem preußischer Anschlußpunkt. Man wird das Quadrat der Entfernung des Mittels beider Feldlagen von der festen Lage in die Fehlerquadratsumme einrechnen, um seiner Eigenschaft als Anschlußpunkt an die preußische Vermessung gerecht zu werden. Als gegenseitiger Anschlußpunkt zweier benachbarter Felder wird er wie die Punkte 13, 14, 15, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 24, 26, 27, 28, 29, 30, 31 zu behandeln sein. Man nimmt das doppelte Quadrat der Entfernung jeder der beiden Feldlagen von ihrer Mittellage in die Fehlerquadratsumme auf. Der Punkt 23 kommt in 3 benachbarten Feldern vor. Er liefert 3 Fehlerquadratsummanden, die aus den Entfernungen jeder Feldlage vom Schwerpunkt der 3 Feldlagen gebildet werden. Die Punkte 16 und 25 endlich treten in 4 verschiedenen Feldlagen auf, aus denen je 4 Bestandteile der Fehlerquadratsumme dadurch gebildet werden, daß man die Entfernung jeder Feldlage vom Schwerpunkt der 4 Feldlagen quadriert. Es setzt sich also die Fehlerquadratsumme aus folgenden Summanden zusammen: 5 Summanden infolge des preussischen Anschlusses, 17 mal 2 Summanden infolge des Auf-

[1]) Das gilt nur so lange, als die Entfernungen sich wie in der Ebene aus den Koordinaten-Unterschieden berechnen lassen. Bei konformen Koordinaten wird hiebei die Maßstabsänderung vernachlässigt, die bis zu 0,4 ‰ betragee kann. So lange die Verschiebungen unter einigen Metern bleiben, ist das erlaubt. Eine Berücksichtigung der Maßstabsänderung begegnet keinerlei Schwierigkeiten.

tretens von ebensoviel doppelten gegenseitigen Anschlußpunkten zweier Felder, 1 mal 3 Summanden infolge des dreifachen und 2 mal 4 Summanden infolge der beiden vierfachen Anschlußpunkte. Es gibt insgesamt: $5 + 34 + 3 + 8 = 50$ Entfernungsquadrate oder die doppelte Zahl, wenn man die Quadrate der Koordinaten-Unterschiede zählt. Letztere Zählung schmiegt sich mehr der üblichen Bildung der Fehlergleichungen an, indem man die verbleibenden Koordinaten-Unterschiede als Verbesserungen ansieht, die an den verschiedenen Feldkoordinaten anzubringen sind, damit letztere für denselben Punkt gleiche Werte ergeben. Diese Verbesserungen sind Funktionen der 27 einzuführenden Unbekannten und ihre Quadratsumme wird durch geeignete Wahl derselben zu einem Minimum gemacht. Als Unbekannte führt man am besten ein: die Koordinaten-Verschiebungen der 7 Felder-Ausgangspunkte, welch letztere mit 1 bis 7 bezeichnet sind, die kleinen Drehwinkel, die diese Felder erfahren und 6 kleine Größen, die zur Einheit addiert, das geänderte Maßstabverhältnis der Felder 1, 2, 3, 4, 5 und 7 kennzeichnen. Feld 6 behält, wie schon erwähnt, den Basismaßstab bei. Bezeichnen wir mit x_n^m, y_n^m die Koordinaten des n^{ten} Punktes im m^{ten} Feld nach der ersten Teilausgleichung, mit x_n^m y_n^m dieselben Koordinaten nach der Schlußausgleichung und nennen wir die kleinen Koordinaten-Verschiebungen des Feldausgangs-Punktes dx_m, dy_m, den Drehwinkel da_m und die Streckung der Einheit dk_m, so bestehen folgende Beziehungen:[1])

$$x_n^m = x_n^m + dx_m - (y_n^m - y_m)\, da_m + (x_n^m - x_m)\, dk_m$$
$$y_n^m = y_n^m + dy_m + (x_n^m - x_m)\, da_m + (y_n^m - y_m)\, dk_m,$$

x_m und y_m sind dabei die Koordinaten des Feldausgangs-Punktes vor der Hauptausgleichung $x_m + dx_m$, $y_m + dy_m$ nach derselben.

Die früher erwähnten $2 \times 50 = 100$ Fehlergleichungen lassen sich nun mittels obiger Differentialformeln leicht bilden.

[1]) Diese Formeln gelten streng nur für ebene Koordinaten. Bei konformen Koordinaten wäre wieder der Maßstabunterschied zwischen dem Ausgangspunkt und dem betrachteten Punkt zu berücksichtigen.

Einige charakteristische Gleichungen dieser Art mögen angeführt werden. Die Koordinaten der preußischen Anschlußpunkte werden mit griechischen Buchstaben bezeichnet.

Für den preußischen Anschlußpunkt 9 im Feld 1:

$$x_9^1 - \xi_9 = v_9$$

Ähnlich in y und η; insgesamt 8 Gleichungen.

Für den preußischen Anschlußpunkt 10 in den Feldern 1 und 2:

$$\tfrac{1}{2}(x_{10}^1 + x_{10}^2) - \xi_{10} = v_{10}$$

Ähnlich in y und η; insgesamt 2 Gleichungen.

Für den gleichen Punkt 10 als gegenseitiger Anschlußpunkt der Felder 1 und 2:

$$x_{10}^1 - \tfrac{1}{2}(x_{10}^1 + x_{10}^2) = v'_{10}$$
$$x_{10}^2 - \tfrac{1}{2}(x_{10}^1 + x_{10}^2) = v''_{10}$$

Ähnlich in y; insgesamt 68 Gleichungen.

Für den Punkt 23 als gegenseitiger Anschlußpunkt der Felder 3, 5 und 6:

$$x_{23}^3 - \tfrac{1}{3}(x_{23}^3 + x_{23}^5 + x_{23}^6) = v_{23}$$
$$x_{23}^5 - \tfrac{1}{3}(x_{23}^3 + x_{23}^5 + x_{23}^6) = v'_{23}$$
$$x_{23}^6 - \tfrac{1}{3}(x_{23}^3 + x_{23}^5 + x_{23}^6) = v''_{23}$$

Ähnlich in y; insgesamt 6 Gleichungen.

Für den Punkt 16 als gegenseitiger Anschlußpunkt der Felder 1, 2, 3 und 4:

$$x_{16}^1 - \tfrac{1}{4}(x_{16}^1 + x_{16}^2 + x_{16}^3 + x_{16}^4) = v_{16}$$
$$x_{16}^2 - \tfrac{1}{4}(x_{16}^1 + x_{16}^2 + x_{16}^3 + x_{16}^4) = v'_{16}$$
$$x_{16}^3 - \tfrac{1}{4}(x_{16}^1 + x_{16}^2 + x_{16}^3 + x_{16}^4) = v''_{16}$$
$$x_{16}^4 - \tfrac{1}{4}(x_{16}^1 + x_{16}^2 + x_{16}^3 + x_{16}^4) = v'''_{16}$$

Ähnlich in y; insgesamt 16 Gleichungen.

Diese 100 Gleichungen werden nach den 27 Unbekannten dx_m, dy_m, da_m, dk_m geordnet und aus ihren Koeffizienten in der üblichen Weise jene der Normalgleichungen gebildet, deren

Auflösung dann die Werte der Unbekannten liefert. Die Berechnung der Gewichtskoeffizienten und der mittleren Fehler der Unbekannten, die bei ihrer mäßigen Auswahl vollständig durchgeführt werden kann, liefert dann die wertvollsten Aufschlüsse über die erzielte Genauigkeit der Lagebestimmung durch die Triangulation, indem sie die mittleren Punktfehler oder, wenn man will, auch die Fehlerellipsen von 7 über das Netz gut verteilten Punkten ergibt und außerdem noch die Sicherheit der Orientierung und der Maßstabbestimmung in den 7 um diese Punkte herumliegenden Feldern, wobei der preussische Anschluß im Norden die Ausgangsbasis für die genannte Genauigkeitsbestimmung in dem Sinne abgibt, daß die mittleren Punktfehler und Orientierungsfehler gegenüber jener als richtig angenommenen Basis zu gelten haben.

Mit den aus der Hauptausgleichung ermittelten Unbekannten werden nun die Koordinaten der den einzelnen Feldern zugehörigen Punkte korrigiert und für die Grenzpunkte zweier oder mehrerer Felder die Koordinaten gemittelt. Diese betrachtet man jedenfalls als endgiltige Werte und man hat dann außer den 5 preußischen Anschlußpunkten noch 19 weitere feste Punkte, die über das ganze Netz verteilt sind. Sind die Anschlußdifferenzen genügend klein, so kann man die 7 ausgeglichenen Ausgangspunkte eines jeden Feldes unbedenklich zu den 24 schon bestimmten Punkten hinzunehmen und die noch fehlenden Punkte mit jenen Koordinaten ansetzen, die sie nach der Hauptausgleichung in ihrem Felde haben. Sollten sich jedoch, was kaum zu erwarten ist, Anschlußdifferenzen herausstellen, die zu Bedenken Anlaß geben, so bliebe immer noch der Ausweg, an den 19 + 5 Punkten festzuhalten und die übrigen Punkte jedes Feldes durch kombiniertes Vor- und Rückwärtseinschneiden einzuschalten. Man hätte auf diese Weise im ersten Feld 3, im zweiten Feld 1, im dritten Feld 3, im vierten Feld 2, im fünften Feld 3, im sechsten Feld 1, im siebenten Feld 5 Punkte gemeinsam einzuschalten. Die betreffende Rechenarbeit wäre mit $6^2 + 2^2 + 6^2 + 4^2 + 6^2 + 2^2 + 10^2 = 232$ zu beziffern. Es würde sich damit die Ziffer

für die Gesamtrechenarbeit auf 1738 erhöhen, bliebe aber noch weit hinter der Mindestziffer 5329 einer Gesamtausgleichung aus einem Guß zurück.[1])

Fassen wir endlich zusammen, was sich zu Gunsten der vorgeschlagenen Ausgleichung nach 7 Feldern sagen läßt.

1. Die Rechenarbeit ist gegenüber einer Gesamtausgleichung auf ein Drittel bis ein Viertel vermindert; sie kann in jedem Felde für sich begonnen und weiter geführt werden; man braucht also nicht das Ende der Messungen abzuwarten.

2. Die zwanglose Ausgleichung der einzelnen Felder liefert einwandfreies Material zur Ermittelung der reinen Winkelmessungsfehler.

3. Aus der Zusammenfügung der Felder ergeben sich für sieben gut verteilte Punkte des Netzes die Lagen-, Orientierungs- und Maßstabfehler und damit wird eine zutreffende Kritik des eigentlichen Messungsergebnisses erzielt.

4. Das Ausgleichungsverfahren trägt insofern systematischen Charakter, als das Ergebnis desselben zwar von der Art der Feldereinteilung, nicht aber von der Reihenfolge, in der die Felder aneinandergefügt werden, abhängt. Im vorliegenden Falle ist übrigens die Art der Feldereinteilung durch die Zahl der Felder und die Rücksichten auf den preußischen Anschluß sowie die südbayerische Basismessung so gut wie festgelegt.

---

[1]) Bei der Hauptausgleichung werden auch die Koordinaten des Punktes 6 (München, nördl. Frauenturm) kleine Änderungen erfahren und nicht mehr genau gleich Null sein. Legt man wegen der alten Katasterblatt-Einteilung Wert darauf, die Koordinaten Null für diesen Punkt beizuhalten, so ist eine Transformation sämtlicher Koordinaten erforderlich, die sich jedoch bei der voraussichtlichen Kleinheit der Änderungen sehr einfach erledigen läßt.

Die Lösung der Spannungsaufgabe für das Ausnahmefachwerk.

Von **A. Föppl.**

Vorgelegt in der Sitzung am 1. Mai 1915.

Die Theorie des Fachwerks beschäftigt sich hauptsächlich mit der Ermittelung der Stabspannungen, die entweder in einem statisch bestimmten oder auch in einem unbestimmten Fachwerke durch gegebene Lasten hervorgebracht werden, die an den Knotenpunkten angreifen. Schon längst hat man verschiedene Verfahren gefunden, nach denen diese Spannungsaufgabe für das ebene wie für das räumliche Fachwerk in fast allen überhaupt möglichen Fällen ohne Schwierigkeit und in befriedigender Weise gelöst werden kann.

So weit es sich um statisch unbestimmte Fachwerke handelt, legt man bei der Lösung der Spannungsaufgabe die Annahme zu Grunde, daß die Längenänderungen der Stäbe proportional mit den Stabspannungen und zugleich so klein gegen die ursprünglichen Stablängen sind, daß sie mit hinreichender Genauigkeit als unendlich klein in die Rechnung eingeführt werden dürfen. Bei den praktischen Anwendungen, die man von der Theorie des Fachwerks im Bauwesen zu machen hat, trifft diese Voraussetzung stets mit großer Annäherung zu.

Größere Abweichungen bestehen freilich bei den praktischen Bauausführungen von der anderen Annahme, daß die Fachwerkstäbe in den Knotenpunkten frei drehbar miteinander verbunden sein sollen. Diese Annahme liegt indessen schon dem geometrischen Begriffe des Fachwerks zu Grunde. Wenn

sie nicht genau genug erfüllt ist, wird dadurch zwar die Anwendbarkeit der Theorie auf den betreffenden Fall der Bauausführung entsprechend beeinträchtigt; der Fachwerktheorie selbst kann aber kein Vorwurf daraus gemacht werden, daß sie auf Umstände keine Rücksicht nimmt, die überhaupt nicht in ihren Aufgabenkreis fallen.

Mit diesen Vorbehalten kann man sagen, daß die Spannungsaufgabe der Fachwerktheorie, abgesehen von dem besonderen Falle, der hier besprochen werden soll, bereits als vollständig befriedigend gelöst angesehen werden darf. Bisher noch nicht gelöst ist nämlich die Aufgabe nur bei den sogenannten Ausnahmefachwerken. Darunter versteht man Fachwerke, die trotz genügender Stabzahl und sonst geeigneter Gliederung wegen der besonderen Lage, in der sich die Knotenpunkte gegeneinander befinden, keine steifen und gegen beliebige Belastungen widerstandsfähigen Stabverbände bilden. Um ein einfaches Beispiel dafür vor Augen zu haben, betrachte man den Zusammenschluß von zwei Dreiecken in der Ebene durch drei Verbindungsstäbe. Wenn man jeder Ecke des einen Dreiecks eine Ecke des anderen Dreiecks als entsprechend zuweist und zwischen je zwei entsprechende Ecken einen Verbindungsstab anordnet, erhält man im allgemeinen ein stabiles ebenes Fachwerk. Dagegen tritt der Ausnahmefall ein, sobald die Dreiecke so zueinander liegen und die Stäbe zwischen ihnen so geführt werden, daß sich ihre Richtungslinien entweder in demselben Punkte schneiden oder daß sie parallel zu einander sind.

Ein anderes sehr bekanntes Beispiel liefert das Pascalsche Sechseck. Ein Stabverband aus 9 Stäben, von denen 6 den Umfangsseiten eines Sechsecks und die anderen den drei Hauptdiagonalen folgen, bildet nämlich unter gewöhnlichen Umständen ein widerstandsfähiges Fachwerk. Sobald aber die Ecken des Sechsecks auf einem Kegelschnitte liegen, bildet der Stabverband ein Ausnahmefachwerk.

Die Ausnahmefachwerke haben seit langem in der Fachwerktheorie eine wichtige Rolle gespielt. Gewöhnlich hat man

sich aber doch nur insoweit mit ihnen beschäftigt, als man die Bedingungen nachwies, unter denen der Ausnahmefall eintritt.[1]) Auf die Spannungsaufgabe ging man nicht näher ein, sondern begnügte sich mit der Bemerkung, daß im Grenzfalle, der dem Ausnahmefachwerke entspricht, die Spannungen bei beliebig gegebenen Lasten unendlich groß ausfielen. Natürlich ist aber diese Aussage nur dahin zu verstehen und auch nur dahin verstanden worden, daß selbst noch so große Stabspannungen kein Gleichgewicht mit den Lasten herzustellen vermögen, ohne daß eine Gestaltänderung der Fachwerkfigur erfolgte. Wie groß aber die Spannungen nach einer solchen Gestaltänderung tatsächlich ausfielen, ließ man dahingestellt.

Eine Gestaltänderung tritt bei jedem Fachwerke ein, wenn es belastet wird, da die Stäbe durch die Spannungen elastische Längenänderungen erfahren. Unter gewöhnlichen Umständen bleibt jedoch die Gestaltänderung von derselben Größenordnung wie die Längenänderung der einzelnen Fachwerkstäbe, so daß sie bei der Spannungsermittelung überhaupt nicht beachtet zu werden braucht. Beim Ausnahmefachwerk ist dies aber anders; es stellt auch in dieser Beziehung einen Ausnahmefall dar, indem eine merkliche Gestaltänderung bereits möglich ist, wenn sich auch die Stablängen nur um im Vergleiche dazu unmerklich kleine Größen ändern. Um dieser geometrischen Eigenschaft der Ausnahmefachwerke durch eine anschauliche Bezeichnung Ausdruck zu geben, habe ich ihnen in meinem Lehrbuche der graphischen Statik das Eigenschaftswort „wackelig“ beigelegt. Man könnte daher die Ausnahmefachwerke auch als „Wackelfachwerke“ bezeichnen.

Nachdem sich eine kleine Gestaltänderung vollzogen hat, ist der Ausnahmefall nicht mehr genau verwirklicht und der Stabverband wird um so widerstandsfähiger gegen weitere Form-

[1]) Eine sehr ausführliche und gründliche Untersuchung dieser Art, die sich auch auf das räumliche Fachwerk erstreckt, hat neuerdings Herr Prof. Ernst Kötter in Aachen unter dem Titel „Über den Grenzfall u. s. f.“ im Anhange zu den Abhandlungen der Berliner Akademie für 1912 veröffentlicht. Sonderabdruck im Verlage d. Akad., Berlin 1913.

änderungen, je mehr die Gestaltänderung fortschreitet. Diese Überlegung lehrt, daß jeder Grund fehlt, die Stabspannungen als unendlich groß anzusehen; sie werden nur sehr groß ausfallen im Verhältnisse zu stabilen Fachwerken unter sonst ähnlichen Umständen, weil sich die Fachwerkfigur auch nach der Formänderung immerhin nicht viel von der dem Ausnahmefalle entsprechenden unterscheidet. Aber wenn die Belastung, die von dem Fachwerke aufgenommen werden muß, ziemlich klein ist, können die Stabspannungen, die dadurch hervorgerufen werden, leicht unterhalb der Grenzen bleiben, die man als zulässig anzusehen hat. Es liegt dann kein erhebliches Bedenken gegen eine praktische Ausführung dieser Art vor.

Freilich sind die Ausnahmefachwerke im Vergleiche mit ihnen sonst ähnlichen Anordnungen von stabilen Fachwerken stets nur in geringem Maße widerstandsfähig. Man wird sie daher, wenn nicht zwingende Gründe von anderer Art vorliegen, stets sorgfältig zu vermeiden suchen. Hierin ist jedenfalls der Grund dafür zu erblicken, daß man sich bisher so wenig um die Lösung der Spannungsaufgabe für die Ausnahmefachwerke bemüht hat. In der ersten Auflage meines vorher erwähnten Lehrbuchs, die im Jahre 1900 erschienen ist, habe ich zwar bereits für einen besonders einfachen Fall, der bei gewissen praktischen Anwendungen tatsächlich vorkommt, eine Lösung der Spannungsaufgabe gegeben. Daran habe ich damals die folgende Bemerkung geknüpft: „Ein ganz allgemein anwendbares direktes Verfahren für die Lösung dieser Aufgabe ist bisher, so viel mir bekannt ist, nicht ausgearbeitet worden und ich will mich jetzt auch nicht mit einem Versuche aufhalten, die Lücke auszufüllen.“ Hierin war offensichtlich eine Anregung ausgesprochen, diese Frage in Angriff zu nehmen. Aber obschon das Buch in den Kreisen, die sich mit Fragen dieser Art beschäftigen, eine große Verbreitung gefunden hat, scheint bisher noch Niemand der Aufforderung, wenigstens nicht mit einem merklichen Erfolge, entsprochen zu haben. Als ich vor einiger Zeit selbst Veranlassung fand, mich mit diesen Dingen von neuem zu beschäftigen, beschloß

ich daher, selbst den Versuch zu einer Lösung zu machen, die immerhin von vornherein keineswegs leicht erschien. Dabei stellte sich jedoch schließlich heraus, daß die Lösung durch Einführung von Vernachlässigungen, die den Rahmen der auch sonst üblichen nicht wesentlich überschreiten, weit einfacher gestaltet werden kann, als ich anfänglich vermutet hatte.

Hier werde ich mich damit begnügen, das Verfahren ganz allgemein zu beschreiben und zu begründen und die allgemein gültigen Schlußfolgerungen abzuleiten, die sich daraus ergeben. Zur besseren Erläuterung wäre freilich auch die Behandlung einiger Beispiele wünschenswert; aber diese möchte ich lieber auf eine andere Gelegenheit verschieben.

Um zu einer leicht verständlichen, möglichst einfachen Ausdrucksweise zu gelangen, lege ich bei der Auseinandersetzung des Verfahrens ein ebenes Fachwerk zu Grunde, wie ja auch von jeher das ebene Fachwerk den Hauptgegenstand fast aller Arbeiten über die Fachwerktheorie gebildet hat. Ich bemerke jedoch, daß dieselben Überlegungen mit geringen Änderungen ebenso auch bei räumlichen Ausnahmefachwerken zum Ziele führen.

Um n Knotenpunkt in der Ebene steif miteinander zu verbinden, braucht man $2n - 3$ Stäbe. Diese müssen zwischen den Knotenpunkten so verteilt sein, daß niemals zwischen irgendwie ausgewählten n' von diesen Knotenpunkten $(n > n' > 1)$ mehr als $2n' - 3$ Verbindungsstäbe verlaufen. Die Erfüllung dieser Bedingungen führt im allgemeinen zu einem geometrisch und statisch bestimmten Fachwerke; dem Begriffe des „Ausnahmefachwerks“ oder „Grenzfachwerks“ entspricht es, daß dieselben Bedingungen bei ihm ebenfalls erfüllt sein sollen.

Nimmt man aus dem hiernach aufgebauten Verbande der $2n - 3$ Stäbe einen beliebig ausgewählten Stab heraus, so wird ein zwangläufiger Mechanismus entstehen. Das gilt ebenfalls nicht nur für das statisch bestimmte Fachwerk, sondern im allgemeinen auch noch für das Ausnahmefachwerk. Man muß allerdings hinzufügen, daß Herr Ernst Kötter in seinem Beitrage zur Festschrift für Müller-Breslau und auch in der

vorher schon angeführten Akademieschrift darauf hingewiesen hat, daß dies nicht unbedingt so sein muß. Man kann nämlich, wie Herr Kötter gezeigt hat, auch solche Stabverbände angeben, die bei n Knotenpunkten und weniger als $2n - 3$ Stäben trotzdem „in sich einspannbar", d. h. fähig sind, ein Spannungsbild von Eigenspannungen ohne Mitwirkung äußerer Lasten aufzunehmen und die außerdem bei streng unveränderlichen Stablängen auch als unverschieblich zu betrachten wären. Es ist daher nicht ausgeschlossen, daß man nach Entfernung eines Stabes aus dem Verbande von $2n - 3$ Stäben nicht auf einen Mechanismus, sondern auf einen solchen Kötterschen Stabverband kommt. Aber von diesem ganz besonderen Falle will ich hier absehen und mich damit begnügen, ein gewöhnliches Ausnahmefachwerk zu untersuchen, das durch Fortnahme eines Stabs in einen Mechanismus verwandelt werden kann.

Daß der Stabverband ein Ausnahmefachwerk bildet, ist alsdann darauf zurückzuführen, daß der Stab, den man entfernt hatte, um einen Mechanismus herzustellen, nach seinem Wiedereinsetzen wenigstens eine kleine Bewegung des Mechanismus nicht zu verhindern vermag. Das ist nur unter der Bedingung möglich, daß sich der Abstand der Knotenpunkte des Mechanismus, zwischen denen der herausgenommene Stab verlief, bei einer kleinen Bewegung des Mechanismus ohnehin nicht ändert und daß daher die bestehende Bewegungsmöglichkeit durch das Einsetzen des Stabs nicht wieder aufgehoben werden kann. Diese Überlegung führt zu dem von Mohr für die Ausnahmefachwerke angegebenen Kennzeichen, daß irgend ein Stab, etwa der, den wir uns herausgenommen dachten, eine Länge haben muß, die entweder ein Maximum oder ein Minimum bildet, das mit den als gegeben anzusehenden Längen aller übrigen Stäbe aus Gründen des geometrischen Zusammenhangs noch verträglich ist.

Der kürzeren Ausdrucksweise wegen soll hier der Stab, durch dessen Herausnahme man das Fachwerk in den vorher besprochenen Mechanismus verwandelt, als der Hauptstab bezeichnet werden. Bei der Bezifferung, durch die wir her-

nach die einzelnen Stäbe des Fachwerks voneinander unterscheiden wollen, soll er die Ziffer 0 erhalten. Welchen Stab des Fachwerks man als den Hauptstab ansehen will, ist im allgemeinen gleichgültig, wenn nur für ihn das vorher genannte Mohrsche Kennzeichen zutrifft. Gewöhnlich und so auch bei den vorher als Beispiele angeführten einfachen Fällen kann sogar jeder Stab des Fachwerks als Hauptstab ausgewählt werden. Gehen jedoch z. B. von einem Knotenpunkte nur zwei Stäbe aus, die nicht in einer geraden Linie liegen, so kann von diesen beiden Stäben jedenfalls keiner als Hauptstab angesehen werden, da das vorher angeführte Mohrsche Kennzeichen für ihn nicht zutrifft. Ferner ergibt sich aus den weiteren Betrachtungen, daß nur solche Stäbe nicht als Hauptstäbe gelten können, die bei dem in dem Ausnahmefachwerke möglichen Spannungsbilde von Eigenspannungen nicht beteiligt sind, sondern beim Fehlen äußerer Lasten notwendig spannungslos bleiben müssen. Die Entscheidung nicht nur über die zulässige, sondern zugleich auch über eine zweckmäßige Auswahl des Hauptstabs wird in der Regel bei den Ausnahmefachwerken, für die man die Spannungsaufgabe zu lösen wünscht, keinerlei Schwierigkeiten verursachen.

Die augenblickliche Stellung des Mechanismus, der durch Entfernen des Hauptstabs hervorgegangen ist, soll durch eine geeignet gewählte Veränderliche φ gekennzeichnet werden. Am zweckmäßigsten wird es gewöhnlich sein, als Hülfsveränderliche φ einen Winkel zu wählen, den zwei Stäbe miteinander bilden, die sich bei einer Bewegung des Mechanismus gegeneinander drehen. Für die Ausgangsstellung, die der Mechanismus im gegebenen Ausnahmefachwerke einnahm, sei der Winkel mit φ_0 bezeichnet und für die Drehung $\varphi - \varphi_0$ sei, unter der Voraussetzung, daß die Drehung ziemlich klein bleibt, kürzer $\Delta\varphi$ geschrieben.

Man kann aber unter dem bei den folgenden Rechnungen vorkommenden Buchstaben φ auch den Abstand zwischen zwei passend ausgewählten Knotenpunkten des Mechanismus verstehen. In diesem Falle würde eine Stabvertauschung, bei der

man den beseitigten Hauptstab durch den Stab von der Länge q_0 ersetzt, das Ausnahmefachwerk in ein gewöhnliches stabiles Fachwerk verwandeln. Ich nehme hier zunächst an, daß q ein die Stellung des Mechanismus beschreibender Winkel sein soll, mache jedoch darauf aufmerksam, daß die aufgestellten Formeln auch bei der anderen Deutung des Buchstabens ihre Gültigkeit behalten.

Der Abstand der Knotenpunkte, zwischen denen im Ausnahmefachwerke der Hauptstab verlief, sei für irgend eine Stellung des Mechanismus mit l bezeichnet und für die Anfangsstellung mit l_0. Der Abstand l ist als eine Funktion von q aufzufassen und für die Änderung $l - l_0$ oder Δl, die l bei einer kleinen Bewegung Δq des Mechanismus erfährt, findet man nach dem Taylorschen Satze

$$\Delta l = \Delta q \frac{\partial l}{\partial q} + \tfrac{1}{2} \Delta q^2 \frac{\partial^2 l}{\partial q^2} + \cdots$$

Nach der Voraussetzung, daß es sich um ein Ausnahmefachwerk handeln soll, ist aber der erste Differentialquotient von l nach q gleich Null. Unter Vernachlässigung von höheren Potenzen der kleinen Größe Δq behält man daher

$$\Delta l = \tfrac{1}{2} \Delta q^2 \frac{\partial^2 l}{\partial q^2}.$$

Der Wert des zweiten Differentialquotienten von l für die Anfangsstellung des Mechanismus kann und muß in jedem Beispiele, für das man die Spannungsaufgabe lösen soll, auf Grund einer geometrischen Betrachtung der Bewegung, die der Mechanismus ausführt, zahlenmäßig ermittelt werden. Sollten sich für eine genaue Berechnung irgend welche Schwierigkeiten einstellen, so wird es doch stets leicht möglich sein, auf graphischem Wege einen hinreichend genauen Näherungswert dafür abzuleiten, indem man mehrere aufeinander folgende Stellungen des Mechanismus im Maßstabe so genau als möglich aufzeichnet und die aus der Zeichnung abgemessenen Abstände l mit den zugehörigen Drehungen Δq aus der Anfangs-

stellung vergleicht. Jedenfalls darf daher für die weitere Untersuchung vorausgesetzt werden, daß der Wert des zweiten Differentialquotienten von l nach φ für die Anfangsstellung des Mechanismus bereits ermittelt sei. Er ist dann als eine bekannte konstante Größe anzusehen, für die weiterhin die Bezeichnung c_0 gebraucht werden soll. Die vorige Gleichung ist dann kürzer

$$\Delta l = \tfrac{1}{2} c_0 \Delta\varphi^2 \tag{1}$$

zu schreiben.

Bisher war angenommen, daß die Stablängen $l_1 l_2 \ldots l_k$ konstant bleiben sollten. Jetzt setze ich aber voraus, daß nicht nur der Winkel φ_0 eine Änderung um $\Delta\varphi$ erfahren soll, sondern daß zugleich auch alle Stäbe des Mechanismus ihre Längen um beliebige kleine Größen Δl_1, $\Delta l_2 \ldots \Delta l_k$ ändern sollen. Die augenblickliche Gestalt und Stellung des Mechanismus wird dann durch die voneinander unabhängigen Veränderlichen φ, l_1, $l_2 \ldots l_k$ beschrieben und der Abstand l der Endknotenpunkte des aus dem Ausnahmefachwerk herausgenommenen Hauptstabs ist als eine Funktion aller dieser Variabeln aufzufassen. Nachher sollen unter den Δl_1 u. s. f. elastische Längenänderungen der Stäbe verstanden werden, die nach dem, was vorher besprochen wurde, und mit demselben Rechte wie bei der Spannungsberechnung für die gewöhnlichen statisch unbestimmten Fachwerke mit genügender Annäherung als unendlich klein angesehen werden dürfen. Hiernach ist die Änderung von l, die zu einer solchen Änderung Δl_1 von l_1 gehört, wenn dabei die anderen unabhängigen Veränderlichen als konstant angesehen werden,

$$\Delta l = \Delta l_1 \frac{\partial l}{\partial l_1} \tag{2}$$

zu setzen. Der Differentialquotient von l nach l_1 verschwindet nämlich, wie wir nachher noch sehen werden, im allgemeinen nicht; in der Regel wird vielmehr Δl mit Δl_1 von ungefähr gleicher Größenordnung sein. Von der Beifügung eines weiteren Gliedes in der Taylorschen Entwickelung mit dem Faktor Δl_1^2 darf daher abgesehen werden.

Auch die Differentialquotienten von l nach l_1 u. s. f. können und müssen im einzelnen Falle sämtlich zahlenmäßig ermittelt werden. Das wäre, wie vorher bei c_0, durch eine Untersuchung der Bewegung möglich, die der Mechanismus ausführt. Kürzer und auch noch aus anderen Gründen zweckmäßiger ist aber ein anderes Verfahren.

Wie vorher schon bemerkt, gehört es nämlich zu den wichtigsten und längst bekannten Eigenschaften des Ausnahmefachwerks, daß in ihm Spannungen auftreten können, die an jedem Knotenpunkte Gleichgewicht herstellen, ohne daß dabei äußere Kräfte mitzuwirken brauchten. Um sich davon zu überzeugen, denke man sich den Hauptstab herausgenommen und an seinen beiden Endknotenpunkten Lasten S_0 angebracht von gleicher Größe und entgegengesetzten Richtungen, so wie sie einer vom Hauptstabe übertragenen Zugspannung entsprechen würden. Bei einer kleinen virtuellen Bewegung, die man hierauf mit dem Mechanismus vornimmt, ist die Summe der Arbeitsleistungen der beiden Kräfte S_0 gleich Null, weil sich nach der grundlegenden Eigenschaft des Ausnahmefachwerks der Abstand der beiden Angriffspunkte nicht, oder doch wenigstens nur um unendlich kleine Größen von der zweiten Ordnung ändert. Hierin besteht aber nach dem Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten das hinreichende Kennzeichen dafür, daß sich die beiden Lasten S_0 an dem Mechanismus im Gleichgewichte halten. Es müssen sich hiernach in den anderen Stäben Spannungen S_1, S_2 . . . S_k ausbilden, die zusammen mit den Lasten S_0 an jedem Knotenpunkte Gleichgewicht herstellen.

Das Spannungsbild S_0, S_1, S_2 . . . S_k der „Eigenspannungen läßt sich im einzelnen Falle auch durch einen Kräfteplan vor Augen führen, der für eine beliebige Annahme von S_0 in bekannter Weise mit geringer Mühe aufgezeichnet werden kann. Zweckmäßig ist es, die Spannung S_0 im Hauptstabe hierbei als eine Zugspannung von der Lasteinheit anzunehmen, wie es in ähnlicher Weise auch bei der Lösung der Spannungsaufgabe für die gewöhnlichen statisch unbestimmten Fachwerke zu geschehen pflegt. In der Folge bezeichne ich

diesen Kräfteplan der Eigenspannungen mit dem Buchstaben u und zwar derart, daß die daraus entnommene Spannung des Stabes 1 mit u_1 bezeichnet wird u. s. f. Jedes u ist positiv zu rechnen, wenn es einer Zugspannung und negativ, wenn es einer Druckspannung entspricht. Für den Hauptstab hat man hiernach auf jeden Fall

$$u_0 = +1 \tag{3}$$

zu setzen.

Nachdem der Kräfteplan u gezeichnet ist, denke man sich außer dem Hauptstabe noch einen anderen Stab, etwa den Stab 1, der ja ein ganz beliebiger Stab sein kann, aus dem ganzen Verbande entfernt. Um das vorher betrachtete Gleichgewicht dann noch weiter aufrecht zu erhalten, bringe man an den Endknotenpunkten von Stab 1 zwei äußere Kräfte an von derselben Größe und Richtung wie die daran vorher angreifende Stabspannung von Stab 1. Die Größe stimmt daher mit u_1 überein und die Richtung bestimmt sich nach dem Vorzeichen von u_1. Bei einer virtuellen Bewegung des jetzt mit zwei Freiheitsgraden ausgestatteten Stabverbandes möge q konstant bleiben, während sich die Entfernung der Endknotenpunkte des herausgenommenen Stabes 1, die vorher gleich l_1 war, um den kleinen Betrag Δl_1 ändern soll. Dann steht die zugehörige Änderung der Entfernung der Endknotenpunkte des gleichfalls herausgenommenen Hauptstabes Δl mit Δl_1 in dem durch Gl. (2) angegebenen Zusammenhange.

Bei dieser virtuellen Bewegung muß die Summe der Arbeitsleistungen der vier an dem Stabverbande angreifenden äußeren Kräfte gleich Null sein. Die beiden Kräfte u_1 leisten hierbei zusammen genommen eine Arbeit

$$-u_1 \Delta l_1,$$

wobei das negative Vorzeichen davon herrührt, daß die Zugspannungen positiv gerechnet werden und daß Δl_1 positiv ist, wenn es eine Verlängerung bedeutet, wobei aber die Zugspannungen, weil sich die Angriffspunkte entgegen den Kraftrichtungen voneinander entfernen, eine negative Arbeit leisten.

In derselben Weise läßt sich auch die Arbeit der an den Endknotenpunkten des herausgenommenen Hauptstabes angreifenden Zugspannungen von der Lasteinheit ausdrücken und die Arbeitsgleichung lautet daher

$$-\Delta l - u_1 \Delta l_1 = 0,$$

woraus in Verbindung mit Gl. (2)

$$\frac{\partial l}{\partial l_1} = -u_1 \tag{4}$$

gefunden wird. Hiernach können die Differentialquotienten von l nach den unabhängigen Veränderlichen $l_1 \ldots l_k$ ohne weiteres aus dem Kräfteplan u entnommen werden.

Hierauf kehren wir zur Betrachtung der Gestaltänderung zurück, die der durch Herausnahme des Hauptstabs erhaltene Mechanismus erfährt, wenn sich gleichzeitig q um Δq und die Stablängen l_1, $l_2 \ldots l_k$ um beliebige kleine Beträge $\Delta l_1 \ldots \Delta l_k$ ändern. Die zugehörige Änderung der Strecke l ergibt sich mit Rücksicht auf Gl. (4) zu

$$\Delta l = \tfrac{1}{2} c_0 \Delta q^2 - u_1 \Delta l_1 - u_2 \Delta l_2 \cdots - u_k \Delta l_k \tag{5}$$

Insbesondere gilt diese Gleichung auch für den Fall, daß man unter den Δl die elastischen Längenänderungen versteht, die die Stäbe durch die Spannungen erfahren, die in dem Ausnahmefachwerk durch die daran angebrachte Belastung hervorgerufen werden. Bezeichnet man die Spannung, die hierbei der Hauptstab aufzunehmen hat, mit X, die der übrigen Stäbe mit $S_1, S_2 \ldots S_k$ und die Stabkonstanten mit $r_0, r_1, r_2 \ldots r_k$, so geht die vorige Gleichung hierfür über in

$$r_0 X = \tfrac{1}{2} c_0 \Delta q^2 - u_1 r_1 S_1 - u_2 r_2 S_2 \cdots - u_k r_k S_k \tag{6}$$

Die in dieser Gleichung vorkommenden Spannungen kann man sich zu einem Kräfteplan zusammengesetzt denken, in dem außer ihnen noch die gegebenen Lasten P auftreten. Aber die Stabspannungen sind, weil es sich um ein Ausnahmefachwerk handelt, jedenfalls bedeutend größer, als die Lasten P. Dies gilt um so mehr, je kleiner die Lasten sind und je kleiner

hiermit auch die durch sie hervorgebrachte Gestaltänderung der Fachwerkfigur bleibt. Wenn beide klein genug sind, kann sich daher der Kräfteplan, vom Maßstabe abgesehen, nur sehr wenig von dem vorher bereits besprochenen Kräfteplan u der Eigenspannungen unterscheiden. Wirklich gleich dürfte man beide Kräftepläne freilich nur unter der Voraussetzung unendlich kleiner Lasten und hiermit einer unendlich kleinen Gestaltänderung der Fachwerkfigur setzen.

Aber die Annahme, daß es als genügend zu erachten sei, die Formänderungen als unendlich klein anzusehen und den daraus hervorgehenden Fehler mit in den Kauf zu nehmen, liegt der Lösung der Spannungsaufgabe bereits in allen anderen Fällen zu Grunde, mit denen sich die Fachwerktheorie beschäftigt. Man braucht daher auch in unserem Falle nicht zu zögern, sie sich anzueignen. Freilich ist die Ungenauigkeit, die dadurch herbeigeführt wird, hier größer als sonst, weil die Änderung $\Delta\varphi$, von der die Gestaltänderung des Ausnahmefachwerks hauptsächlich abhängt, weit größer ausfällt, als die verhältnismäßigen Längenänderungen der Fachwerkstäbe. Man kann sich aber, wenn aus diesem Grunde ein Bedenken erhoben wird, immer darauf zurückziehen, daß die Betrachtung nur für den Grenzfall unendlich kleiner Lasten und zugleich auch einer unendlich kleinen Gestaltänderung Anspruch auf genaue Gültigkeit erhebt. Da bei den praktischen Anordnungen der Theorie die zulässigen Fehlergrenzen gewöhnlich sehr weitherzig bemessen werden, so daß selbst auf einige Prozente mehr oder weniger im Schlußergebnisse nicht viel ankommt, wird man jedoch wohl in allen Fällen, die praktisch vorkommen können, unbedenklich die Formeln verwenden dürfen, die unter der Voraussetzung unendlich kleiner Lasten abgeleitet sind.

Auf Grund dieser Überlegungen genügt es, in Gl. (6)

$$S_1 = u_1 X \tag{7}$$

u. s. f. zu setzen. Hiermit geht Gl. (5) über in

$$X(r_0 + u_1^2 r_1 + \cdots + u_k^2 r_k) = \tfrac{1}{2} c_0 \Delta\varphi^2$$

Hierbei ist es nach Gl. (3) zulässig, beim ersten Gliede in der Klammer noch den Faktor u_0^2 beizufügen, um es auf die gleiche Form wie die übrigen Glieder zu bringen. Die Gleichung lautet dann

$$X \Sigma u^2 r = \tfrac{1}{2} c_0 \Delta\varphi^2 \tag{8}$$

Die Summe ist über alle Stäbe des Ausnahmefachwerks zu erstrecken und leicht zahlenmäßig auszurechnen. Jedenfalls liefert sie einen positiven Wert und hieraus folgt, daß X und c_0 stets vom gleichen Vorzeichen sein müssen.

Um die gestellte Aufgabe zu lösen, müssen wir sowohl X als Δq berechnen und Gl. (8) liefert zunächst *eine* Gleichung zur Berechnung der beiden Unbekannten. Sie ging aus der Betrachtung des geometrischen Zusammenhangs der Fachwerkfigur hervor, indem für ein gegebenes Δq die geänderten Stablängen miteinander verträglich sein müssen, was eben durch Gl. (8) zum Ausdruck gebracht wird. Nun brauchen wir noch eine zweite Gleichung zwischen den beiden Unbekannten, die nur dadurch erhalten werden kann, daß man den statischen Zusammenhang zwischen dem von der Größe X abhängigen Spannungsbilde und den gegebenen Lasten P in geeigneter Weise zum Ausdruck bringt.

Zu diesem Zwecke wollen wir eine virtuelle Bewegung des durch Herausnahme des Hauptstabs erhaltenen Mechanismus betrachten, bei der sich von den unabhängigen Veränderlichen nur der Winkel φ, der durch die Formänderung die Größe $q_0 + \Delta q$ angenommen hatte, weiterhin um einen unendlich kleinen Betrag $\delta\varphi$ ändert, während die Längen l_1 bis l_k die Größen beibehalten, die sie durch die elastische Formänderung erhalten haben. Die Länge l des Hauptstabs muß sich dagegen infolge davon auch um ein Differential $\delta\Delta l$ bei der virtuellen Verschiebung ändern und zwar finden wir aus Gl. (5)

$$\delta\Delta l = c_0 \Delta\varphi \cdot \delta\varphi \tag{9}$$

Bei der virtuellen Verschiebung, die hiermit näher bezeichnet ist, legen die Angriffspunkte der gegebenen Lasten P

gewisse Wege zurück, die für jeden gegebenen Fall ohne Schwierigkeit festgestellt werden können. Zunächst kann man den Weg δs_1, der vom Angriffspunkte der Last P_1 in der Richtung dieser Last zurückgelegt wird, in der Form

$$\delta s_1 = \frac{\partial s_1}{\partial \varphi} \delta \varphi$$

anschreiben. Da wir aber annehmen dürfen, daß der Zusammenhang zwischen dem Wege s_1 und dem Winkel φ oder $\Delta\varphi$ in jedem Falle, für den man die Spannungsaufgabe zu lösen wünscht, ohne weiteres ersichtlich sein wird, dürfen wir den in dieser Gleichung vorkommenden Differentialquotienten als eine, wenn nicht genau, so doch mindestens mit hinreichender Annäherung zahlenmäßig angebbaren Wert ansehen, den wir weiterhin s_1' bezeichnen wollen. Die vorige Gleichung lautet dann

$$\delta s_1 = s_1' \delta \varphi$$

und für die Arbeit aller äußeren Kräfte P bei der betrachteten virtuellen Verschiebung findet man

$$\delta \varphi \Sigma P s'.$$

Bei der Berechnung der Summe kommt es natürlich nur auf die relativen Verschiebungen der Knotenpunkte gegeneinander an, denn bei einer Verschiebung ohne Gestaltänderung wird die Summe der Arbeiten aller P gleich Null, da diese den Gleichgewichtsbedingungen am starren Körper auf jeden Fall genügen müssen.

Für die Arbeit der Kräfte X, die an den Endknotenpunkten des beseitigten Hauptstabs noch als weitere äußere Kräfte am Mechanismus angreifen, erhält man

$$- X \delta \Delta l$$

und mit Rücksicht auf Gl. (9) läßt sich daher nach Wegheben des gemeinschaftlichen Faktors $\delta\varphi$ die Arbeitsgleichung

$$\Sigma P s' - X c_0 \Delta \varphi = 0 \qquad (10)$$

schreiben. Es bleibt jetzt nur noch übrig, die beiden Gleichungen (8) und (10) nach den Unbekannten X und Δq aufzulösen. Man findet

$$X = \sqrt{\frac{(\Sigma P s')^2}{2 c_0 \Sigma u^2 r}} \tag{11}$$

$$\Delta q = \sqrt{\frac{2 \Sigma u^2 r \cdot \Sigma P s'}{c_0^2}}. \tag{12}$$

womit die Aufgabe gelöst ist, da alle auf den rechten Seiten beider Gleichungen vorkommenden Größen nach den darüber früher gemachten Bemerkungen als bereits bekannt anzusehen sind, und die übrigen Spannungen aus Gl. (7) folgen, nachdem X berechnet ist.

Ein besonderer Fall tritt ein, wenn die Lasten P so gegeben sind, daß für sie

$$\Sigma P s' = 0 \tag{13}$$

wird. Dann erhält man nach den vorhergehenden Gleichungen sowohl X als Δq gleich Null. Das ist indessen nicht wörtlich zu nehmen. Vielmehr muß man dieses Rechenergebnis dahin deuten, daß X keineswegs, wie bei der Ableitung der Formeln vorausgesetzt war, sehr viel größer wird, als die Lasten P sind. Die in Gl. (7) ausgesprochene Näherungsannahme verliert daher in diesem Falle ihre Gültigkeit und damit fallen auch alle Folgerungen, die daraus gezogen wurden. Nur wenn $\Sigma P s'$ von Null so viel verschieden ist, daß das mit diesem Werte nach Gl. (11) berechnete X bedeutend größer ausfällt, als jede der Lasten P, sind die Gleichungen (11) und (12) überhaupt anwendbar.

Übrigens ist der durch Gl. (13) gekennzeichnete Belastungsfall schon früher näher untersucht und die Spannungsaufgabe für ihn bereits gelöst worden. Er ist von der Art, daß der durch Herausnahme des Hauptstabs erhaltene Mechanismus unter dem Einflusse der Kräfte im Gleichgewicht bleibt, ohne daß dabei eine Spannung X mitzuwirken braucht. Andererseits kann man aber für das Ausnahmefachwerk auch unend-

lich viele Spannungsbilder angeben, bei denen X einen beliebigen Wert annimmt, während keine Lasten an den Knotenpunkten angreifen. Beim Bestehen von Gl. (13) sind daher unendlich viele Gleichgewichtsmöglichkeiten vorhanden, die durch Übereinanderlegung des zuerst angeführten Spannungsbildes mit einem der zuletzt erwähnten herauskommen. Die Aufgabe, die Spannungen zu bestimmen, ist statisch unbestimmt in demselben Sinne wie bei den Fachwerken mit einem überzähligen Stabe und sie kann auch mit denselben Hülfsmitteln wie bei diesen gelöst werden. In meinem früher schon erwähnten Lehrbuche der graphischen Statik kann man diese Lösung finden.

Weiterhin sehe ich von diesem Falle ab, nehme also an, daß die Gleichungen (11) und (12) wirklich als zutreffend gelten dürfen.

Dann ist ferner der Grenzfall zu erwähnen, daß alle Stabkonstanten r gleich Null zu setzen sind. Das würde heißen, daß die Stäbe als starr betrachtet werden sollen. Die Formeln liefern dann $\Delta\varphi = 0$, d. h. man erfährt daraus, was an sich selbstverständlich ist, daß bei vollkommen unveränderlichen Stablängen keine Gestaltänderung der Fachwerkfigur eintreten kann, und ferner $X = \infty$. Das ist die Lösung, mit der man sich gewöhnlich bei der Behandlung der Statik des Ausnahmefachwerks begnügt und die in der allgemeinen gültigen Lösung auch mit enthalten ist. — Sollte $c_0 = 0$ werden, so wäre $\Delta\varphi = \infty$, d. h. man hätte eine so große Gestaltänderung zu erwarten, daß die vorhergehenden Betrachtungen, die eine kleine Gestaltänderung voraussetzen, nicht mehr anwendbar blieben. Insbesondere würde dieser Fall eintreten, wenn der Stabverband einen sogenannten übergeschlossenen Mechanismus bildete; man hätte es aber dann nicht mehr mit einem Ausnahmefachwerke im gewöhnlichen Sinne dieses Wortes zu tun.

Wenn die Gleichungen (11) und (12) hiernach überhaupt zu Recht bestehen, läßt sich als wichtigste Folgerung daraus entnehmen, nach welchem Gesetze die Stabspannungen und

die Gestaltänderung der Fachwerkfigur zunehmen, wenn man die Lasten P wachsen läßt und zwar so, daß alle Lasten P proportional miteinander wachsen. Man sieht, daß die Gestaltänderung mit der $\frac{1}{3}^{\text{ten}}$ und die Spannungen mit der $\frac{2}{3}^{\text{ten}}$ Potenz der Lasten wachsen. Zur 8-fachen Belastung gehört demnach eine verdoppelte Gestaltänderung und in jedem Stabe eine vierfache Spannung.

Zu demselben Schlusse war ich schon früher bei dem einfachen Beispiele gekommen, das ich, wie bereits erwähnt, in der ersten Auflage meines Lehrbuchs der graphischen Statik (und dann auch in den folgenden) behandelt hatte. Es hat sich aber jetzt herausgestellt, daß diesem Ergebnisse eine viel allgemeinere Gültigkeit zukommt. Während bei dem gewöhnlichen statisch unbestimmten Fachwerke die Spannungen und die Formänderungen proportional mit den Lasten zunehmen und auch noch bei den Ausnahmefachwerken das Gleiche gilt, wenn für die Lasten die durch Gl. (13) ausgesprochene Bedingung erfüllt ist, zeigen die Ausnahmefachwerke anderenfalls und im Gegensatze hierzu das durch die Gl. (11) und (12) ausgesprochene Verhalten.

Schließlich möchte ich noch einige Bemerkungen über die Genauigkeit machen, mit der die Gleichungen (11) und (12) voraussichtlich für einen bestimmten, praktisch vorliegenden Fall zutreffen werden. Daß man bei der Anwendung dieser Gleichungen an gewisse Beschränkungen gebunden ist, war schon erwähnt und ich möchte nur nochmals betonen, daß sie nur für Belastungen gelten, die nicht so groß sind, um Stabspannungen hervorzurufen, durch die die Proportionalitätsgrenze überschritten wird. Außerdem muß aber auch in Erinnerung behalten werden, daß bei der Ableitung der Gleichungen, wie bei allen Berechnungen, die zur Fachwerktheorie im engeren Sinne gehören, keine Rücksicht auf den Einfluß der Steifigkeit der Knotenpunkte genommen wurde. Wie groß die Abweichungen sind, die hierdurch gegenüber dem wirklichen Verhalten eines genieteten Stabverbandes hervorgerufen werden, muß ich vorläufig unentschieden lassen. Man könnte

daran denken, eine Berechnung nach Art der Theorie der Sekundärspannungen vorzunehmen, um zu einem Urteile darüber zu gelangen. Besser wäre aber eine experimentelle Prüfung, die in einem Vergleiche von Gl. (12) mit den Ergebnissen eines Belastungsversuchs an einem geeigneten Modell bestehen könnte. Ich werde mir noch überlegen, ob ich einen Versuch dieser Art oder vielmehr eine Versuchsreihe, da ein einzelner Versuch nicht ausreichend erscheinen könnte, bei Gelegenheit selbst vornehmen oder sie wenigstens in die Wege leiten soll.

Bei dem Vergleiche der Formeln mit den Ergebnissen eines Belastungsversuchs wird man übrigens jedenfalls noch auf einen anderen Umstand zu achten haben, von dem bisher noch nicht die Rede war. Geringe unbeabsichtigte und leicht unbeachtet bleibende Abweichungen der Fachwerkgestalt von der dem Ausnahmefalle entsprechenden infolge von Ungenauigkeiten in der Ausführung, die bis zu einem gewissen Grade überhaupt unvermeidlich sind, können nämlich gerade beim Ausnahmefachwerke unter Umständen von erheblichem Einflusse auf das Verhalten des Versuchsmodells sein. Sie dürften sich darin äußern, daß die Formänderung nicht einfach proportional mit der dritten Wurzel aus der Belastung zunimmt, sondern so, als wenn den wirklich aufgebrachten Lasten schon eine Anfangsbelastung vorausgegangen wäre, durch die man sich die bereits bestehende Abweichung von der Figur des Ausnahmefalls hervorgebracht denken könnte. Um dem Rechnung zu tragen, ließe sich in Gl. (12) zu $\Sigma P s'$ ein konstantes Glied beifügen. Einstweilen scheint es aber nicht nötig, hierauf näher einzugehen.

Über die Transformation linearer Formen und die Lösung linearer Gleichungen.

Von **A. Voss.**

Vorgetragen in der Sitzung am 1. Mai 1915.

§ I.

Die Auflösung linearer Gleichungen ist durch den Begriff des Ranges r der Matrix des Gleichungssystems ihrem allgemeinen Verlaufe nach vollständig erledigt. Dabei müssen aber die Unbekannten, welche mit Hülfe der übrigen, willkürlich bleibenden, zu ermitteln sind, so gewählt werden, daß die Determinante r-Grades ihrer Koeffizienten von Null verschieden ist. Aber wenn, wie das bei Fragen der Geometrie und Mechanik häufig der Fall ist, einige dieser Unbekannten eine vorgeschriebene Bedeutung haben, während die anderen nur als zu bestimmende Parameter auftreten, läßt diese Rechnung häufig die erforderliche Symmetrie vermissen. Herr Frobenius hat allerdings eine vollständig symmetrische Behandlung von m linear voneinander unabhängigen Gleichungen mit $n > m$ Unbekannten durch seine Methode der Fundamentallösungen gegeben;[1]) bei der Willkürlichkeit der in diese letzteren eingehenden Größen führt sie aber schon bald zu recht umständlichen Ausdrücken.

Schon bei den einfachsten Fragen der Geometrie und Mechanik, wo bei der Benutzung von Parallelkoordinaten gerade

[1]) Über das Pfaffsche Problem, Borchardts Journal 82, S. 236.

Linien als Orter zu bestimmender Punkte auftreten, begnügt man sich daher häufig mit der Ermittelung der Ebenen, deren Schnittlinien diese Punkte bilden, falls man nicht Betrachtungen der Liniengeometrie oder der Vektorenrechnung heranziehen will. Man kann indes diesen formalen Mangel leicht beseitigen, wie zunächst an einigen typischen Beispielen gezeigt werden möge.

Die Geschwindigkeitskomponenten eines Punktes mit den rechtwinkeligen Koordinaten x, y, z, welche vermöge einer Rotation mit dem Komponenten p, q, r um eine (der Einfachheit halber) durch den Anfang der Koordinaten gehende Achse und durch die Translationskomponenten u, v, w entstehen, sind bekanntlich

$$\begin{aligned} v_x &= qz - ry + u \\ v_y &= rx - pz + v \\ v_z &= py - qx + w \end{aligned}$$

und die Lage der zugehörigen Schraubenachse ist bestimmt durch die Gleichungen

$$\text{1)} \qquad \begin{aligned} qz - ry + u &= \lambda p \\ rx - pz + v &= \lambda q \\ py - qx + w &= \lambda r. \end{aligned}$$

Da $up + vq + wr = \lambda(p^2 + q^2 + r^2)$, so wird dieselbe zunächst gegeben durch die Gleichungen

$$\lambda = \frac{qz - ry + u}{p} = \frac{rx - py + v}{q} = \frac{py - qx + w}{r}$$

d. h. durch den gemeinsamen Schnitt von drei Ebenen.[1]) Die einfache Bemerkung, daß die Schraubenachse durch die Minimumseigenschaft der Geschwindigkeit charakterisiert ist, liefert indes eine explizite Bestimmung der x, y, z. Bildet man nämlich die Summe der Quadrate der linken Seiten von 1) in der Form

[1]) So z. B. auch bei Darboux, Leçons sur la théorie des surfaces I, S. 8; Appell, Traité de mécanique I, S. 65 usw.

$$\Omega(x^2+y^2+z^2) - t^2 + u^2 + v^2 + w^2 + 2u(qz - ry) + 2v(rx - pz) + 2w(py - qx),$$

wobei:

$$t = px + qy + rz$$
$$\Omega = p^2 + q^2 + r^2$$

gesetzt ist, so ergibt sich durch Differentiation nach x, y, z

$$\begin{aligned} \Omega x &= pt + wq - vr \\ \Omega y &= qt + ru - wp \\ \Omega z &= rt + pv - uq, \end{aligned} \qquad 2)$$

wobei t völlig willkürlich bleibt. Man erkennt hieraus die vektorielle Lösung

$$\Omega(ix + jy + kz) = t(ip + jq + kr) + \begin{matrix} i & j & k \\ p & q & r \\ u & v & w \end{matrix},$$

so daß der Vektor V jedes Punktes der Schraubenachse mit den Komponenten x, y, z durch die Vektoren P mit den Komponenten p, q, r und Q mit den Komponenten u, v, w durch die Gleichung

$$\Omega \cdot V = tP + [PQ]$$

bestimmt ist, in der der Klammerausdruck das Vektorprodukt von P und Q bezeichnet.

In dieser Form hat man denn auch für die Koordinaten der Achse des zu dem Kräftesystem $x_i\, y_i\, z_i$, dessen Komponenten und Momentensummen bezüglich x, y, z; M_x, M_y, M_z sind, gehörigen Winders die Gleichungen

$$\begin{aligned} x(X^2 + Y^2 + Z^2) &= tX + YM_z - ZM_y \\ y(X^2 + Y^2 + Z^2) &= tY + ZM_x - XM_z \\ z(X^2 + Y^2 + Z^2) &= tZ + XM_y - YM_x. \end{aligned}$$

Soll nun das etwas allgemeinere Gleichungssystem

$$\begin{aligned} qz - ry + u &= \lambda p_1 \\ rx - pz + v &= \lambda q_1 \\ py - qx + w &= \lambda r_1 \end{aligned}$$

gelöst werden, so hat man zunächst

$$\lambda = \frac{up + vq + wr}{pp_1 + qq_1 + rr_1}$$

und, wenn man an Stelle von u, v, w in den Gleichungen 1) die Ausdrücke

$$u + \lambda(p - p_1)$$
$$v + \lambda(q - q_1)$$
$$w + \lambda(r - r_1)$$

treten läßt, die Lösung

$$\begin{aligned} \Omega x &= pt + qw - rv - \lambda(qr_1 - rq_1) \\ \Omega y &= qt + ru - pw - \lambda(rp_1 - pr_1) \\ \Omega z &= rt + pv - qu - \lambda(pq_1 - qp_1). \end{aligned} \tag{3}$$

Diese Gleichungen, die wieder vektoriell gedeutet werden können, bestimmen diejenigen Punkte, deren Geschwindigkeit der vorgeschriebenen Richtung p_1, q_1, r_1 parallel läuft. In einer gegebenen Ebene gibt es daher nur einen Punkt, dessen Geschwindigkeit eine vorgeschriebene Richtung hat usw.

Ein weiteres charakteristisches Beispiel kann man der Theorie des linearen Nullsystems entnehmen:

$$\begin{aligned} &a_1(x - x_1) + A_2(y - y_1) + a_3(z - z_1) + a_4(yz_1 - zy_1) \\ &\quad + a_5(zx_1 - xz_1) + a_6(xy_1 - yx_1) = 0, \end{aligned} \tag{4}$$

welches dem Punkte x_1, y_1, z_1 die Ebene 4) zuordnet. Für die Koordinaten des Punktes x_1, y_1, z_1, der in der gegebenen Ebene

$$c_1x + c_2y + c_3z + c_4 = 0 \tag{5}$$

liegt, hat man die Gleichungen

$$\begin{aligned} a_6y_1 - a_5z_1 + a_1 &= \lambda c_1 \\ a_4z_1 - a_6x_1 + a_2 &= \lambda c_2 \\ a_5x_1 - a_4y_1 + a_3 &= \lambda c_2 \\ a_1x_1 + a_2y_1 + a_3z_1 &= -\lambda c_4, \end{aligned} \tag{6}$$

deren letzte sich auch durch

$$c_1 x_1 + c_2 x_4 + c_3 z_1 + c_4 = 0$$

ersetzen läßt. Aus den 3 ersten Gleichungen 6) erhält man nach 3) für $p = -a_4$, $q = -a_5$, $r = -a_6$; $u = a_1$, $v = a_2$, $w = a_3$; $p_1 = c_1$, $q_1 = c_2$, $r = c_3$, falls

$$A = a_4^2 + a_5^2 + a_6^2$$

gesetzt wird,

$$\begin{aligned} A x_1 &= -a_4 t - (a_3 a_5 - a_6 a_2) + \lambda (a_5 c_3 - a_6 c_2) \\ 7) \qquad A y_1 &= -a_5 t - (a_6 a_1 - a_4 a_3) + \lambda (a_6 c_1 - a_4 c_3) \\ A z_1 &= -a_6 t - (a_4 a_2 - a_5 a_1) + \lambda (a_4 c_2 - a_5 c_1), \end{aligned}$$

wobei nach 6)

$$\lambda (c_1 a_4 + c_2 a_5 + c_3 a_6) = a_1 a_4 + a_2 a_5 + a_3 a_6$$

zu setzen ist, und aus der letzten Gleichung 6) folgt endlich

$$0 = A c_4 - (c_1 a_4 + c_2 a_5 + c_3 a_6) t - \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix},$$

womit auch t gefunden ist. Ist nun $a_1 a_4 + a_2 a_5 + a_3 a_6 = 0$, also $\lambda = 0$, so werden $x_1\, y_1\, z_1$ unabhängig von c_1, c_2, c_3, c_4, d. h. die Nullpunkte liegen alle auf der Achse des speziellen Komplexes, dessen Gleichung eben durch 7) gegeben ist. Und nimmt man anstatt der Ebenenkoordinaten c_i die eines Büschels $\alpha_i + \mu \beta_i$, so geben die Gleichungen 7) die Punkte der zur Büschelachse konjugierten Geraden usw.

Um die Gleichungen

$$\begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 + \lambda a_1 &= b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 + \lambda a_2 &= b_2 \\ a_{31} x_1 + a_{22} x_2 + a_{33} x_3 + \lambda a_3 &= b_3, \end{aligned}$$

bei denen die Matrix der a_{ik} vom Range 2 ist, so daß

$$\Sigma \xi_i a_{ik} = 0 \text{ für } k = 1, 2, 3$$

auf eine ähnliche Weise zu behandeln, kann man die 3 Formen $A_i = \Sigma a_{ik} x_k$, wenn keine zwei derselben zueinander proportional sind, und sie demgemäß gleich Null gesetzt 3 Ebenen

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ vorstellen, die eine durch den Anfang gehende Gerade gemein haben, durch eine Transformation auf den früheren Fall zurückführen.

§ II.

Die Transformation eines Systems von n-linearen Formen.

Die Betrachtungen des § 1 führen auf die allgemeine Frage, wann n-lineare Formen

1) $$A_i = \sum_k a_{ik} x_k; \quad k, i = 1, 2 \ldots n$$

sich in n-lineare Formen

$$B_i = \sum b_{ik} y_k$$

durch eine nicht singuläre Transformation

2) $$x_k = \sum c_{kl} y_l,$$

deren Determinante $C = c_{ik}$ nicht Null ist, überführen lassen, und wie man die sämtlichen Substitutionen 2) dieser Art finden kann.

Dabei werde angenommen, daß die Matrix der Koeffizienten der Formen 1) vom Range r ist, so daß also etwa die Determinante r-Grades

$$A = |a_{ik}|; \quad i, k = 1, 2 \ldots r$$

von Null verschieden ist, während alle Determinanten höherer Ordnung gleich Null sind. Ich bezeichne nun die Indices 1 bis r durch lateinische Buchstaben $s, t \ldots$, die Indices $r+1 \ldots$ bis n dagegen durch griechische $\sigma, \tau \ldots$; die Indices i, k, l sollen dagegen von 1 bis n gehen.

Alsdann lassen sich immer nicht sämtlich verschwindende Multiplikatoren[1])

$$\lambda_1^\sigma, \ \lambda_2^\sigma, \ \ldots \ \lambda_r^\sigma$$

angeben, welche die Gleichungen

[1]) Die λ_s^σ würden nur dann alle Null sein, wenn die $a_{\sigma t}$ sämtlich Null wären; dann müßten aber nach 4) auch alle $a_{\sigma k}$ verschwinden, so daß die Form A_σ identisch Null ist, was natürlich auszuschließen ist.

$$\lambda_1^\sigma c_{11} + \lambda_2^\sigma a_{11} + \cdots + \lambda_r^\sigma a_{r1} = a_{\sigma 1}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

3)

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\lambda_1^\sigma a_{1r} + \lambda_2^\sigma a_{2r} + \cdots + \lambda_r^\sigma a_{rr} = a_{\sigma r}$$

befriedigen. Aus diesen Gleichungen folgt aber, daß auch

$$\lambda_1^\sigma a_{1\tau} + \lambda_2^\sigma a_{2\tau} + \cdots \lambda_r^\sigma a_{r\tau} = a_{\sigma\tau}$$

für alle $\tau = r+1 \ldots n$ sein muß, weil jede Determinante $r+1$-Grades aus den Elementen a_{ik} Null ist. Demnach besteht das System der Gleichungen

4) $$\lambda_1^\sigma a_{1k} + \lambda_2^\sigma a_{2k} + \cdots \lambda_r^\sigma a_{rk} = a_{\sigma k}$$

für alle $k = 1, \ldots n$.

Ist nun

5) $$\sum_k a_{ik} x_k = \sum_k b_{ik} y_k; \quad i = 1, \ldots n$$

und multipliziert man die ersten r-Gleichungen 5) mit den λ_1^σ, λ_2^σ, $\ldots$ λ_r^σ, so folgt

$$\sum_k (\lambda_1^\sigma b_{ik} + \lambda_2^\sigma b_{2k} + \cdots \lambda_r^\sigma b_{\sigma k} - b_{\sigma k}) y_k = 0;$$

dies erfordert aber wegen der Willkürlichkeit der $y_1, \ldots y_n$ die zu 4) analogen Gleichungen

4') $$\lambda_1^\sigma b_{1k} + \lambda_2^\sigma b_{2k} + \cdots \lambda_r^\sigma b_{\sigma k} = b_{\sigma k}.$$

Diese Bedingungen sind für die Transformierbarkeit notwendig. Setzt man 2) in 5) ein, so folgt

6) $$\sum_l a_{il} c_{lk} = b_{ik}.$$

Aus den in 6) enthaltenen Gleichungen

7) $$\sum_t a_{st} c_{tk} + \sum_\tau a_{s\tau} c_{\tau k} = b_{sk}$$

für $$s, t = 1, \ldots r; \quad \tau = r+1, \ldots n$$

kann man nun die sämtlichen c_{tk} durch die willkürlich bleibenden c_{rk} ausdrücken. Multipliziert man jetzt in Gleichungen 7) mit den λ_s^σ und summiert über den Index s, so entsteht

$$\sum_s \sum_t a_{st} \lambda_s^\sigma c_{tk} + \sum_s \sum_t a_{s\tau} \lambda_s^\sigma c_{\tau k} = \sum_s b_{sk} \lambda_s^\sigma .$$

Aber diese Gleichung geht nach 4) und 4′) über in

$$\sum_t a_{\sigma t} c_{tk} + \sum_\tau a_{\sigma\tau} c_{\tau k} = b_{\sigma k}$$

oder einfacher in

$$\sum a_{\sigma t} c_{tk} = b_{\sigma k}$$

über. Vermöge der Gleichungen 7) sind alle Transformationsrelationen schon von selbst erfüllt.

Daraus ergibt sich:

Unter der Voraussetzung, daß die Matrix der Formen A vom Range r ist, und zugleich die Koeffizienten der Formen B den Gleichungen 4′) genügen, lassen sich nr der Transformationskoeffizienten c_{sk} mit Hilfe der übrigen $c_{\sigma k}$, deren Zahl $n(n-r)$ beträgt, so ausdrücken, daß die Formen A vermöge 2) in B übergehen.

Aber diese Transformationen sind damit noch nicht nichtsinguläre. Hierzu ist vielmehr erforderlich, daß die Determinante der c_{ik} nicht verschwindet. Um zu unterscheiden, wann dies der Fall ist, multipliziert man ihre Determinante

$$C = \begin{vmatrix} c_{11} & \cdots & c_{r1} & c_{r+11} & \cdots & c_{n1} \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ c_{1r} & \cdots & c_{rr} & c_{r+1r} & \cdots & c_{nr} \\ c_{1r+1} & \cdots & c_{rr+1} & c_{r+1r+1} & \cdots & c_{nr+1} \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ c_{1n} & \cdots & c_{rn} & c_{r+1n} & \cdots & c_{nn} \end{vmatrix}$$

mit der nicht verschwindenden Determinante

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix}$$

Dann ergibt sich vermöge der Gleichungen 7)

$$CA = \begin{vmatrix} b_{11} - \sum a_{1\tau} c_{\tau 1}, \ldots b_{r1} - \sum a_{r\tau} c_{\tau 1}, & c_{r+11} \ldots c_{n1} \\ b_{12} - \sum a_{1\tau} c_{\tau 2}, \ldots b_{r2} - \sum a_{r\tau} c_{\tau 2}, & c_{r+12} \ldots c_{n2} \\ \cdot \quad \ldots \quad \cdot \quad \cdot \quad \ldots \\ b_{1n} - \sum a_{1\tau} c_{\tau n}, \ldots b_{rn} - \sum a_{r\tau} c_{\tau n}, & c_{r+1n} \ldots c_{nn} \end{vmatrix}$$

die sich durch geeignete Subtraktion der letzten $n - r$-Vertikalreihen von den ersten in

$$CA = \begin{vmatrix} b_{11} b_{21} \ldots b_{r1} & c_{r+11} \ldots c_{n1} \\ b_{12} b_{22} \ldots b_{r2} & c_{r+12} \ldots c_{n2} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ b_{1n} b_{2n} \ldots b_{rn} & c_{r+1n} \ldots c_{nn} \end{vmatrix}$$

verwandelt. Die bisher willkürlichen $c\sigma k$ sind daher so zu wählen, daß diese Determinante nicht Null ist. Das wird aber stets möglich sein, wenn wenigstens eine der r-reihigen Determinanten der Matrix

$$\begin{pmatrix} b_{11} b_{12} \ldots b_{1n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ b_{r1} b_{r2} \ldots b_{rn} \end{pmatrix}$$

welche mit der Matrix

$$\begin{pmatrix} a_{11} a_{12} \ldots a_{1n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{r1} a_{r2} \ldots a_{rn} \end{pmatrix}$$

korrespondiert, von Null verschieden ist, womit zugleich ausgedrückt ist, daß die Matrix der Koeffizienten b_{ik} selbst vom Range r ist.

So ergibt sich der Satz, der übrigens auch auf $m > n$ lineare Formen unter entsprechenden Voraussetzungen erweitert werden kann:

n lineare Formen vom Range r lassen sich dann und nur dann durch eine Mannigfaltigkeit von $(n-r)n$ Transformationen in n lineare Formen B transfor-

mieren, falls die Bedingungen 4') erfüllt sind. Soll aber die Transformation eine nicht singuläre sein, so muß die zu den eine nicht verschwindende Determinante vom Grade r bildenden Elementen der A korrespondierende Matrix der Formen B vom Range r sein.

Ein System von Formen A vom Range n kann man daher immer in jedes gegebene System an Formen B von gleichem Range durch eine einzige nichtsinguläre Transformation verwandeln, was übrigens selbstverständlich ist.

Die vorstehenden Betrachtungen sind namentlich dann anwendbar, wenn es sich darum handelt, ein Formensystem A in ein System B von vorgeschriebenem Charakter zu transformieren.

Einige einfache Fälle mögen hier behandelt werden.

1. Transformation von n Formen A vom Range $n-1$ in n Formen B, deren Koeffizienten ein symmetrisches System bilden.

Die Gleichungen 4) und 4') sind, falls die Determinante

$$A = \begin{matrix} a_{11} & \dots & a_{1\,n-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1\,1} & \dots & a_{n-1\,n-1} \end{matrix}$$

nicht Null ist,

$$8) \qquad \begin{aligned} \sum_i \lambda_i a_{ik} &= a_{nk} \\ \sum_i \lambda_i b_{ik} &= b_{nk} \end{aligned}$$

für $\qquad i = 1, \dots n-1;\ k = 1 \dots n.$

Die Transformationsrelationen sind

$$9) \qquad \begin{aligned} \sum_s a_{is}\, c_{sk} &= b_{ik} - a_{in}\, c_{nk} \\ \sum_s a_{ns}\, c_{sk} &= b_{nk} - a_{nn}\, c_{nk}, \end{aligned}$$

wo die Indizes s von 1 bis $n-1$ gehen.

Aus den Gleichungen 8) oder:

$$
\begin{aligned}
&\lambda_1 b_{11} \cdots + \lambda_{n-1} b_{n-11} = b_{n1}\\
&\lambda_1 b_{12} \cdots + \lambda_{n-1} b_{n-12} = b_{n2}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\lambda_1 b_{1\,n-1} \cdots + \lambda_{n-1} b_{n-1\,n-1} = b_{n\,n-1}\\
&\lambda_1 b_{1\,n} \cdots + \lambda_{n-1} b_{n-1\,n-1} = b_{n\,n-1}
\end{aligned}
\qquad 8')
$$

ergeben sich die Werte der b_{n1}, b_{n2}, ... b_{nn}, wenn man die $b_{i\,i_1}$; $i, i_1 = 1 \ldots n-1$ willkürlich annimmt. Aus den ersten $n-1$ Gleichungen 9) ergeben sich für $k = 1, \ldots n$ die c_{sk} ausgedrückt durch die c_{nk}; die letzte der Gleichungen 9) ist dann jedesmal vermöge 8) von selbst erfüllt, so daß die n Größen $c_{n1} \ldots c_{nn}$ willkürlich bleiben. Die Determinante CA erhält vermöge 8) die Gestalt

$$
\begin{vmatrix} b_{11} \ldots b_{n-11} \\ \cdots\cdots\cdots \\ b_{n-11} \ldots b_{n-1\,n-1} \end{vmatrix} (c_{nn} - \sum \lambda_i c_{ni}),
$$

sie verschwindet bei willkürlich angenommenen Werten der $b_{i\,i_1}$ nicht. Die Gesamtheit der c_{ik} ist daher von

$$
2n - 1 + \frac{(n-1)(n-2)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}
$$

Parametern, nämlich von den n $c_{n1} \ldots c_{nn}$ und den $b_{i\,i_1}$ abhängig.

2. Transformation von n Formen A vom Range $n-1$ in ein System von Formen B, deren Koeffizienten b_{ik} ein alternierendes System $b_{ik} = -b_{ki}$ bilden.

Hier muß n eine ungerade Zahl sein, da sonst die Formen B ein System von niedererem als $n-1^{\text{ten}}$ Range bilden. Von den Gleichungen 8') dienen jetzt die $n-1$ ersten zur Bestimmung der $b_{n1} \ldots b_{n\,n-1}$; die letzte ist identisch erfüllt. Die Gesamtheit der c_{ik} ist von

$$
n + \frac{(n-1)(n-2)}{2} = \frac{n^2 - n + 2}{2}
$$

Parametern abhängig.

Für $n = 3$ hat man in Übereinstimmung mit § 1, falls keine zwei der Formen A_1, A_2, A_3 zueinander proportional sind, die von Null verschiedenen Multiplikatoren ξ, η, ζ, für die

$$\xi A_1 + \eta A_2 + \zeta A_3 = 0,$$

und die Bedingungen für die b_{is} sind

$$\begin{aligned} -\eta b_{12} - \zeta b_{13} &= 0 \\ b_{12}\xi - b_{23}\zeta &= 0 \\ b_{13}\xi - b_{23}\eta &= 0, \end{aligned}$$

so daß nur $b_{12} \neq 0$ willkürlich bleibt und die c_{31}, c_{32}, c_{33} so zu wählen sind, daß

$$\xi c_{31} + \eta c_{32} + \zeta c_{31} \neq 0.$$

Aber eine nichtsinguläre Transformation existiert auch dann, wenn zwei der Formen, etwa A_1 und A_3 zueinander proportional sind. Dann ist $\eta = 0$ und $b_{13} = 0$ und man kann die A durch eine nichtsinguläre Transformation

$$(\text{falls } \xi c_{31} + \zeta c_{33} \neq 0)$$

in die Formen

$$\begin{aligned} B_1 &= b_{12}\eta_2 \\ B_2 &= -b_{12}y_1 + b_{12}y_3 \begin{matrix} \xi \\ \zeta \end{matrix} \\ B_3 &= -b_{12}y_2 \begin{matrix} \xi \\ \zeta \end{matrix} \end{aligned}$$

überführen.

3. Dieses Verfahren läßt sich auch bei beliebigem Range der Formen A befolgen. Es mag das noch für den Rang $n-2$ der Formen A bei geraden n unter Voraussetzung eines alternierenden Koeffizientensystems der Formen B ausgeführt werden.

Die Gleichungen 4), 4') sind hier, wenn die Indices i, j von 1 bis $n-2$, die k, k_1 von 1 bis n gehen,

$$\text{a)} \quad \sum_i \lambda_i' b_{ij} = b_{n-1\,j}$$

$$\text{b)} \quad \sum_i \lambda_i' b_{i\,n-1} = b_{n-1\,n-1}$$

$$\text{c)} \quad \sum_i \lambda_i' b_{in} = b_{n\ 1\,n}$$

$$\text{d)} \quad \sum_i \lambda_i'' b_{ij} = b_{nj}$$

$$\text{e)} \quad \sum_i \lambda_i'' b_{i\,n-1} = b_{n\,n-1}$$

$$\text{f)} \quad \sum_i \lambda_i'' b_{in} = b_{nn}.$$

Die Gleichungen a) geben die $b_{n-1\,j} = -b_{j\,n-1}$, und damit ist zugleich b) erfüllt. Gleichung c) liefert die $b_{n-1\,n}$, ausgedrückt durch die aus d) zu entnehmenden b_{nj}. Endlich wird c) vermöge d) zu

$$\sum \lambda_j' \lambda_i'' b_{ij} = b_{n-1\,n}$$

und e) vermöge a) zu

$$-\sum \lambda_j'' \lambda_i' b_{ij} = b_{n\,n-1},$$

so daß auch $b_{n\,n-1} = -b_{n-1\,n}$ wird, und bei willkürlichen Werten der $b_{ij} = -b_{ji}$ die b_{kk_1} ein alternierendes System bilden. Die Determinante CA bringt man auf die Form

$$CA = \delta(P_1 Q_2 - P_2 Q_1),$$

wo

$$\delta = \begin{vmatrix} 0 & b_{21} & \dots & b_{n-21} \\ b_{12} & 0 & \dots & b_{n-22} \\ b_{1\,n-2} & & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

und

$$P_1 = c_{n-1\,n-1} + \sum_i c_{n-1\,i} \lambda_i'$$

$$Q_1 = c_{n\,n-1} + \sum_i c_{n\,i} \lambda_i'$$

$$P_2 = c_{n-1\,n} + \sum_i c_{n-1\,i} \lambda_i''$$

$$Q_2 = c_{nn} + \sum_i c_{ni} \lambda_i''.$$

Es existieren also im ganzen von

$$2n + \frac{n-2}{2}\frac{n-3}{2} = \frac{n^2-n+6}{2}$$

Parametern abhängige Koeffizienten c_{ik}, welche die Formen A nicht singulär in die B überführen. Z. B. lassen sich die Formen A_1, A_2, A_3, A_4, welche den Gleichungen

$$\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 = A_3$$
$$\mu_1 A_1 + \mu_2 A_2 = A_4$$

genügen, falls $a_{11}a_{22} \quad a_{12}a_{12} \neq 0$ in das System der Formen vom Range 2

$$B_1 = y_2 + \lambda_2 y_3 + \mu_2 y_4$$
$$B_2 = -y_1 - \lambda_1 y_3 - \mu_1 y_4$$
$$B_3 = -\lambda_2 y_1 + \lambda_1 y_2 - p y_4$$
$$B_4 = -\mu_2 y_1 + \mu_1 y_2 + p y_4$$

durch eine nichtsinguläre Transformation verwandeln, wenn das System der willkürlichen c_{3k}, c_{4k}, $k = 1, \ldots 4$ so gewählt ist, daß

$$\begin{matrix} c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} \\ 0 & 1 & \lambda_2 & \mu_2 \\ 1 & 0 & \lambda_1 & \mu_1 \end{matrix}$$

nicht Null ist. Für p ist $\mu_1\lambda_2 - \mu_2\lambda$ zu setzen.

Ich schließe hieran noch den Beweis eines Satzes über bilineare Formen, der mit diesen Betrachtungen nahe verwandt ist:

Jede bilineare Form $\sum a_{ik} x_i y_k$ vom Range r läßt sich durch nichtsinguläre Transformation der x und y in die Normalform

$$\sum_s x_s y_s \qquad s = 1, \ldots r$$

überführen.

Setzt man, den früheren Bemerkungen gemäß, voraus, daß den Gleichungen 4) entsprechend

$$\lambda_1^\sigma a_{1k} + \cdots + \lambda_r^\sigma a_{rk} = a_{\sigma k}$$

für alle $\sigma = r+1 \ldots n$, $k = 1 \ldots n$ ist, so folgt

$$\begin{aligned}\sum a_{ik} x_i y_k &= \sum a_{sk} x_s y_k + \sum a_{\sigma k} x_\sigma y_k \\ &= \sum a_{sk} y_k (x_s + \sum \lambda_s^\sigma x_\sigma) \\ &= \sum (a_{st} y_t + a_{s\tau} y_\tau)(x_s + \sum \lambda_s^\sigma x_\sigma).\end{aligned}$$

Setzt man jetzt

$$\begin{aligned} y_\tau &= y'_\tau \\ \sum a_{st} y_t &= y'_s \\ x_\sigma &= x'_\sigma \\ x_s + \sum \lambda_s^\sigma x_\sigma &= x'_s. \end{aligned}$$

Dies sind zwei nichtsinguläre Transformationen der Variabeln x, y in x', y' und man erhält so eine r^2 fache Mannigfaltigkeit nichtsingulärer Transformationen, welche eine Bilinearform A vom Range r in eine Form gleichen Ranges B verwandeln.

Unter derselben Voraussetzung gilt übrigens noch eine zweite Transformation mittelst der Gleichungen

$$\sum \mu_r^\sigma a_{kr} = a_{k\sigma},$$

welche durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} y_\sigma &= y'_\sigma \\ y_r + \sum \mu_r^\sigma y_\sigma &= y'_r \\ x_\tau &= x_{\tau'} \\ \sum a_{tr} x_r &= x'_t \end{aligned}$$

ausgedrückt ist.

§ III.

Die symmetrische Auflösung linearer Gleichungen.

Durch die im § II behandelten Transformationen wird allerdings der symmetrische Charakter der Lösungen, der sich in den einfachen Beispielen des § I erreichen ließ, wieder aufgehoben. Indessen läßt sich auch hier auf eine völlig symmetrische Weise verfahren.

Es sei zunächst das System der n Gleichungen

$$1) \qquad \begin{aligned} \sum_i a_{1i} x_i &= a_1 \\ &\cdots\cdots \\ \sum_i a_{ui} x_i &= a_n \end{aligned}$$

gegeben und die homogenen Gleichungen

$$2) \qquad \begin{aligned} \sum_i a_{1i} x_i &= 0 \\ &\cdots\cdots \\ \sum_i a_{ui} x_i &= 0 \end{aligned}$$

voneinander unabhängig. Die Indices i sollen dabei von 1 bis $n+p$ gehen. Alsdann handelt es sich, da die sämtlichen Lösungen des Systems 2) in symmetrischer Weise durch die Methode der Fundamentallösungen als gegeben zu betrachten sind, nur um eine spezielle Lösung des Systems 1).

Fügt man den Gleichungen 1) die folgenden mit den willkürlichen Koeffizienten u_{hk}, $h = 1 \ldots p$; $k = 1 \ldots n+p$ gebildeten

$$3) \qquad \begin{aligned} \sum_i u_{1i} x_i &= 0 \\ &\cdots\cdots \\ \sum_i u_{pi} x_i &= 0 \end{aligned}$$

hinzu und bezeichnet die Unterdeterminanten nach der $n+1, \ldots n+p$ Reihe der Determinante

4) $$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1\,n+p} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{n\,n+p} \\ u_{11} & \dots & u_{1\,n+p} \\ \dots & \dots & \dots \\ u_{p1} & \dots & u_{p\,n+p} \end{vmatrix}$$

mit $$U_{ki},\ k = 1 \dots p$$
$$i = 1 \dots n+p,$$

so ist
$$\sum_i a_{hi} U_{ki} = 0$$

5) $$\sum_i u_{ki} U_{ki} = 0, \quad \varkappa \neq k$$
$$\sum_i u_{ki} U_{ki} = \Delta,$$

wobei die Indices h von 1 bis n, $\varkappa$ und k von 1 bis p gehen.

Setzt man noch

6) $$\sum_i \gamma_i x_i = X,$$

so erhält man aus 1), 3), 6)

7) $$\Delta X + \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1\,n+p} & a_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{n\,n+p} & a_n \\ u_{11} & \dots & u_{1\,n+p} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{p1} & \dots & u_{p\,n+p} & 0 \\ \gamma_1 & \dots & \gamma_{n+p} & 0 \end{vmatrix} = 0;$$

mit den γ_i sind willkürliche Koeffizienten bezeichnet. Multipliziert man die Determinante

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1\,n+p} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{n\,n+p} \\ U_{11} & \dots & U_{1\,n+p} \\ \dots & \dots & \dots \\ U_{p1} & \dots & U_{p\,n+p} \end{vmatrix}$$

mit der Determinante Δ, die als nicht verschwindend vorausgesetzt wird, so folgt aus 5)

$$\Delta\delta = \Delta^p \begin{vmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} \end{vmatrix} = \Delta^p A,$$

wobei die Elemente der symmetrischen Determinante A durch die Gleichungen

$$A_{hh_1} = \sum a_{hi} a_{h_1 i}, \quad h, h_1 = 1 \dots n$$

definiert sind. Es ist aber A das Quadrat der Matrix des Systems 2)

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1\,n+p} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{n\,n+p} \end{pmatrix}.$$

mithin gleich der Summe der Quadrate der n-reihigen Determinanten derselben und verschwindet nicht, wenn man sich auf reelle Koeffizienten a_{ik} beschränkt. Unter dieser Voraussetzung ist daher δ nicht Null.

Man kann die Determinante Δ in eine einfachere Gestalt bringen. Da die n-reihige Determinante der a_{ij}; $i, j = 1 \dots n$ stets als von Null verschieden angenommen werden kann, läßt sich

8) $$a_{i\,n+s} = \lambda_1^s a_{i1} + \dots + \lambda_n^s a_{in}$$

für $$s = 1, \dots p$$

setzen. Formt man nun die Determinante A in derselben Weise um, wie dies auf Seite 251 geschehen ist, mit Hülfe von 8) um, so entsteht, falls man die Determinante der a_{ij} mit D bezeichnet, die Gleichung (abgesehen vom Vorzeichen)

$$A = D^2 \begin{vmatrix} 1 + c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & 1 + c_{22} & \dots & c_{2n} \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & 1 + c_{nn} \end{vmatrix},$$

wo

$$c_{ij} = \sum_s \lambda_s^i \lambda_s^j = c_{ji}$$

eine symmetrische Determinante ist, die sich wieder als Summe von Quadraten darstellen läßt.

Multipliziert man die Gleichung 7) mit δ, so folgt:

$$X\Delta^p A + \begin{vmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} & 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} & 0 & 0 & 0 & 0 & a_n \\ \sum u_{1i}a_{1i} & \dots & \sum u_{1i}a_{ni} & \Delta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \sum u_{pi}a_{1i} & \dots & \sum u_{pi}a_{ni} & 0 & 0 & 0 & \Delta & 0 \\ \sum \gamma_i a_{1i} & \dots & \sum \gamma_i a_{ni} & \sum \gamma_i U_{1i} & . & & \sum \gamma_i U_{ni} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

In der so entstandenen $n+p+1$-reihigen Determinante aber kommen in den letzten $p+1 \dots n+p^{\text{ten}}$ Vertikalreihen die γ_i nur mit den U_{ki}, d. h. mit den Fundamentallösungen des Systems 2) vor, auf deren Bestimmung es nicht weiter ankommt. Läßt man diese Glieder fort, so erhält man die von den willkürlichen Elementen u_{ik} vollständig befreite Lösung

$$XA + \begin{vmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} & a_1 \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} & a_n \\ \sum \gamma_i a_{1i} & \dots & \sum \gamma_i a_{ni} & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

von der man jetzt übrigens unmittelbar erkennt, daß die aus der durch Vergleichung der Koeffizienten der γ_i entnommenen Werte der x_i das System 1) befriedigen.

Ein ganz analoges Verfahren läßt sich einschlagen, wenn es sich um die Lösung des voneinander unabhängigen Systems von Gleichungen

$$8) \qquad \begin{gathered} \sum_i a_{ik}x_k + \lambda a_i = b_i \\ i, k = 1 \dots n \end{gathered}$$

handelt, wobei die Determinante der a_{ik} vom Range $n-1$ vorausgesetzt wird.

Nimmt man hier die Gleichung

$$\sum u_k x_k = 0$$

hinzu, und bezeichnet mit Δ die Determinante

$$\Delta = \begin{matrix} a_{ik}\, a_i \\ u_k \;\; 0 \end{matrix},$$

die bei willkürlichen u_i nicht Null ist, so ergibt sich, falls man mit den U_i die nach der letzten Reihe von Δ genommenen Unterdeterminanten bezeichnet, nach Einführung von

$$\delta = \begin{matrix} a_{11} \;\ldots\; a_{1n} a_1 \\ \cdot \quad\; \cdot \quad\; \cdot \\ a_{n1} \;\ldots\; a_{nn} a_n \\ U_1 \;\ldots\; U_n \;\; 0 \end{matrix}$$

$$\delta\Delta = \begin{matrix} A_{11} + a_1^2 \;\ldots\; A_{1n} + a_1 a_n \;\; 0 \\ \cdot \quad\; \cdot \quad\; \cdot \quad\; \cdot \quad\; \cdot \quad\; \cdot \quad\; \cdot \quad\; \cdot \quad\; \cdot \\ A_{n1} + a_1 a_n \;\ldots\; A_{nn} + a_n^2 \;\; 0 \\ \sum u_i a_{1i} \;\ldots\; \sum u_i a_{ni} \;\; \Delta \end{matrix}$$

oder

$$\delta = \begin{matrix} A_{11} \;\ldots\; A_{1n} a_1 \\ \cdot \quad\; \cdot \quad\; \cdot \\ A_{n1} \;\ldots\; A_{nn} a_n \\ a_1 \;\ldots\; a_n \;\; 0 \end{matrix},$$

da die aus den Elementen A_{ik} gebildete symmetrische Determinante verschwindet.

Die Determinante δ kann aber, abgesehen von ihren Vorzeichen, in die Gestalt einer $2n+1$-reihigen Determinante gebracht werden, indem man von den Elementen A_{ik} wieder zu den Elementen a_{ik} zurückkehrt, man erhält nämlich:

$$\delta = \begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & a_1 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1\,n-1} & a_{1n} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & a_2 & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2\,n-1} & a_{2n} \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & \dots & 0 & 0 & a_{n-1} & a_{n-11} & a_{n-12} & \dots & a_{n-1\,n-1} & a_{n-1\,n} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & a_n & a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n\,n-1} & a_{nn} \\ a_1 & \dots & a_{n-1} & a_n & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{11} & \dots & a_{n-11} & a_{n1} & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{12} & \dots & a_{n-12} & a_{n2} & 0 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ a_{1\,n-1} & \dots & a_{u-1\,u-1} & a_{u-1\,u} & 0 & 0 & \dots & & -1 & 0 \\ a_{1n} & \dots & a_{n\,n-1} & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Setzt man nun voraus, was immer angenommen werden kann, daß etwa die Determinante

$$A_n = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1\,n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n-11} & \dots & a_{n-1\,n-1} \end{vmatrix}$$

nicht Null ist, so gibt es $n-1$ nicht sämtlich verschwindende Multiplikatoren $\xi_1, \dots \xi_{n-1}$ derart, daß

$$\sum_i a_{ik}\xi_i + a_{nk} = 0$$

für $k = 1, \dots n$ und ebenso $n-1$ denselben Bedingungen entsprechende Multiplikatoren $\eta, \dots \eta_{n-1}$ derart, daß

$$\sum_i a_{ki}\eta_i + a_{kn} = 0.$$

Man kann daher — abgesehen vom Zeichen — δ zunächst in die Form bringen

$$(\sum a_i\xi_i + a_n)^2 \begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{11} & \dots & a_{1\,n-1} & a_{1n} \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & \dots & 0 & a_{n-11} & \dots & a_{n-1\,n-1} & a_{n-1\,n} \\ a_{11} & \dots & a_{n-11} & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ a_{1\,n-1} & \dots & a_{n-1\,n-1} & 0 & \dots & -1 & 0 \\ a_{nn} & \dots & a_{n-1\,n} & 0 & \dots & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

Aber diese verwandelt sich, wenn man die $n+1 \ldots 2n-1^{\text{te}}$ Vertikalreihe mit den $\eta_1 \ldots \eta_{n-1}$ multipliziert und zur letzten addiert und ebenso in Bezug auf die Horizontalreihen verfährt, in

$$\begin{vmatrix} 0 & \ldots & 0 & a_{11} & \ldots & a_{1\,n-1} & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \ldots & 0 & a_{n-11} & \ldots & a_{n-1\,n-1} & 0 \\ a_{11} & \ldots & a_{n-11} & -1 & \ldots & 0 & \eta_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n-11} & \ldots & a_{n-1\,n-1} & 0 & \ldots & -1 & \eta_{n-1} \\ 0 & \ldots & 0 & \eta_1 & \ldots & \eta_{n-1} & -1 \end{vmatrix},$$

deren Wert, vom Zeichen abgesehen, gleich A_n^2 ist. Die Determinante δ kann daher nur dann verschwinden, wenn

$$\sum a_i \xi_i + a_n = 0,$$

d. h. wenn die Gleichungen 1) nicht voneinander unabhängig sind.

Multipliziert man jetzt die nach Analogie von 1) gebildete Gleichung

$$X \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1\,n} & a_1 & b_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} & a_n & b_n \\ u_1 & \ldots & u_n & 0 & 0 \\ \gamma_1 & \ldots & \gamma_n & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

mit δ, so folgt:

$$X\delta \begin{vmatrix} A_{11} + a_1^2 & \ldots & A_{1\,n} + a_1 a_n & 0 & b_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{n1} + a_1 a_n & \ldots & A_{nn} + a_n^2 & 0 & b_n \\ \sum u_i a_{1i} & \ldots & \sum u_i a_{ni} & \Delta & 0 \\ \sum \gamma_i a_{1i} & \ldots & \sum \gamma_i a_{ni} & \sum \gamma_i U_i & 0 \end{vmatrix} = 0$$

oder, wenn man $\sum \gamma_i U_i$ fortläßt,

$$9) \qquad X\delta = \begin{vmatrix} A_{11} & \ldots & A_{1\,n} & b_1 & a_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{n1} & \ldots & A_{nn} & b_n & a_n \\ \sum \gamma_t a_{1i} & \ldots & \sum \gamma_i a_{ni} & 0 & 0 \\ a_1 & \ldots & a_n & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

In dieser von den u_i freien Gleichung kann man endlich noch das Element -1 fortlassen, da die Determinante

$$\begin{vmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} & b_1 \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} & b_n \\ \sum \gamma_i a_{1i} & \dots & \sum \gamma_i a_{ni} & 0 \end{vmatrix}$$

Null ist. Man erkennt dies durch Multiplikation von

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & w_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & w_n \\ \gamma_1 & \dots & \gamma_n & 0 \end{vmatrix}$$

mit der verschwindenden Determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & 0 \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Man erhält demnach zur Bestimmung der x_i die in den γ_i identische Gleichung

$$X\delta + \begin{vmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} & b_1 & a_1 \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} & b_n & a_n \\ a_1 & \dots & a_n & 0 & 0 \\ \sum \gamma_i a_{1i} & \dots & \sum \gamma_i a_{ni} & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Derselbe Weg führt nun auch zur Lösung des Systems

$$10)\quad \begin{aligned} &\sum a_{1i} x_i + \lambda_1 a_{11} \cdots + \lambda_s a_{1s} = \beta_1 \\ &\sum a_{2i} x_l + \lambda_1 a_{21} \cdots + \lambda_s a_{2s} = \beta_2 \\ &\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ &\sum a_{ni} x_i + \lambda_1 a_{n1} \cdots + \lambda_s a_{s1} = \beta_n, \end{aligned}$$

falls die Koeffizienten a_{ik} eine Determinante vom Range r bilden und $s = n - r$ ist, wobei die $\lambda_1 \dots \lambda_s$ ebenfalls zu bestimmende Parameter vorstellen. Indessen ist es nicht nötig, die vorhin

angestellten Betrachtungen zu wiederholen, nachdem einmal der Charakter der Lösung erkannt ist.

Setzt man

$$11)\quad \sigma X + \begin{vmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} & a_{11} & \dots & a_{1s} & \beta_1 \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} & a_{n1} & \dots & a_{ns} & \beta_n \\ a_{11} & \dots & a_{n1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ a_{1s} & \dots & a_{ns} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \sum \gamma_i a_{1i} & \dots & \sum \gamma_i a_{ni} & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

wobei wieder $X = \sum \gamma_i x_i$ genommen ist, so erhält man für $\gamma_i = a_{\varkappa i}$

$$\sigma a_{\varkappa i} - \begin{vmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} & a_{11} & \dots & a_{1s} & \beta_1 \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} & a_{n1} & \dots & a_{ns} & \beta_n \\ a_{11} & \dots & a_{n1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ a_{1s} & \dots & a_{ns} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_{\varkappa 1} & \dots & a_{\varkappa s} & \beta_\varkappa \end{vmatrix} = 0$$

oder, wenn man die Koeffizienten der Determinante, welche bei den Elementen der letzten Horizontalreihe auftreten, mit

$$-A_1,\ -A_2,\ \cdots -A_\varrho,\ A$$

bezeichnet,

$$\sigma \sum x_i a_{\varkappa i} + a_{\varkappa 1} A_1 + \cdots a_{\varkappa s} A_s = \beta_\varkappa A.$$

Um die Lösung zu erhalten, ist der bisher willkürlich gebliebene Faktor σ gleich

$$\sigma = \begin{vmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} & a_{11} & \dots & a_{1s} \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} & a_{n1} & \dots & a_{ns} \\ a_{11} & \dots & a_{n1} & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{1s} & \dots & a_{ns} & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

zu setzen. Daß er nicht verschwindet, wenn das System der Gleichungen 10) voneinander unabhängig ist, läßt sich durch eine geeignete Transformation der Determinante σ, die der vorhin für den Fall $s = 1$ durchgeführten ganz analog ist, zeigen.[1]) Die Bestimmung der Lösung 11) wird allerdings schon in einfachen Fällen ziemlich weitläufig. Ist z. B. das System der Gleichungen

$$\begin{aligned} ax_2 - bx_3 + cx_4 + \lambda_1 a_{11} + \lambda_2 \beta_{12} &= \gamma_1 \\ -ax_1 + dx_3 + ex_4 + \lambda_1 a_{21} + \lambda_2 a_{22} &= \gamma_2 \\ bx_1 - dx_2 + fx_4 + \lambda_1 a_{31} + \lambda_2 a_{32} &= \gamma_3 \\ -cx_1 - ex_2 - fx_3 + \lambda_1 a_{41} + \lambda_2 a_{42} &= \gamma_4 \end{aligned}$$

gegeben, und setzt man voraus, daß

$$af + be + cd = 0,$$

also

$$f = b\gamma - c\beta,\ e = c\alpha - a\gamma,\ d = a\beta - b\alpha$$

ist, so ist das System der a_{ik} vom Range 2), aber die A_{ik} erhalten Werte, welche eine Reduktion der siebenreihigen Determinante nicht unmittelbar zu gestatten scheinen.

Wenn aber die Determinante der a_{ik} vom Range $n - 1$ ist, kann man von vornherein aus ihren ersten Unterdeterminanten $u_1, \ldots u_n$ nach irgend einer Horizontalreihe das System bilden

$$\begin{aligned} \sum a_{ik} x_k + \lambda a_i &= b_i \\ \sum u_k x_k &= 0. \end{aligned}$$

Man erhält dann

$$(-1)^n X \sum U_i^2 + \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} & a_1 & b_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} & a_n & b_n \\ U_1 & \ldots & U_n & 0 & 0 \\ \gamma_1 & \ldots & \gamma_n & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

[1]) Hierbei ist die auf S. 248 und 251 angedeutete Reduktion derselben zur Anwendung zu bringen.

In dem einfachen Beispiel des § I

$$\begin{aligned} qz - ry + \lambda p &= u \\ rx - pz + \lambda q &= v \\ py - qx + \lambda r &= w \end{aligned}$$

wird, da die u_1, u_2, u_3 bezüglich gleich

$$-p\Omega, \quad -q\Omega, \quad -r\Omega$$

werden:

$$X\Omega^3 + \Omega \begin{vmatrix} 0 & -r & q & p & u \\ r & 0 & -p & q & v \\ -q & p & 0 & r & w \\ p & q & r & 0 & 0 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Multipliziert man mit der Determinante

$$\begin{vmatrix} 0 & -r & q & p \\ r & 0 & -p & q \\ -q & p & 0 & r \\ p & q & r & 0 \end{vmatrix} = -\Omega^2,$$

so entsteht

$$X\Omega - (u(q\gamma_3 - r\gamma_2) + v(r\gamma_1 - p\gamma_3) + w(p\gamma_2 - q\gamma_1)) = 0$$

oder

$$\begin{aligned} x\Omega &= rv - wq \\ y\Omega &= pw - ru \\ z\Omega &= qu - pv \end{aligned}$$

wie vorhin im § I.

Beiträge zum Äquivalenzproblem der Raumkurven.

Von **F. Böhm.**

Vorgelegt von A. Voss in der Sitzung am 1. Mai 1915.

Herr Study hat in dem 10. Bande der American Transactions 1909 in einer grundlegenden Arbeit „Zur Differentialgeometrie der analytischen Kurven“ allgemein für reguläre Kurven und für wichtige Klassen spezieller Kurven wie „Krumme Linien in Minimalebenen, auf Minimalkegeln, Minimalkurven etc.“ Systeme von charakteristischen Bewegungsinvarianten aufgestellt. Im Hinblick auf die nicht immer ganz auf der Hand liegenden Methoden der algebraischen Invariantentheorie, insbesondere der orthogonalen Transformation, legte ich mir die Frage vor, ob es nicht möglich sei, auch mit gewöhnlichen elementaren Betrachtungen, nämlich mit Hilfe der Projektion auf die x_3 Ebene diese überaus wichtigen, absoluten Invarianten herzuleiten, sie weiter zu illustrieren und so deren Kenntnis auch den mit den Studyschen Methoden weniger Vertrauten zu vermitteln. Wir gewinnen auf diese Weise insbesondere bei Heranziehung der Gruppentheorie manche neuen Resultate, die nicht ohne Interesse sein dürften.

Die vorliegende Abhandlung ist lediglich ein Auszug aus umfangreicheren Untersuchungen. Diese würden infolge eingehender Diskussion aller Einzelfälle, welche durch das Verschwinden der einzelnen Differentialinvarianten auftreten können, den verfügbaren Raum bedeutend übersteigen und sind einer eventuellen Veröffentlichung vorbehalten.

Im Anschluß an Study werden folgende Bezeichnungen gebraucht:

Für die ebenen Kurven:

$$(a\ b) = a_1 b_1 + a_2 b_2 \quad \text{speziell} \quad (a\ a) = a_1^2 + a_2^2$$
$$(ab) = a_1 b_2 - a_2 b_1;$$

für die Raumkurven:

$$(a\ b) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \quad \text{speziell} \quad (a\ a) = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$$

$$(abc) = \begin{vmatrix} a_1 & a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Ist die Kurve gegeben durch die Parameterdarstellung:

$$x_1 = x_1(t)$$
$$x_2 = x_2(t)$$
$$x_3 = x_3(t),$$

so sollen die Differentialquotienten durch Ziffern bezeichnet werden, z. B.

$$(0|0) = x_1^2 + x_2^2; \quad (12) = \begin{matrix} x_1' & x_2 \\ x_1'' & x_2'' \end{matrix}; \quad (1\ 1) = x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2;$$

$$(123) = \begin{vmatrix} x_1' & x_2' & x_3' \\ x_1'' & x_2'' & x_3'' \\ x_1''' & x_2''' & x_3''' \end{vmatrix} \quad \text{usw.}$$

Da wir im Wesentlichen nur mit ebenen Kurven zu tun haben, so sind unsere Hauptbausteine die beiden Formen $(a\ b)$ und (ab), zwischen denen nun folgende fundamentale Identitäten bestehen:

I. $$(ab)^2 \equiv \begin{matrix} a\ a & a|b \\ a\ b & b\ b \end{matrix}; \quad (ac)(bd) \equiv \begin{matrix} a\ b & a\ c \\ b\ d & c\ d \end{matrix};$$

ferner

$$(ab)(cd) + (bc)(ad) + (ca)(bd) \equiv 0,$$

weil
$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 & b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 & c_1 & c_2 \\ 0 & 0 & d_1 & d_2 \end{vmatrix} \equiv 0.$$

II.
$$\begin{vmatrix} a_1 a_2 & a_1 a_2 \\ b_1 b_2 & -b_2 b_1 \\ c_1 c_2 & c_1 c_2 \\ d_1 d_2 & -d_2 d_1 \end{vmatrix} \equiv - \begin{vmatrix} a_1 a_2 & a_1 + a_2 & a_1 - a_2 \\ b_1 b_2 & 0 & 0 \\ c_1 c_2 & c_1 + c_2 & c_1 - c_2 \\ d_1 d_2 & 0 & 0 \end{vmatrix} \equiv -2(ac)(bd)$$
$$\equiv \{(ab)(c\ d) + (bc)(d\ a) + (cd)(a\ b) + (da)(b\ c)\} - 2(ac)(bd),$$

also
$$(ab)(c\ d) + (bc)(d\ a) + (cd)(a\ b) + (da)(b\ c) \equiv 0,$$

b mit d vertauscht gibt dieselbe Identität von rückwärts, b mit c vertauscht gibt

$$(ac)(b\ d) + (cb)(a\ d) + (bd)(a\ c) + (da)(c\ b) \equiv 0.$$

Den beiden Identitäten kann man auch die Form geben:

$$(ab)(c\ d) + (a\ b)(cd) = -(bc)(a\ d) + (ad)(b\ c)$$
$$(ac)(b\ d) + (a\ c)(bd) = (bc)(a\ d) + (ad)(b\ c).$$

Wird speziell $c = d$, so haben wir

$$(ab)(c\ c) = (ac)(b\ c) - (a\ c)(bc) \quad \text{und} \quad (ac)(b\ b) = (ab)(b\ c) + (a\ b)(bc).$$

Diese Identitäten werden im folgenden fortwährend verwendet und, wo angängig, auch die Klammern bei (ab) und $(a\,|\,b)$ weggelassen.

I. Kapitel.

Die Kurven auf dem Minimalkegel.

§ 1. Die Beziehungen der Differentialinvarianten der Raumkurve zu den Differentialinvarianten ihrer Projektion in der Ebene $x_3 = 0$.

1. In allgemeiner Parameterdarstellung:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x_1(t) \\ x_2 &= x_2(t) \\ x_3 &= x_3(t) \end{aligned}\right\} \quad \text{mit der Bedingung } \overline{0|0} = 0, \quad \text{also } x_3 = \overset{+}{(-)}\sqrt{-\overline{0|0}}.$$

Mit Hilfe der Identitäten der Einleitung und der höheren Differentialquotienten von $x_3(t)$ nach t können wir alle Differentialinvarianten der Raumkurve durch die ihrer Projektion ausdrücken und erhalten für die absoluten charakteristischen Differentialinvarianten Φ und Ψ die folgende Darstellung:

$$\Phi = \frac{1}{R^2} = \frac{\overline{1\,1}\;\overline{2\,2} - \overline{1\,2}^2}{\overline{1|1}^3} = \frac{\overline{12}\;\overline{12}}{\overline{1|1}^3} = \frac{2\cdot 0\;0\cdot 12 - 01\cdot 1|1}{01^3}$$

$$\Psi = \frac{1}{R^2\,T} = \frac{123}{\overline{1|1}^3} = \frac{-\sqrt{-0\,0}}{01^5}\{3\cdot 12[0|1\cdot 01 - 0\;0\cdot 02] + 13\cdot 0\;0\cdot 01\}.$$

$\Phi = \frac{1}{R^2}$ ist das Krümmungsquadrat und $\frac{\Psi}{\Phi} = \frac{1}{T}$ die Torsion der Raumkurven.

2. Bezogen auf den natürlichen Parameter:

Die Definitionsgleichungen des natürlichen Parameters sind:

$$\overline{1|1}_p = -1 \quad \text{und} \quad 01_p^2 = -0\;0_p,$$

wobei wir durch den Index p andeuten, daß die Differentialquotienten alle nach p genommen sind

$$\Phi_p = \overline{2}\,|\,2_p = \frac{(03)_p}{(01)_p} = -\frac{0\,|\,0_p - 2\cdot 0\;\underline{2_p\cdot 0\,|\,0_p} + 0\,|\,1_p^2}{0\;\underline{0\;0_p^2}},$$

$$\Psi_p = 2\,|\,\overline{3}_p = \frac{(13)_p}{(01)_p}$$

$$= \frac{0\;\underline{1_p\{0\;0_p - 2\cdot 0\;\underline{2_p\cdot 0\,|\,0_p} + 0\;\underline{1_p^2}\}} + 0\;\underline{0_p^2\cdot 0\;3_p}}{0\,|\,0_p^3} = \frac{1}{2}\frac{d\Phi_p}{dp},$$

was durch Differentiation der Definitionsgleichungen und durch Anwendung der Identitäten leicht verifiziert wird.

NB. [Es ist zu beachten, daß die Differentialinvarianten: 0 0, 0 1, 0|2 und 0 3 vollständig dazu ausreichen.]

§ 2. Die Charakterisierung der Kurven nach ihrem natürlichen Parameter.

$\frac{dp}{dt} = 0$ gibt die Erzeugenden: Krümmung und Torsion sind unbestimmt.

$\frac{dp}{dt} = c$ gibt die singulären Kreise: Krümmung ist 0, Torsion unbestimmt.

Man könnte nun so fortfahren; wir umfassen aber alle diese Fälle, wenn wir von der folgenden Parameterdarstellung ausgehen:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{1-\tau^2}{2} f(\tau) \\ x_2 &= i\frac{1-\tau^2}{2} f(\tau) \\ x_3 &= \overset{+}{(-)}\,\tau f(\tau) \end{aligned}\right\} \quad f(\tau)^2 \text{ ist das Bogenelementquadrat der Raumkurve.}$$

$$\Phi_\tau = \frac{3f_1^2 - 2ff_2}{f^4};$$

$$\Psi_\tau = i\,\frac{6\cdot f\cdot f_1 f_2 - f^2 f_3 - 6\cdot f_1^2}{f^6} \left[f_1 = \frac{df}{d\tau},\ f_2 = \frac{d^2 f}{d\tau^2} \text{ usw.}\right]$$

Der natürliche Parameter ist definiert durch die Gleichung:

$$\frac{dp}{d\tau} = -if.$$

Den Geraden der Ebene $(12) \equiv 0$ gehört die Lösung der Differentialgleichung:

$$ff_1 + \tau(2f_1^2 - ff_2) \equiv 0, \quad \text{nämlich } f = \frac{1}{\varkappa\tau^2 + \lambda} \text{ zu.}$$

Allgemein entsprechen den Geraden der Ebene reguläre Kreise; im Speziellen den Minimalgeraden singuläre Kreise, den Geraden durch den Anfangspunkt die Erzeugenden, speziell den Minimalgeraden durch den Anfangspunkt sie selbst.

Zu einer umfangreichen Klasse von Kurven kommen wir, wenn wir $f = \tau^n$ wählen. Wir erhalten lauter Schraubenlinien auf dem absoluten Kegel; die Projektionen sind logarithmische Spiralen, welche die invariante Differentialgleichung $(01) \equiv \varkappa(0\ 1)$ erfüllen.

$$\frac{R^2}{T^2} = -\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}.$$

Ausgezeichnete Fälle sind: $n = 0$ und $n = -2$ (singuläre —) $n = -1$ (reguläre Kreise).

Im allgemeinen gehören immer zu zwei Indices n_1 und n_2, für welche $n_1 + n_2 = -2$, spiegelbildlich gleiche Kurven auf dem Kegel. Der natürliche Parameter stellt sich als die Torsion der Kurven heraus.

§ 3. Die Minimalprojektion.

Die Minimalprojektion ordnet jedem (reellen) Punkte x_1, x_2, x_3 in der Ebene $x_3 = 0$ einen orientierten (imaginären) Kreis zu mit dem Mittelpunkt x_1, x_2 und dem Radius ix_3:

$$(\xi_1 - x_1)^2 + (\xi_2 - x_2)^2 + x_3^2 = 0.$$

Den Punkten des absoluten Kegels entsprechen lauter Kreise durch den Anfangspunkt, so daß wir auch statt der Kurven auf demselben die entsprechenden Kreisscharen und

deren Enveloppen studieren können: einerseits ergeben spezielle Kurven interessante Kreisscharen, andererseits spezielle Kreisscharen interessante Kurven. Die Enveloppe hat die Parameterdarstellung:

$$\left|\begin{array}{ll} \xi_1 = 0 & \xi_2 = 0 \qquad \text{und} \\ \xi_1 = 2 \cdot \begin{matrix} 01 \\ 1\ 1 \end{matrix} x_2' & \xi_2 = -2 \cdot \begin{matrix} 01 \\ 1\ 1 \end{matrix} x_1' \end{array}\right|,$$

also ihr Bogenelement:

$$\sigma'^2 = \frac{4 \cdot 0\ 0 \cdot 12^2}{1\ 1^2}.$$

Wenn wir den Radiusvektor r und den Krümmungsradius ϱ einführen, stellt das Verhältnis

$$\frac{\sigma'^2}{s'^2} = \frac{4r^2}{\varrho^2}$$

eine absolute Differentialinvariante dar, d. h. einen von der Wahl des Parameters unabhängigen Differentialausdruck.

Zu einer beliebigen reellen Geraden gehört ein elliptisches Kreisbüschel (die Enveloppe besteht aus einem Punktpaar), zu einer Geraden durch den Anfangspunkt ein parabolisches Kreisbüschel (die Enveloppe besteht aus einem Linienelement im Anfangspunkt). Betrachten wir eine imaginäre Gerade, so erhalten wir ein Kreisbüschel, welches halb elliptisch, halb hyperbolisch ist, da es durch den reellen Anfangspunkt und einen imaginären Punkt geht; es enthält auch einen reellen Kreis, welcher den reellen Punkt der imaginären Geraden zum Mittelpunkt und dessen Entfernung vom Anfangspunkt zum Radius hat. Gesondert davon sind die Minimalgeraden zu betrachten. Die Enveloppe bildet einer der absoluten Kreispunkte, in welchem alle Kreise des Büschels sich berühren. Man könnte es deshalb halbkonzentrisch nennen. Auch dieses Büschel enthält einen reellen Kreis. Geht schließlich die Minimalgerade durch den Anfangspunkt, so zerfällt das Büschel in lauter Linienpaare, deren eine Linie immer die betrachtete Minimalgerade durch den Anfangspunkt ist. Enveloppe ist das ent-

sprechende absolute Linienelement des Anfangspunktes. Der reelle Kreis wird ein reeller Nullkreis. Die diesen Kreisscharen und ihren Enveloppen entsprechenden Kurven haben wir schon in § 2 betrachtet.

Die allgemeine Parameterdarstellung der Enveloppe ist

$$\xi_1 = f^2\left(\frac{\tau}{f_1} + \frac{1}{2f + \tau f_1}\right)$$
$$\xi_2 = -if^2\left(\frac{\tau}{f_1} - \frac{1}{2f + \tau f_1}\right).$$

Nehmen wir $f = \tau^n$, also eine logarithmische Spirale, so wird die Enveloppe ebenfalls die Differentialgleichung der log. Spiralen erfüllen; sie ist, abgesehen von ihrer Lage dieselbe Spirale, d. h. durch dasselbe $\varkappa$ charakterisiert. $n = 0$, $n = -2$; $n = -1$ sind nicht eigentliche Spiralen. Die Enveloppe ergibt die beiden absoluten Kreispunkte, bzw. den konzentrischen Kreis mit dem doppelten Radius. Im allgemeinen entsprechen wieder Werten $n_1 + n_2 = -2$ spiegelgleiche Enveloppen.

Im engsten Zusammenhang stehen diese Betrachtungen natürlich mit den Beziehungen von Evolvente und Evolute der logarithmischen Spiralen, welche ja auch einander kongruent sind. Auf die Schraubenlinien kommt man auch, wenn man fragt: welche Kurven auf dem absoluten Kegel haben ebene Evolventen? Die Verbindungslinien zugehöriger Punkte erzeugen die abwickelbare Tangentenfläche der Schraubenlinie. Verfahren wir ebenso mit den Punkten der Enveloppe, so erhalten wir lauter Minimalgerade, wie auch aus der Definition der Enveloppe hervorgeht. Diese Minimalgeraden sind also Tangenten einer Minimalkurve. Ihre Gleichungen sind im Falle der Schraubenlinie folgende:

$$y_1 = -(n+1)c\tau^n\left\{\frac{\tau^2}{n} - \frac{1}{n+2}\right\}$$
$$y_2 = i(n+1)c\tau^n\left\{\frac{\tau^2}{n} + \frac{1}{n+2}\right\}$$
$$y_3 = 2c\tau^{n+1}.$$

Die Minimalkurve liegt auf dem Kreiskegel:

$$n(n+2)\{y_1^2+y_2^2\}+(n+1)^2 y_3^2=0.$$

Der Fall

$$n=1 \quad p=3\tau \text{ und } c=+\frac{9i}{4}$$

ergibt die bekannte „kubische Parabel“:

$$y_1=-i\left\{\frac{p^3}{6}-\frac{p}{2}\right\}$$

$$y_2=-\left\{\frac{p^3}{6}+\frac{p}{2}\right\}$$

$$y_3=i\frac{p^2}{2},$$

welche auf dem Kegel $3(y_1^2+y_2^2)+4y_3^2=0$ und auf dem Zylinder $(y_1-iy_2)^2-2iy_3=0$ von Minimalgeraden liegt.

Betrachten wir allgemein die Projektionen der Minimalkurven, so müssen sie Evoluten der Enveloppen sein. Schließlich sehen wir noch, was noch nicht bekannt zu sein scheint, daß unsere Ausgangs- oder Mittelpunktskurve Sehnenmittelpunktskurve zwischen Enveloppe und ihrer Evolute ist. Nicht in dieser Klasse von algebraischen Minimalkurven enthalten, aber verwandt zu ihnen ist die Lyonsche Schraubenlinie.

§ 4. Eine neue Zuordnung von ebenen Kurven und Kurven auf dem absoluten Kegel.

Gegeben sei eine ebene Kurve

$$\left.\begin{aligned}x_1&=x_1(t)\\x_2&=x_2(t)\end{aligned}\right\}.$$

Ihre Evolute ist

$$y_1=x_1-\frac{x_2'}{s'}r$$

$$y_2=x_2+\frac{x_1'}{s'}r.$$

Ziehen wir zu den sukzessiven Normalen die Parallelen durch den Anfangspunkt und tragen auf ihnen in entsprechendem Sinne die Länge des Krümmungsradius auf, so erhalten wir die Kurve:

$$\xi_1 = -r\,\frac{x_2'}{s'}$$

$$\xi_2 = +r\,\frac{x_1'}{s'}$$

als Projektion der Raumkurve

$$\xi_1 = -r\,\frac{x_2'}{s'}$$

$$\xi_2 = +r\,\frac{x_1'}{s'}$$

$$\xi_3 = +ir.$$

Wir sehen dann, daß das Bogenelement der Raumkurve bis auf das Vorzeichen gleich dem Bogenelement unserer Ausgangskurve ist. Durch die Einführung des natürlichen Parameters $p = is$ erhalten wir für diese Kurve:

$$\Phi_p = \frac{1}{r^2} + 2\cdot\frac{d^2 lr}{dp^2} + \left(\frac{dlr}{dp}\right)^2$$

als Summe von absoluten Differentialinvarianten der zugeordneten ebenen Kurve.

II. Kapitel.

Das zugehörige Äquivalenzproblem.

§ 1. Die Bewegungen, welche den absoluten Kegel invariant lassen, und die entsprechenden Transformationen der Ebene.

Diese Bewegungen sind charakterisiert durch die orthogonale Substitution, welche wir in der Cayleyschen Form annehmen:

$$\left.\begin{array}{ll} \varkappa\cdot a_{11}=1+r^2-s^2-t^2 & \varkappa\cdot a_{21}=-2(t+rs) \\ \varkappa\cdot a_{31}=-2(s-rt) & \\ \varkappa\cdot a_{12}=2(t-rs) & \varkappa\cdot a_{22}=1-r^2+s^2-t^2 \\ \varkappa\cdot a_{32}=-2(r+st) & \\ \varkappa\cdot a_{13}=2(s+rt) & \varkappa\cdot a_{23}=2(r-st) \\ \varkappa\cdot a_{33}=1-r^2-s^2+t^2 & \end{array}\right\} \varkappa=1+r^2+s^2+t^2.$$

Für ein bestimmtes Wertetripel besteht die Bewegung in einer Rotation um die Achse

$$x_1 : x_2 : x_3 = r : -s : t.$$

Die Punkte des absoluten Kegels beschreiben Kreise in den dazu senkrechten invarianten Parallelebenen des Abstandes c:

$$r\xi_1 - s\xi_2 + t\xi_3 = c\sqrt{r^2+s^2+t^2}.$$

Die Projektionen dieser Kreise sind die Bahnkurven der entsprechenden Transformationen in der Ebene $x_3 = 0$. Drehen wir das Koordinatensystem so, daß diese Ellipsen symmetrisch zur x_1 Achse werden, so lautet deren Gleichung:

$$\frac{(\xi_1-\lambda)^2}{\alpha^2}+\frac{\xi_2^2}{\beta^2}=1,$$

wobei

$$\lambda=\frac{c\cdot r}{\sqrt{r^2+t^2}}, \quad \alpha=\frac{ict}{\sqrt{r^2+t^2}}, \quad \beta=ic.$$

Die endlichen Gleichungen dieser Transformation sind:

$$\mathfrak{x}_1 = x_1(\cos^2\mu + \sin^2\mu\cos\vartheta) - x_2\sin\mu\sin\vartheta + i\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\,\sin\mu\cos\mu\,(1 - \cos\vartheta)$$

$$\mathfrak{x}_2 = x_1\sin\mu\sin\vartheta + x_2\cos\vartheta - i\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\cos\mu\sin\vartheta,$$

also

$$i\sqrt{\mathfrak{x}_1^2 + \mathfrak{x}_2^2} = x_1\sin\mu\cos\mu\,(1 - \cos\vartheta) + x_2\cos\mu\sin\vartheta + i\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\,(\sin^2\mu + \cos^2\mu\cos\vartheta);$$

hiebei ist $\operatorname{tg}\mu = \frac{t}{r}$ und ϑ der wesentliche Parameter; die infinitesimale Transformation

$$Uf = \xi_1\frac{\partial f}{\partial x_1} + \xi_2\frac{\partial f}{\partial x_2}$$
$$\xi_1 = -x_2\sin\mu$$
$$\xi_2 = x_1\sin\mu - i\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\cos\mu.$$

§ 2. Die Differentialinvarianten der Transformation.

1. Wir wählen aus die Differentialinvariante I. Ordnung $01^2_{0\ 0}$, welche das Bogenelementquadrat der Raumkurve darstellt. Die Invarianz desselben läßt sich leicht direkt aus den endlichen Gleichungen der Gruppe bestätigen, oder man erweitert die infinitesimale Transformation Uf zu

$$U'f = \xi_1\frac{\partial f}{\partial x_1} + \xi_2\frac{\partial f}{\partial x_2} + \xi_1'\frac{\partial f}{\partial x_1'} + \xi_2'\frac{\partial f}{\partial x_2'}.$$

Da die Differentialinvariante aber keine absolute Invariante ist, so gibt sie nur in dem speziellen Fall $\xi_1 = 0$ zu invarianten Kurvenscharen Anlaß, welche durch die entsprechende Transformation wieder in invariante Kurvenscharen derselben Art übergeführt werden.

$\mu = 0$ $\quad \xi_1 = 0 \qquad \mathfrak{x}_1 = x_1$

$\qquad\quad \xi_2 = -i\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \qquad \mathfrak{x}_2 = x_2\cos\vartheta - i\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\sin\vartheta.$

Die invariante Differentialgleichung $\begin{matrix} 01^2 \\ 0\ 0 \end{matrix} = -a^2$ hat für $a = i$ als Lösung die Parabelschar $\frac{2}{c} \cdot y = x^2 - \frac{1}{c^2}$. Die entsprechenden Kurven auf dem absoluten Kegel — im Falle der Parabeln sind es singuläre Kreise ($\Phi = 0$) — haben die Eigenschaft, bei einer Drehung um die x_1 Achse immer wieder zu Projektionen Kurven unserer Schar zu erhalten.

2. Wichtiger ist die absolute Differentialinvariante Φ, deren Invarianz ebenfalls entweder direkt gezeigt werden kann oder mit Hilfe einer nochmaligen Erweiterung der infinitesimalen Transformation. Zur Integration der invarianten Differentialgleichung $\Phi = \frac{1}{a^2}$ verwenden wir nach der Theorie der kontinuierlichen Gruppen die Kenntnis von 3 voneinander unabhängigen infinitesimalen Transformationen (entsprechend den infinitesimalen Rotationen um die Koordinatenachsen), welche die Differentialgleichung invariant lassen. Die Differentialgleichung hat in x, y die Form:

$$\Omega = 2(x^2 + y^2)y'' - (xy' - y)(1 + y'^2) - \frac{1}{a^2}(xy' - y)^3 = 0.$$

Die infinitesimalen Transformationen sind:

$$\xi_1 = 0 \qquad \xi_2 = -y \qquad \xi_3 = i\sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\eta_1 = -i\sqrt{x^2 + y^2} \qquad \eta_2 = +x \qquad \eta_3 = 0$$

$$\eta_1' = -i\frac{x + yy'}{\sqrt{x^2 + y^2}} \qquad \eta_2' = 1 + y'^2 \qquad \eta_3' = -iy'\frac{x + yy'}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\eta_1'' = -i\frac{(x^2 + y^2)yy'' + (xy' - y)^2}{\sqrt{x^2 + y^2}^3} \qquad \eta_2'' = 3y'y''$$

$$\eta_3'' = -i\frac{(2x + 3yy')(x^2 + y^2)y'' + y'(xy' - y)^2}{\sqrt{x^2 + y^2}^3}$$

$$U_1'\Omega = \frac{-3iy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \Omega \qquad U_2''\Omega = 3y' \cdot \Omega \qquad U_3''\Omega = \frac{-3iyy'}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \Omega.$$

Die Zusammensetzung der infinitesimalen Transformationen ist die symmetrische:

$$(U_1 U_2) = U_3 \quad (U_2 U_3) = U_1 \quad (U_3 U_1) = U_2.$$

Die Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 & \eta_1' \\ \xi_2 & \eta_2 & \eta_2' \\ \xi_3 & \eta_3 & \eta_3' \end{vmatrix} = (x y' \quad y)^2$$

ergibt, daß die einzige invariante Kurvenschar, welche die allgemeinste Transformation der Gruppe gestattet, die Schar der Geraden durch den Anfangspunkt ist; ihr entsprechen die Erzeugenden des Kegels. Da ferner unsere Transformationsgleichungen den Differentialausdruck $\frac{1}{y'}$ nicht ungeändert lassen, so gehört unsere Differentialgleichung zum 2. Typus. Wählen wir die folgenden unabhängigen infinitesimalen Transformationen:

$$U_1' = \sqrt{i}\, U_1 + \frac{1}{\sqrt{i}}\, U_3$$
$$U_2 = -2i U_2$$
$$U_3 = \frac{1}{\sqrt{i}}\, U_1 + \sqrt{i}\, U_3,$$

so wird durch die Transformation

$$\bar{x} = -\frac{\xi_3 \eta_1 - \xi_1 \eta_3}{\xi_1 \eta_2 - \xi_2 \eta_1} = \sqrt{-i \frac{x+iy}{x-iy}} \cdot \bar{y} = \frac{1}{\sqrt{x - iy}}$$

$$\bar{y} = \int \frac{-\eta_1 dx + \xi_1 dy}{\xi_1 \eta_2 - \xi_2 \eta_1}$$

unsere Differentialgleichung 2. Ordnung $\Omega = 0$ in die sofort integrierbare Form gebracht:

$$y'' = \frac{z^2}{y^3} \quad \left(z^2 = \frac{1}{4 i a^2}\right).$$

Die Integralkurven sind die ähnlichen Hyperbeln

$$\frac{y^2}{\underset{C^2}{z^2}} = \frac{(x - x_0)^2}{\underset{C^4}{z^2}} = 1.$$

x_0 und C^2 sind Integrationskonstante.

In den Koordinaten xy erhalten wir natürlich die Projektionen der Schnitte der Ebenen $\alpha x + \beta y + \gamma z = i a$ mit dem absoluten Kegel (d. h. der regulären Kreise mit dem Radius a).

Unter diesen ist eine Schar besonders hervorzuheben, welche dem Werte $C = 0$ der Integrationskonstanten entspricht. Wir erhalten dafür die Schar der Parabeln $y^2 = \pm 2ik(x - x_0)$, denen die Kreise auf dem absoluten Kegel entsprechen, welche alle durch einen der absoluten Kreispunkte der Ebene $x_3 = 0$ gehen.

Für die Ebenen, in denen diese Kreise liegen, ist $\beta = \mp i\alpha$, $\gamma = 1$. Daraus können wir aber nicht schließen, daß ihre Normalen Parallelen zur x_3 Achse seien, sondern nur, daß der unendlich ferne Punkt derselben auf der Tangente des absoluten Kegelschnittes im entsprechenden Kreispunkte liegt. Der Winkel der Normalen zur Achse wird gewissermaßen durch die Entfernung dieses Punktes von dem unendlich fernen Punkt der Achse auf jener uneigentlichen Minimalgeraden gemessen; diese Entfernung kann unter anderen auch den Wert Null haben. Die Projektionen dieser Kreise sind Ellipsen, welche durch einen der absoluten Punkte gehen und dort die Minimalgeraden zu Tangenten haben. Ihre Gleichung ist:

$$(\alpha(x + iy) - ia)^2 + (x + iy)(x - iy) = 0.$$

Ihre Achsenrichtung ist die eine Minimalrichtung; bezüglich ihrer Brennpunktseigenschaften stehen diese Kegelschnitte zwischen Ellipse und Parabel. Andererseits sind sie mit dem Kreis verwandt. Berührt ein solcher Kegelschnitt die unendlich ferne Gerade, so entsteht statt einer imaginären Parabel die doppelt zählende Minimalgerade.

Gesondert ist der Fall verschwindender Krümmung ($z^2 = 0$) zu betrachten. Er ergibt die transformierte Differentialgleichung $\bar{y}'' = 0$. Die Integralkurven werden gebildet von der Gesamtheit aller Geraden $A\bar{x} + By + C = 0$, ausgenommen den Fall $B = 0$, in welchem die Krümmung unbestimmt wird (Fall der Erzeugenden des Kegels).

§ 3. Eine Abbildung der Kurven auf dem absoluten Kegel.

Unsere Koordinaten x, y vermitteln eine Abbildung, bei welcher die Kurven konstanter Krümmung Null des absoluten Kegels (die singulären Kreise) übergehen in die Kurven konstanter Krümmung Null der Ebene (die Geraden).

Die Krümmung ist $\Phi x = 4 i y^3 y''$.

Die Kurven auf dem Kegel sind folgendermaßen dargestellt:

$$x = \frac{i x^2 + 1}{2 y^2} \qquad y = \frac{i x^2 - 1}{2 i y^2} \qquad z = \frac{2\sqrt{-i}\, x}{2 y^2}.$$

Wir haben dann folgendes Entsprechen:

Ebene x, y	Absoluter Kegel	Ebene x, y (Projektion)
I. Beliebige Gerade	Beliebiger singulärer Kreis	Imaginäre Parabel
x Parallele	spezieller singulärer Kreis II	Minimalgerade II
Gerade durch den Anfangspunkt	spezieller singulärer Kreis I	Minimalgerade I
y Parallele	Erzeugende	Gerade durch den Anfangspunkt
x Achse	Absoluter Kegelschnitt	Unendlich ferne Gerade
y Achse	Minimalgerade I	Minimalgerade durch den Anfangspunkt
Unendlich ferne Gerade	Minimalgerade II	

Ebene x, y	Absoluter Kegel	Ebene x, y (Projektion)
II. Kegelschnitte symmetrisch zur x Achse	Kurven konstanter Krümmung = reguläre Kreise	Imaginäre Ellipsen
Symmetrische Parabeln	Kurven konstanter Krümmung = reguläre Kreise durch einen der absoluten Kreispunkte in der Ebene $x_3 = 0$	Imaginäre Ellipsen durch den entsprechenden Kreispunkt
Symmetrische Parabeln durch den Anfangspunkt	$x^2 + y^2 = a^2$ in $x_3 = \pm ia$	Kreis $x^2 + y^2 = a^2$
Symmetrische Linienpaare und Doppellinien.	siehe unter I	siehe unter I

Die einfache Form der Krümmung legt uns die Frage nahe, welche Gleichung zwischen x und y die oben betrachteten Schraubenlinien charakterisiert. Da

$$x = \sqrt{i\tau} \text{ und } y = \frac{1}{\sqrt{f}}, \text{ lautet sie } y^{2\nu} \cdot x'' = \text{const.} \left(n = \frac{\mu}{\nu}\right).$$

Wenn wir gewisse einfache Funktionen $\Phi(x, y)$ wählen, welche die Integration der Differentialgleichung ermöglichen, so können wir aus den Krümmungseigenschaften der Kurve deren Gleichungen explicite aufstellen. Z. B. kann die Gleichung $\Phi = Cx^{-2\lambda}$ durch die Substitution $y = cx^k$ integriert werden, ebenso, wenn Φ nur eine Funktion von y ist, z. B. cy^ν $(\nu = 3)$.

III. Kapitel.

Die Minimalkurven.

Ganz in derselben Weise können wir auch die Minimalkurven behandeln:

$$x_1 = x_1(t)$$
$$x_2 = x_2(t)$$
$$x_3 = \overset{+}{(-)}\, i \cdot s(t)$$

wobei s die Bogenlänge der Projektion ist. Wir führen zu diesem Zwecke nach Study das sphärische Bild der Kurve auf dem absoluten Kegel ein, dessen Koordinaten gleich den ersten Differentialquotienten der Koordinaten der Minimalkurven nach dem natürlichen Parameter sind. Dieser ist definiert durch die Gleichung

$$\left(\frac{dp}{dt}\right)^2 = \frac{123}{2\,\bar{2}}.$$

Es erhöhen sich dann in unsern Formeln des I. Kapitels § 2 alle Ziffern um eine Einheit. Die charakteristischen absoluten Differentialinvarianten der Minimalkurven sind also

$$F_p = \frac{14_p}{12_p} = 3\,\bar{3}_p \quad \text{und} \quad \mathsf{F}_p = \frac{24_p}{12_p} = 3\,\bar{4}_p.$$

Nimmt man z. B. den Kreis $x_1 = \cos t$, $x_2 = \sin t$, so wird $F = i$ und $\mathsf{F} = 0$. Die zugehörige Minimalkurve ist eine Minimalschraubenlinie. Bei diesem Beispiel kann man wie auch sonst mit Vorteil die Bogenlänge der Projektion als Parameter einführen. Es ist allgemein:

$$F_s = \frac{7 \cdot 13_s^2 - 4 \cdot 12_s \cdot \{14_s + 2 \cdot 23_s\}}{4\,i\,(23)_s}.$$

Man kann auch den Zusammenhang mit den Weierstraßschen Formeln untersuchen; ebenso nach den Minimalkurven

fragen, welche die im I. Kapitel untersuchten Kurven des absoluten Kegels zu sphärischen Bildern haben. Die zugehörige Weierstraßsche Funktion ist:

$$f(\tau) = \frac{-i\tau^{2n+3}}{(2n+1)(2n+2)(2n+3)}.$$

Den Fällen $n = 0$ und $n = -2$ entsprechen algebraische Minimalkurven dritter Ordnung, deren sphärische Bilder die singulären Kreise I und II sind; $n = -1$; $n = -\frac{1}{2}$ und $n = -\frac{3}{2}$ sind besonders zu untersuchen. Sie ergeben transzendente Minimalschraubenlinien. Im übrigen gehören wieder Indices n_1 und n_2, für welche $n_1 + n_2 = -2$, z. B. $n_1 = +1$, $n_2 = -3$ zusammen.

Mit Ausnahme der Fälle $n = -1$; $n = -\frac{1}{2}$ und $n = -\frac{3}{2}$ liegen diese Minimalkurven auf dem Kegel: $(2n+1)(2n+3)(x_1^2 + x_2^2) + (2n+2)^2 x_3^2 = 0$. [Man könnte diese Minimalkurven auch zu den in Kapitel I betrachteten Minimalkurven in Beziehung bringen.] Für $n = -1$ liegt die Minimalkurve auf dem Kreiszylinder, für $n = -\frac{1}{2}$ und $n = -\frac{3}{2}$ auf den Zylindern von Minimalgeraden: $x_1 \pm i x_2 + 2i x_3^2 = 0$, welche die Parabel: $x_1 + 2i x_3^2 = 0$, $x_2 = 0$ von den beiden absoluten Punkten der Ebene $x_3 = 0$ aus projizieren.

IV. Kapitel.

Die sphärischen Kurven.

Die Gleichungen der sphärischen Kurven seien:

$$x_1 = x_1(t) \quad x_2 = x_2(t) \quad x_3 = \overset{+}{(-)}\sqrt{R^2 - 0|0}.$$

Der Krümmung dieser Kurven kann man die charakteristische Form

$$\Phi_{R^2} = \frac{1}{R^2} + \frac{\{12_p \cdot R^2 + 01_p\}^2}{R^2(0\ 0_p - R^2)}$$

geben, wenn der natürliche Parameter definiert ist durch

$$\left(\frac{dp}{dt}\right)^2 = -\frac{R^2 \cdot 1|1-01^2}{R^2 - 0\,0}; \qquad \Psi_{R^2} = \frac{13_p}{\sqrt{R^2 - 0\,0_p}};$$

auch hier würden wir mit Hilfe der Identitäten mit den Invarianten 0 0, 0 1, 0 2 und 0 3 vollständig ausreichen.

In der Minimalprojektion entsprechen den Punkten der Kugel orthogonale Kreise des Äquators (auch Diametralkreise) $R^2 - 0\,0 = 0$. $R^2\,1\,1 - 01^2 = 0$ ergibt die erzeugenden Minimalgeraden, deren Projektionen die Gesamtheit aller Tangenten des Äquators von inneren Punkten desselben aus darstellt. Minimalgeraden als Projektionen entsprechen entweder selbst Minimalgerade oder singuläre Kreise; beliebige singuläre Kreise haben wieder die bekannten Parabeln zur Projektion, welche auch in Parallellinienpaare zerfallen können.

Die oben angegebene Form der Krümmung erinnert uns an den Satz über die relative und absolute Krümmung von Mannigfaltigkeiten in der nichteuklidischen Geometrie: das Quadrat der relativen Krümmung einer Kurve in der elliptischen Ebene (auf der Kugel) ist gleich dem Quadrat der Krümmung der Kurve — als Raumkurve im euklidischen Raum aufgefaßt — vermindert um das Riemannsche (hier auch Gaußsche) Krümmungsmaß der elliptischen Ebene (Kugel). [Für Flächen gilt ein gleicher Satz.]

Es ergibt sich, daß unser Ausdruck

$$\Phi_{R^2} - \frac{1}{R^2} = \frac{1}{\varrho^2}$$

das Quadrat der geodätischen Krümmung der sphärischen Kurven also auch eine absolute Differentialinvariante derselben darstellt.

In der allgemeinen Parameterdarstellung auf der Einheitskugel ist dieser Ausdruck

$$\frac{1}{\varrho^2} = \left\{\frac{12 \cdot (1-0|0) - 01 \cdot (1\,|\,1-01^2)}{(1\,|\,1-01^2)^{3/2}}\right\}^2.$$

Um die relative (geodätische) Krümmung definieren zu können, müssen wir eine derartige Parameterdarstellung der

Kugel geben, daß die geodätischen Linien durch lineare Gleichungen dargestellt werden:

$$x_1 = \frac{u_1}{\sqrt{1+u_1^2+u_2^2}} \quad x_2 = \frac{u_2}{\sqrt{1+u_1^2+u_2^2}} \quad x_3 = \frac{1}{\sqrt{1+u_1^2+u_2^2}}$$

$$\frac{1}{\varrho^2} = \frac{(du_1\, d^2u_2 - du_2\, d^2u_1)^2}{(E\,du_1^2 + 2F\,du_1\,du_2 + G\,du_2^2)^3}.$$

Das ist aber genau das Quadrat der geodätischen Krümmung.

Alle Betrachtungen und Formeln über die sphärischen Kurven auf der Kugel R^2 müssen für $R^2 = 0$ die Formeln des I. Kapitels ergeben. In gleicher Weise wird das Äquivalenzproblem und die Minimalprojektion behandelt. Die Enveloppen der Orthogonal-(Diametral)kreise sind anallagmatische Kurven 4. Ordnung, wenn die Mittelpunktsörter selbst Kreise des Orthogonalsystems bilden. Ist der Ort der Mittelpunkte eine Parabel, so kann man daran einfache geometrische Betrachtungen anschließen, besonders wenn die Parabeln Projektionen von singulären Kreisen darstellen.

V. Kapitel.

Die Kurven in Minimalebenen.

$x_1 = x_1(t)$, $x_2 = x_2(t)$, $x_3 = i\,x_2(t)$. Hier sind die charakteristischen Differentialinvarianten:

$$J_1 = i\,\frac{x_1' \cdot 13 - 3 \cdot x_1'' \cdot 12}{x_1'^2 \cdot 12} = i\,\frac{y'''}{y''}$$

$$J_2 = -\frac{x_1'^2 \cdot 14 - 6 \cdot x_1' \cdot x_1'' \cdot 13 + \{15 \cdot x_1''^2 - 4 \cdot x_1' x_1'''\} \cdot 12}{x_1'^4 \cdot 12} = -\frac{y''''}{y''},$$

wenn $y = F(x)$ die Projektion ist.

Der natürliche Parameter ist

$$x_1 = ip$$
$$x_2 = q = f(p).$$

Hier wird das Äquivalenzproblem sehr einfach zu lösen sein, denn die Differentialgleichungen $J_1 = \text{const.}$ und $J_2 = \text{const.}$ lassen sich ohne weiteres integrieren. Die infinitesimalen Transformationen sind: $U_1 = p$, $U_2 = q$, $U_3 = xq$, $U_4 = yq$ mit der Zusammensetzung: $(U_1 U_2) = 0$, $(U_1 U_3) = U_2$, $(U_2 U_3) = 0$, $(U_1 U_4) = 0$, $(U_2 U_4) = U_2$, $(U_3 U_4) = U_3$.

Man wird die einzelnen infinitesimalen Transformationen zu je zwei oder drei zusammentassen, die invarianten Gebilde dieser Untergruppen aufstellen und schließlich die Betrachtungen mit Hilfe der allgemeinen Theorie der viergliedrigen Gruppen vervollständigen.

Die Minimalprojektion ordnet jedem Punkt der Minimalebene einen Kreis zu, welcher die x_1 Achse berührt; also den Kurven derselben $q = f(p)$ Scharen von solchen Kreisen, beziehungsweise deren Enveloppen:

$$\xi_1 = i\left(p + \frac{2ff'}{1-f'^2}\right); \qquad \xi_2 = \frac{2f}{1-f'^2}.$$

Wir erhalten dann die speziellen Fälle:

I. Die Geraden der Minimalebene:

1. Eine Ausnahmestellung hat der Fall $p = \text{const.}$; dies sind die Minimalgeraden, welche zur Projektion die Parallelen zur x_2 Achse und zur Enveloppe ein Linienelement der x_1 Achse haben.

2. $f = c$ ist eine imaginäre Parallele zu der reellen Geraden der Minimalebene: Projektion ist eine Parallele zur x_1 Achse, Enveloppe ebenfalls eine solche mit doppeltem Abstand.

3. $f = cp + d$ ist eine beliebige Gerade, wie auch Projektion und Enveloppe. Hat die Projektion die Richtung φ, so hat die Enveloppe die Richtung 2φ. Spezielle Fälle sind: $d = 0$, $c = \pm i$, $c = \pm 1$.

II. Die singulären Kreise der Minimalebene:

4. Bevor wir die quadratischen Funktionen betrachten, fragen wir nach der Bedeutung der Differentialgleichung:

$$p(1-f'^2) + 2ff' = 0, \text{ also } \xi_1 \equiv 0.$$

Die Integration ergibt die Lösung:

$$f = \frac{c^2 p^2 - 1}{2c},$$

also $f'' = 0$, d. h. spezielle singuläre Kreise der Minimalebene, in der Projektion die bekannte Parabelschar

$$x_1^2 = -\frac{2}{c}\left(x_2 + \frac{1}{2c}\right),$$

welche die x_1 Achse zur gemeinsamen Direktrix haben. Die zugehörigen Enveloppen fallen alle in den entsprechenden Brennpunkt; eine additive Veränderung von p ergibt nur eine Verschiebung der Figuren.

5. Die quadratische Funktion $f = ap^2 + 2bp + c$ (wobei auch b gleich Null sein kann) ergibt allgemein singuläre Kreise und als zugehörige Enveloppe den Kreis

$$\xi_1^2 + \left(\xi_2 + \frac{1 - 4ac}{4a}\right)^2 = \left(\frac{1 + 4ac}{4a}\right)^2,$$

also wenn $c = -\frac{1}{4a}$ Fall 4.

Gehen wir umgekehrt von den Enveloppen aus und fragen nach den Kurven in der Minimalebene, für welche die Enveloppe ein besonders einfaches Verhalten zeigt, so müssen wir dazu folgende Ausdrücke bilden:

$$\frac{d\xi_2}{d\xi_1} = \frac{2f'}{i(1+f'^2)}; \quad 1 + \left(\frac{d\xi_2}{d\xi_1}\right)^2 = \left(\frac{1-f'^2}{1+f'^2}\right)^2;$$

$$\frac{d^2\xi_2}{d\xi_1^2} = \frac{-2f''}{1+2ff''-f'^2} \cdot \left(\frac{1-f'^2}{1+f'^2}\right)^3,$$

also der Krümmungsradius

$$\frac{1}{\varrho^2} = \left(\frac{1+2ff''-f'^2}{-2f''}\right)^2.$$

Wir können dabei unterscheiden zwischen Eigenschaften, welche nur in einer diskreten Anzahl von Punkten, und solchen, welche für alle Punkte gelten. Die letzteren charakterisieren auch das Verhalten in den ersteren Punkten und deren nächster Umgebung.

$$\left.\begin{array}{ll} \frac{d\xi_2}{d\xi_1} = 0 & \text{gibt } f = c \\ \frac{d\xi_2}{d\xi_1} = \infty & \text{„ } f = \pm ip + d \\ \frac{d\xi_2}{d\xi_1} = \pm i & \text{„ } f = \pm p + d \end{array}\right\} \text{ Siehe 1), 2) und 3).}$$

$\frac{d\xi_2}{d\xi_1} = \operatorname{tg} 2\varphi$, also $y' = -if' = \operatorname{tg}\varphi$; die Richtungswinkel verdoppeln sich.

$\frac{d^2\xi_2}{d\xi_1^2} = 0$ $\begin{cases} f'' = 0, \text{ also } f = cp + d \text{ [oder } f' = 1\text{]}, \text{ wenn} \\ \text{nicht zugleich } f' = \pm i \text{ gibt die Fälle 1)—3);} \end{cases}$

$\varrho^2 = \infty$, wenn $f'' = 0$ und nicht zugleich $f' = \pm 1$ ebenfalls 1)—3).

Die Integration der Differentialgleichung $\varrho = \text{const.}$ gibt als Integrale die Schar:

$$y + \varkappa = 4C(x - x_0)^2 + \frac{1}{C},$$

d. h. die unter 5) betrachteten Parabeln mit einer Translation des Mittelpunktes; für $\varkappa = 0$ und $x_0 = 0$ Fall 4).

Mit diesen Ausführungen wären wir am Ende unserer Betrachtungen angelangt. Aus dem vorliegenden ist klar ersichtlich, daß die von uns durch sämtliche Kapitel verfolgte Methode durchaus geeignet ist, einen tiefen Einblick in das Wesen des Äquivalenzproblems der Raumkurven, insonderheit der imaginären Gebilde unter ihnen zu gestatten. Bezüglich der Minimalprojektion sei schließlich noch auf die Abhandl. von W. Blaschke in den Monatsheften für Mathematik und Physik, XXI, 1910, „Untersuchungen über die Geometrie der Speere in der euklidischen Ebene“ und bezüglich der Kurven in der Minimalebene auf H. Beck „Zur Geometrie in der Minimalebene“, Sitzungsberichte der Berliner mathematischen Gesellschaft 1912, verwiesen. Beide Autoren behandeln verwandte Probleme, jedoch nicht mit der von uns benutzten Projektionsmethode.

Über eine besondere Klasse unendlicher Kettenbrüche mit komplexen Elementen.[1])

Von **Otto Szász.**

Vorgelegt von A. Pringsheim in der Sitzung am 1. Mai 1915.

Gegeben sei der Kettenbruch:

$$\left[\frac{a_\nu}{1}\right]_1^\infty = \frac{a_1}{|1} + \frac{a_2}{|1} + \frac{a_3}{1} + \cdots, \tag{1}$$

wo die a_ν beliebige reelle oder komplexe Zahlen mit Einschluß der Null sind. Sei ferner

$$s = \sum_2^\infty{}_\nu |a_\nu| = |a_2| + |a_3| + \cdots$$

konvergent. Bekanntlich konvergiert der Kettenbruch unter der Bedingung:[2]) $s \leq 1$.

Im folgenden gebe ich einen einfachen Beweis dieses Satzes, wobei sich eine kleine Erweiterung seines Gültigkeitsbereiches

---

[1]) Diese Mitteilung ist ein Teil einer größeren Arbeit, welche als Habilitationsschrift im Mai 1914 der damaligen Akademie für Sozial- und Handelswissenschaften Frankfurt a. M. vorgelegen hat, jedoch bisher nicht gedruckt wurde.

[2]) Für reelle negative a_ν bewies den Satz schon M. A. Stern in seiner Note: Über die Konvergenz der Kettenbrüche. [Nachrichten etc. Göttingen, 1863, S. 136–143.] Für beliebige a_ν und $s < 1$ zuerst Herr Helge von Koch: Sur un théorème de Stieltjes et sur les fonctions définies par des fractions continues [Bull. Soc. Math. de France, t. 23, 1895, p. 33–40], von neuem und auch für den Fall $s = 1$ Herr A. Pringsheim: „Über einige Konvergenzkriterien für Kettenbrüche mit komplexen

ergibt: es mußte nämlich bisher vorausgesetzt werden, daß für unendlich viele λ $a_\lambda \neq 0$ ist.[1]) Ich konnte diese Einschränkung – soweit als möglich – beseitigen. Ferner leite ich speziell für den Fall lauter reeller nicht-positiver $a_\nu (a_\nu < 0)$ eine Verallgemeinerung dieses Satzes ab.

§ 1.

Die Näherungsbrüche des Kettenbruches (1) seien:

$$\frac{A_\nu}{B_\nu} \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots);$$

bereits Herr von Koch hat bewiesen,[2]) daß dann A_ν und B_ν gegen bestimmte endliche Grenzen konvergieren:

$$\lim_{\nu=\infty} A_\nu = A, \quad \lim_{\nu=\infty} B_\nu = B.$$

Die Konvergenz des Kettenbruches ist daher damit gleichbedeutend, daß B nicht verschwindet.[3])

Nun ist offenbar:

$$B_{\nu+1} - B_\nu = a_{\nu+1} B_{\nu-1} \quad (\nu \geq 1);$$

setzt man hier statt ν sukzessive $\nu+1, \nu+2, \ldots, \nu+\varkappa$ ein und summiert, so folgt:

Gliedern. [Diese Sitzungsber., Bd. 35, 1905, S. 359–380.] Einen allgemeineren Satz bewies ich in meiner Arbeit: Über gewisse unendliche Kettenbruchdeterminanten und Kettenbrüche mit komplexen Elementen [diese Sitzungsber., Jahrg. 1912, S. 323–361], S. 341.

[1]) Vgl. O. Perron, Die Lehre von den Kettenbrüchen, Leipzig, 1913, S. 259. Dieses Werk wird im folgenden unter „Perron, Lehrbuch" zitiert.

[2]) A. a. O.; vgl. auch Perron, Lehrbuch, S. 345–346. — Herr E. Maillet (Sur les fractions continues algebriques [Journal de l'École Polytechnique, IIe Série, XIIe Cahier, 1908, p. 41–62]; vgl. auch Perron, Lehrbuch, S. 346) hat ferner bewiesen, daß A und B nicht gleichzeitig verschwinden können. Ich zeigte dies (a. a. O., S. 331–332) mit Hilfe der Kettenbruchdeterminanten-Darstellung. Daß Herr Maillet dies schon früher (auf anderem Wege) bewiesen hatte, war mir damals leider entgangen.

[3]) Ist $B = 0$, $A \neq 0$, so divergiert der Kettenbruch außerwesentlich.

$$B_{\nu+\varkappa} - B_\nu = a_{\nu+1} B_{\nu-1} + a_{\nu+2} B_\nu + \cdots + a_{\nu+\varkappa} B_{\nu+\varkappa-2},$$

und wenn man hier zur Grenze für $\varkappa = \infty$ übergeht, erhält man schließlich die Gleichung:

$$B - B_\nu = \sum_1^\infty{}^{\lambda} a_{\nu+\lambda} B_{\nu+\lambda-2} \qquad (\nu \geqq 1). \tag{2}$$

Nun gibt es offenbar in der abgeschlossenen Menge:

$$|B_0|, \ |B_1|, \ |B_2|, \ \ldots; \ B$$

eine größte Zahl; ist B selbst dieses Maximum, so ist — wegen $B_0 = 1 - B > 1$ und daher konvergiert der Kettenbruch in diesem Falle. Hat aber B einen kleineren Wert, so gibt es ein kleinstes $n\,(n > 1)$, für das die Ungleichheiten bestehen:

$$|B_n| > |B_{n+\varkappa}| \qquad (\varkappa = 1, 2, 3, \ldots). \tag{3}$$

Nun folgt aus Gl. (2) für $\nu = n$:

$$|B - B_n| < |B_n| \sum_1^\infty{}^{\lambda} |a_{n+\lambda}| \tag{4}$$

und damit hier Gleichheit gelte, ist wegen der Ungleichheit (3) notwendig, daß die Gleichungen bestehen:

$$a_{n+3} = 0, \ a_{n+4} = 0, \ a_{n+5} = 0, \ \ldots \tag{5}$$

Ferner folgt aus Ungleichung (4):

$$|B_n| - |B| \leqq |B_n| \sum_1^\infty{}^{\lambda} |a_{n+\lambda}|$$

und schließlich:

$$|B| \geqq |B_n| \left(1 - \sum_1^\infty{}^{\lambda} |a_{n+\lambda}|\right) \geqq 0.$$

Hieraus ist unmittelbar ersichtlich, daß der Kettenbruch für $s < 1$ konvergiert; ist aber $s = 1$, so kann B nur dann verschwinden, wenn die Gleichungen (5) gelten und wenn zugleich

$$a_{n+1} + a_{n+2} = 1$$

ist. Es müssen also, wenn $n \geq 2$ ist, auch die Gleichungen erfüllt sein:

$$a_2 = 0, \ \ldots, \ a_n = 0.$$

Für $n = 1$ hat man jetzt offenbar:

$$\left.\begin{array}{lll} B_2 = 1 + a_2, & B_3 = 1 + a_2 + a_3, & B_\nu = B_3 \\ A_2 = a_1, & A_3 = a_1(1 + a_3), & A_\nu = A_3 \end{array}\right\} \quad (\nu = 4, 5, \ldots);$$

der Kettenbruch divergiert also nur dann, wenn a_2 und a_3 reell und nicht positiv sind und $a_2 + a_3 = -1$ ist. Und zwar ist der Kettenbruch für $a_1(1 + a_3) = 0$ wesentlich divergent, sonst außerwesentlich divergent.

Ebenso hat man für $n > 2$:

$$\left.\begin{array}{l} B_2 = 1, \ \ldots, \ B_n = 1, \ B_{n+1} = 1 + a_{n+1}, \ B_{n+2} = 1 + a_{n+1} + a_{n+2}, \ B_{n+\nu} = B_{n+2} \\ A_2 = a_1, \ \ldots, \ A_n = a_1, \ A_{n+1} = a_1(1 + a_{n+1}), \\ \quad A_{n+2} = a_1(1 + a_{n+1} + a_{n+2}), \ A_{n+\nu} = A_{n+2} \end{array}\right\} \quad (\nu > 3);$$

der Kettenbruch divergiert also nur dann, wenn a_{n+1} und a_{n+2} reell und negativ sind und $a_{n+1} + a_{n+2} = -1$ ist, und zwar ist er dann wesentlich divergent.

Zusammenfassend haben wir den folgenden Satz abgeleitet:

Satz 1. Der Kettenbruch mit beliebigen Elementen $\left[\begin{matrix} a_\nu \\ 1 \end{matrix}\right]_1^\infty$ konvergiert, wenn $\sum_2^\infty \nu \, a_\nu < 1$ ist; nur wenn für ein $n (n > 1)$ a_{n+1} und a_{n+2} reelle nicht-positive Zahlen sind und $a_{n+1} + a_{n+2} = -1$ ist, während alle übrigen a_ν verschwinden, wird der Kettenbruch wesentlich divergent, bzw. im Falle $n = 1$, $a_1(1 + a_3) \neq 0$ außerwesentlich divergent.

§ 2.

Speziell für Kettenbrüche mit lauter reellen nicht-positiven Elementen läßt sich der Satz noch etwas erweitern.

Sei also:

$$a_\nu = -r_\nu, \quad r_\nu \geq 0 \quad (\nu = 2, 3, \ldots);$$

sei ferner $r_\nu < 1$ $(\nu > 2)$ und $\sum_2^\infty \nu \, r_\nu$ konvergent.

Ich setze zur Abkürzung:

$$\pi_0 = 1,\ \pi_1 = 1,\ \pi_2 = 1 - r_2,\ \pi_\nu = (1 - r_2)(1 - r_3)\ldots(1 - r_\nu),$$
$$\lim_{\nu=\infty} \pi_\nu = \pi;$$

$$\sigma_1 = r_2,\ \sigma_2 = r_2 + r_3,\ \sigma_\nu = \sum_1^\nu{}^{\lambda} r_{\lambda+1}\pi_{\lambda-1},\ \lim_{\nu=\infty} \sigma_\nu = \sigma;$$

sei $\sigma \leqq 1$, offenbar ist $\sigma_{\nu-1} \leqq \sigma_\nu \leqq 1$.

Nun beweise ich die Ungleichungen:

$$\left.\begin{aligned} 1 - \sigma_{\nu-1} \leqq B_\nu \leqq \pi_\nu \\ B_\nu < B_{\nu-1} \end{aligned}\right\} (\nu = 2, 3, \ldots); \qquad (6)$$

dieselben sind offenbar für $\nu = 2, 3$ gültig. Ich nehme an, daß sie für $\nu = \varkappa - 1$, $\varkappa (\varkappa \geqq 3)$ bereits bewiesen sind, und zeige, daß sie dann auch für $\nu = \varkappa + 1$ gelten. In der Tat, aus der Rekursionsformel:

$$B_{\varkappa+1} = B_\varkappa - r_{\varkappa+1} B_{\varkappa-1}$$

folgt zunächst die Ungleichung:

$$B_{\varkappa+1} \leqq B_\varkappa,$$

ferner nach Voraussetzung:

$$B_{\varkappa+1} \leqq B_\varkappa(1 - r_{\varkappa+1}) \leqq \pi_\varkappa(1 - r_{\varkappa+1}) = \pi_{\varkappa+1},$$

und schließlich:

$$B_{\varkappa+1} \geqq 1 - \sigma_{\varkappa-1} - r_{\varkappa+1}\pi_{\varkappa-1} = 1 - \sigma_\varkappa;$$

somit sind die Ungleichungen (6) allgemein gültig. Hieraus folgt:

$$1 - \sigma \leqq B \leqq \pi,$$

ist also $\sigma < 1$, so konvergiert der Kettenbruch.

Sei $\sigma = 1$, dann betrachte ich zwei Fälle gesondert:

1. Es gibt unter den $r_\nu (\nu \geqq 2)$ wenigstens eines mit dem Werte 1; sei nun n der kleinste Index, für den $r_n = 1$ ist.

Für $n = 2$ hat man:

$$r_2 = 1,\ \sigma_1 = \sigma_2 = 1;$$

hieraus folgt: $r_3 = 0$; jetzt ist: $B_2 = 0$, $B_3 = 0$, ..., daher divergiert der Kettenbruch.

Für $n > 3$ hat man:

$$r = 1, \quad \sigma_n = \sum_1^n{}^{\lambda} r_{\lambda+1}\pi_{\lambda-1} = \sigma_{n+1} = \cdots = \sigma;$$

daher ist (wegen $\pi_{\lambda-1} \geqq \pi_\lambda$):

$$\sigma > \sum_1^n{}^{\lambda} r_{\lambda+1}\pi_\lambda = \pi_{n-1} + r_{n-1}\pi_{n-2} + \cdots + r_2\pi_1 \qquad (7)$$

und Gleichheit gilt dann und nur dann, wenn die Gleichungen bestehen:

$$r_{\lambda+1}\pi_\lambda = r_{\lambda+1}\pi_{\lambda-1} \quad (\lambda = 1, 2, \ldots, n). \qquad (8)$$

Für $\lambda = 1$ ist diese Gleichung eine Identität: für $\lambda = 2, \ldots, n$ ist für das Bestehen der Gleichung (8) notwendig und hinreichend, daß mindestens eine der beiden Zahlen: r_λ, $r_{\lambda+1}$ verschwindet. Daher kann Gleichung (8) durch die folgende ersetzt werden:

$$r_\lambda r_{\lambda+1} = 0 \quad (\lambda = 2, \ldots, n). \qquad (9)$$

Jetzt beweise ich noch die Identität:

$$\pi_\nu + \sum_1^{\nu-1}{}^{\lambda} r_{\lambda+1}\pi_\lambda = \pi_\nu + r_\nu\pi_{\nu-1} + \cdots + r_2\pi_1 = D_\nu = 1 \ (\nu > 2): \qquad (10)$$

bezeichnet man nämlich diese Summe vorübergehend mit D_ν, so ist offenbar

$$D_\nu = (1 - r_\nu)\pi_{\nu-1} + r_\nu\pi_{\nu-1} + \cdots + r_2\pi_1 = D_{\nu-1},$$

und da $D_2 = 1$ ist, so gilt Gleichung (10) allgemein.

Somit lautet Ungleichung (7):

$$\sigma > 1,$$

und Gleichheit gilt hier allemal dann, wenn die Bedingung (9) erfüllt ist; insbesondere muß — da $r_n = 1$ ist — $r_{n-1} = 0$ und $r_{n+1} = 0$ sein.

Jetzt ist:

$$B_{n-1} = B_{n-2}, \quad B_n = 0, \quad B_{n+1} = 0, \ldots,$$

also divergiert der Kettenbruch.

2. Sei durchwegs $r_\nu < 1$ $(\nu > 2)$, dann ist sicherlich:

$$\pi_\nu > 0, \ \pi > 0.$$

Ist nun $B = \pi$, so konvergiert der Kettenbruch.

Sei $B < \pi$; dann gibt es ein kleinstes $\varkappa$ $(\varkappa > 2$, da $B_2 = \pi_2)$ derart, daß (vgl. Ungl. (6)):

$$B_\nu < \pi_\nu \text{ für } \nu = \varkappa + 1, \ \varkappa + 2, \ \ldots \tag{11}$$

und

$$B_\varkappa = \pi_\varkappa \tag{12}$$

ist. Nun folgt aus Gl. (2), wenn man darin $\nu = \varkappa + 1$ setzt:

$$B = B_{\varkappa+1} - \sum_1^\infty{}^\lambda r_{\varkappa+\lambda+1} B_{\varkappa+\lambda-1},$$

daher ist (vgl. Ungl. 6):

$$B \geqq 1 - \sigma_\varkappa - \sum_{\varkappa+1}^\infty{}^\lambda r_{\lambda+1} \pi_{\lambda-1} = 1 - \sigma,$$

und mit Anwendung der Ungleichung (11) und Gleichung (12) folgt, daß hier das Gleichheitszeichen dann und nur dann gilt, wenn:

$$B_{\varkappa+1} = 1 - \sigma_\varkappa \text{ und } r_\nu = 0 \text{ für } \nu = \varkappa + 3, \ \varkappa + 4, \ \ldots$$

ist. Damit nun $B_{\varkappa+1} = 1 - \sigma_\varkappa$ sei, muß auch $B_\varkappa = 1 - \sigma_{\varkappa-1}$ sein (vgl. S. 285), und die Hinzuziehung der Gleichung (12) liefert die Bedingung:

$$\sigma_{\varkappa-1} + \pi_\varkappa = 1.$$

Nun ist, mit Beachtung der Ungleichung $\pi_{\nu-1} > \pi_\nu$:

$$\sigma_{\varkappa-1} + \pi_\varkappa = r_2\pi_0 + \cdots + r_\varkappa \pi_{\varkappa-2} + \pi_\varkappa \geqq r_2\pi_1 + \cdots + r_\varkappa \pi_{\varkappa-1} + \pi_\varkappa,$$

also mit Rücksicht auf (10):

$$\sigma_{\varkappa-1} + \pi_\varkappa \geqq 1,$$

und Gleichheit gilt hier dann und nur dann, wenn $\varkappa = 2$ oder

$$r_2 r_3 = 0, \ \ldots, \ r_{\varkappa-1} r_\varkappa = 0 \qquad (\varkappa \geqq 3) \tag{13}$$

ist (vgl. die Formeln (7)—(9)). Unter diesen Bedingungen ist offenbar auch

$$\sigma_{\lambda-1} + \pi_\lambda = 1 \text{ für } \lambda = 2, \ \ldots, \ \varkappa,$$

da jetzt keine neuen Bedingungen zu den Gleichungen (13) hinzutreten müssen. Und nun ist tatsächlich:

$$B_2 = 1 - \sigma_1 = \pi_2, \quad B_3 = 1 - \sigma_2 = \pi_3, \quad \ldots$$
$$B_\varkappa = 1 - \sigma_{\varkappa-2} - r_\varkappa \pi_{\varkappa-2} = 1 - \sigma_{\varkappa-1} = \pi_\varkappa,$$
$$B_{\varkappa+1} = 1 - \sigma_{\varkappa-1} - r_{\varkappa+1} \pi_{\varkappa-1} = 1 - \sigma_\varkappa.$$

Für $\varkappa = 2$ fällt Bedingung (13) fort.

Damit nun $B = 0$ sei, muß nach dem vorhergehenden

$$1 - \sigma_\varkappa - r_{\varkappa+2} \pi_\varkappa = 0$$

sein. Dies heißt aber:

$$\pi_\varkappa - r_{\varkappa+1} \pi_{\varkappa-1} - r_{\varkappa+2} \pi_\varkappa = 0$$

oder, nach Division mit $\pi_{\varkappa-1}$ (es ist $\pi_{\varkappa-1} > 0$):

$$1 - r_\varkappa - r_{\varkappa+1} - r_{\varkappa+2} + r_\varkappa r_{\varkappa+2} = 0.$$

Diese Resultate fasse ich in folgenden Satz zusammen:

Satz 2. Der Kettenbruch mit reellen nicht-positiven Elementen $\left[\frac{-r_\nu}{1}\right]_1^\infty$ konvergiert, wenn $\sum_2^\infty r_\nu$ konvergiert, und

$$r_2 + r_3 + \sum_3^\infty r_{\lambda+1}(1 - r_2)(1 - r_3)\ldots(1 - r_{\lambda-1}) \leqq 1, \qquad r_\nu \leqq 1 \quad (\nu \geqq 2) \tag{14}$$

ist; nur in den folgenden drei Fällen:

1. $r_2 = 1, \; r_3 = 0$
2. $r_\lambda r_{\lambda+1} = 0$ für $\lambda = 2, \ldots, n, \; r_n = 1 \quad (n \geqq 3)$
3. $r_{\lambda-1} r_\lambda = 0$ für $\lambda = 3, \ldots, n; \; r_\lambda = 0$ für $\lambda \geqq n+3,$
   $r_n + r_{n+1} + r_{n+2} - r_n r_{n+2} = 1$ $\Big\}$ $(n > 2)$

divergiert der Kettenbruch.

Für $n = 2$ fällt im Falle 3) die Bedingung $r_{\lambda-1} r_\lambda = 0$ fort.

Da $\pi_{\lambda-1} \leqq 1 - r_2$ $(\lambda > 3)$ ist, so ist offenbar Ungl. (14) sicher erfüllt, wenn

$$r_2 + r_3 + (1 - r_2) \sum_3^\infty r_{\lambda+1} \leqq 1, \; r_\nu \leqq 1 \; (\nu \geqq 2) \text{ ist.}$$

Anwendung des Prinzips der gekoppelten Schwingungen auf einige physiologische Probleme.

Von **Otto Frank.**

Vorgetragen am 5. Juni und 3. Juli 1915.

Seit einer Reihe von Jahren bin ich mit der Feststellung der Leistungen der Registrierapparate beschäftigt, die zu physiologischen Zwecken gebraucht werden. Es läßt sich der Nachweis erbringen, daß die wesentlichen Eigenschaften der Registrierinstrumente die Empfindlichkeit des Instrumentes, die Schwingungszahl und Dämpfung des bewegten Systems sind. Meine Untersuchungen habe ich mit der Theorie der Manometer begonnen. Die Leistungen des einfachsten Manometers, das aus einer mit Flüssigkeit gefüllten Röhre besteht, deren eines Ende mit dem Teil des Kreislaufssystems in Verbindung steht, an dem der Druck bestimmt werden soll, während das andere Ende durch eine elastische „massenlose" Membran oder Platte verschlossen ist, habe ich hinreichend exakt darstellen können. Ich habe jedoch auch verwickeltere Systeme mit Methoden zu behandeln versucht, von denen ich ohne weiteres gesehen und erklärt habe, daß sie nicht als streng gelten können. Dazu gehören Systeme wie das Hebelmanometer, bei dem ein nicht mehr als massenlos zu behandelnder Hebel auf die Membran aufgesetzt ist, ferner Systeme, bei denen Luftsäulen wesentliche Bestandteile sind oder solche, bei denen die Massen der Membran und Platten nicht mehr zu vernachlässigen sind. Die Vereinfachungen, die ich zur Behandlung vorgenommen habe, waren wohl sämtlich so getroffen, daß die wesentlichen Eigenschaften der Systeme nicht berührt

wurden. Aber ich hatte immer den Wunsch nach einer strengeren und weniger gekünstelten Behandlung. Dabei hatte ich den Eindruck, daß das Prinzip der gekoppelten Schwingungen, das für gewisse elektrische Erscheinungen mit so großem Vorteil angewandt wird, auch bei den erwähnten mechanischen Systemen die Lösung der Aufgaben ermöglichen könnte. Dieser Meinung habe ich vor längerer Zeit brieflich Ausdruck verliehen. Vor zwei Jahren konnte ich eine Differentialgleichung zur Behandlung der gekoppelten Schwingungen mechanischer Systeme aufstellen. Erst nachträglich habe ich gesehen, daß die gekoppelten mechanischen Systeme schon eine eingehende Behandlung erfahren haben. Ich habe solche Probleme in der „Technischen Mechanik" von A. Föppl aufgefunden, auch A. Sommerfeld hat ein reizvolles derartiges Problem behandelt.[1]) M. Wien hat in eingehender Weise die gekoppelten Schwingungen analysiert.[2]) Einen außerordentlichen Nutzen gewährte mir das Studium von Rayleighs „Theory of Sound." Es gelingt an der Hand der Theorie dieser Bewegungsformen eine überraschend große Reihe von Problemen, die für die Physiologie oder physiologische Technik von Bedeutung sind, entweder vollständig oder doch hinreichend genau lösen. Die Systeme besitzen dabei eine beschränkte Anzahl von Freiheitsgraden oder auch unendlich viele Freiheitsgrade, von denen aber fast durchweg nur einige wenige berücksichtigt zu werden brauchen. In vielen Fällen genügt die Berechnung der Grundschwingung des Systems, wie ich schon bei meinen früheren Untersuchungen erkannt habe. Ihre Ermittelung ist aber nur auf der Basis der allgemeinen Theorie sicher durchzuführen.

1. Das Hebelmembran-Manometer. Es läßt sich als ein System von 2 Freiheitsgraden auffassen ebenso wie das unter Nr. 2 behandelte Federmanometer. Ich gebe zunächst die allgemeinen Gleichungen eines derartigen Systems.

[1]) Festschrift A. Wüllner, Teubner 1905, S. 162.
[2]) Wiedemanns Ann., Bd. 61, S. 151.

Die Bewegungsgleichungen lauten:[1])

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x} + Ax + Cy &= 0 \\ m_2 \ddot{y} + By + Cx &= 0. \end{aligned} \qquad 1)$$

Für die Schwingungszahl n (in 2π Sekunden, in der Enc. d. math. Wiss. durchgehends als „Frequenz" bezeichnet), ergibt sich:

$$n^2 = \frac{1}{2 m_1 m_2} \{ m_1 B + m_2 A \pm \sqrt{(m_1 B + m_2 A)^2 - 4 m_1 m_2 A B (1 - C^2 / A B)} \}. \qquad 2)$$

Den Ausdruck $\frac{C^2}{AB}$ bezeichne ich als Koppelungsfaktor K.[2]) Er ist eine reine Zahl, immer positiv und in den wirklichen Fällen niemals größer als 1. Zur Umwandlung des obigen Ausdruckes führe ich die Schwingungszahlen der einzelnen Teile des Systems ein, die sich ergeben, wenn jeweilig die Massen m_2 und m_1 Null werden. Es ergibt sich:

$$\begin{aligned} n_A^2 &= \frac{A}{m_1} (1 - K) \\ n_B^2 &= \frac{B}{m_2} (1 - K). \end{aligned} \qquad 3)$$

Die Schwingungszahlen des gekoppelten Systems werden dann zu:

$$n^2 = \frac{1}{2(1-K)} \{ n_A^2 + n_B^2 \pm \sqrt{(n_A^2 + n_B^2) - 4 n_A^2 n_B^2 (1 - K)} \}. \qquad 4)$$

Ist K klein bzw. die Koppelung lose, dann erhält man:

$$n^2 = n_A^2 \text{ bzw. } = n_B^2. \qquad 5)$$

[1]) In diesen Gleichungen tritt bei „Beschleunigungs-Koppelung" an Stelle von Cy und Cx oder neben diesen je ein Glied $m_3 \ddot{y}$ bzw. $m_3 \ddot{x}$ auf. Vgl. Rayleigh, S. 160.

[2]) Von M. Wien sind andere Größen als Koppelungskoeffizienten bezeichnet worden. Für die von mir hier diskutierten Probleme eignet sich die Größe K sehr gut, um die dynamische Verbindung der beiden Massen zu charakterisieren.

Ist K nahe 1, d. h. die Koppelung enge, so erhält man unter den entsprechenden Vernachlässigungen:

$$\text{für die langsamere Schwingung } n_1^2 = \frac{n_A^2 n_B^2}{n_A^2 + n_B^2}$$
$$\text{„ „ raschere „ } n_2^2 = \frac{n_A^2 + n_B^2}{1 - K} \qquad 6)$$

Wird noch $n_A = n_B$, wie dies bei dem rationell gebauten Hebel- oder Federmanometer der Fall ist, so ergibt sich:

$$n_1 = n_A \sqrt{\frac{1}{2}} \qquad n_2 = n_A \sqrt{\frac{2}{1 - K}} \qquad 7)$$

oder

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{2}{\sqrt{1 - K}}.$$

Das für die Untersuchung des Kreislaufes gebrauchte Hebelmanometer besteht aus einer mit Flüssigkeit gefüllten Röhre, deren eines Ende mit dem Kreislaufsystem in offener Verbindung steht, während das andere durch eine Membran (gewöhnlich aus Gummi) abgeschlossen ist. Auf der Membran ist eine starre Platte zentrisch befestigt. Die Exkursion der Platte wird durch einen materiellen Schreibhebel vergrößert aufgeschrieben. Die Massen, die hier in Betracht kommen, sind erstens die auf den Verbindungspunkt des Hebels mit der Platte „reduzierte" Masse des Hebels.[1]) Ferner die „wirksame" Masse M' der Flüssigkeit. Zur Berechnung der Trägheitskräfte der Flüssigkeit habe ich den Ausdruck $M' = \varrho \frac{L}{Q}$ eingeführt. Er hat sich vollkommen bewährt. Ich komme auf seine Bedeutung unten zurück. Die Verrückungen des Systems bestehen in der linearen Verrückung f der Platte, mit welcher der Hebel gelenkig verbunden ist bzw. des Verbindungspunktes von

[1]) Der Begriff der reduzierten Masse wurde von mir in meiner ersten Abhandlung über die Theorie der Registrierinstrumente eingeführt. Ihre Einführung wurde bemängelt; sie ist aber in der technischen Mechanik z. B. bei der einfachen Kreisbewegung einer Scheibe und in der allgemeinen Mechanik bei Gelenksystemen durchaus bewährt.

Membran und Hebel (s. oben). Ferner in der Verrückung der Flüssigkeit. Ich bestimme sie nach dem Durchgang des Volumens V durch den Querschnitt der Röhre. (Fluß oder Strom.) Die Elastizitätskoeffizienten des Systems bestehen einmal in der durch die Einheit der Verrückung f geweckten elastischen Kraft η. Weiter in der durch die Einheit der Volumverrückung erzeugten elastischen Kraft E'. Auf diesen Grundzügen läßt sich zunächst die Statik des Systems aufbauen. E' ist bei einer gleichmäßig mit der Spannung S gespannten Membran von dem Radius r und dem Verhältnis δ des Plattenradius zum Radius der Membran $= \frac{8S}{r^4(1-\delta^4)\pi}$. η bemißt sich zu $\frac{2\pi S}{l\left(\frac{1}{\delta}\right)}$. Außerdem kommt für die Gleichgewichtsverhältnisse noch die Empfindlichkeit, d. h. die Verrückung f für die Druckeinheit in Betracht. Sie ist $= \gamma = \frac{r^2(1-\delta^2)}{4S}$ (vgl. Physiologische Methodik, herausgegeben von Tigerstedt, Abschnitt Haemodynamik, S. 14—16).

Läßt man die Kraft P und den Druck p auf das System einwirken, so ergeben sich folgende Verrückungen:

$$V = P\gamma + pE'$$

$$f = \frac{P}{\eta} + p\gamma.$$

Daraus berechnen sich umgekehrt für die Verrückungen V und f der entwickelte Druck p bzw. die Kraft P

$$p = \frac{VE' - f\eta\gamma E'}{1 - \eta\gamma^2 E'} \quad \text{(Masse } m_1 = M\text{)}$$

$$P = \frac{f\eta - V\eta\gamma E'}{1 - \eta\gamma^2 E'} \quad \text{(Masse } m_2 = m\text{)}$$

$\frac{E'}{1-\eta\gamma^2 E'}$ entspricht also dem Koeffizienten A der obigen Gleichung, $\frac{\eta}{1-\eta\gamma^2 E'}$ dem Koeffizienten B und $\frac{\eta\gamma E'}{1-\eta\gamma^2 E'}$ dem

Koeffizienten C. Der Koppelungsfaktor K ist also $= \eta \gamma^2 E'$. Bei meinen früheren angenäherten Berechnungen der Schwingungszahlen des Hebelmanometers habe ich schon die Bedeutung dieser Größe erkannt, ich hatte sie mit $\frac{1}{\varphi}$ bezeichnet (vgl. Tab. der „Hämodynamik", S. 18). Die 2 Schwingungszahlen des Systems berechnen sich nach den obigen Formeln 2 und 4. Wenn die Platte groß wird, dann ist K groß und die Koppelung enge. Ich habe früher darauf hingewiesen, daß es wünschenswert ist, die Platte möglichst groß zu wählen bzw. das Membranmanometer einem Kolbenmanometer möglichst ähnlich zu gestalten. Dann liegt der Fall, der in den obigen Gleichungen 6 beschrieben ist, vor. Und die langsamste Schwingung kann nach der Formel $T = \sqrt{T_A^2 + T_B^2}$ berechnet werden. Nach dieser Formel habe ich früher das Hebelmanometer in Anlehnung an die Verhältnisse des Kolbenmanometers berechnet. Die Differenz gegenüber der Formel 2 und 4 ist geringfügig bei den in der Physiologie gebrauchten, rationell gebauten Manometern. Da für diese, wie ich nachgewiesen habe, die beiden Schwingungszahlen der Einzelsysteme A und B gleich gemacht werden müssen, so kann man den äußersten Fehler, der überhaupt bei der Anwendung meiner früheren Formel begangen wird, berechnen, wenn δ bzw. $K = 0$ ist. Er beträgt dann 40 %.

2. Das Federmanometer. Bei dem von Fick vorgeschlagenen Federmanometer drückt gegen die Platte eine Feder. Die elastische Kraft der Feder kann durch Torsion oder durch Biegung erzeugt sein. Bei der Konstruktion dieses wichtigen Instrumentes verfolgt man, wie ich früher auseinandergesetzt habe, die Absicht, die wechselnde und unvollkommene Elastizität des Kautschuks der Membranmanometer durch die Elastizität von Metallen zu ersetzen. Die Membran soll eigentlich nur zur Abdichtung dienen. In der Grenze wird dann das Federmanometer mit dem aus technischen Gründen unverwendbaren Kolbenmanometer identisch. Um ziffermäßig den

Anteil der Gummielastizität an den Leistungen des Federmanometers festzustellen, habe ich das Verhältnis n[1]) eingeführt, das sich aus folgender Gleichung ergibt:

$$\eta = n \cdot E,$$

wobei E der Elastizitätskoeffizient der Feder ist. Die mit η, γ, E', φ bezeichneten Größen sind die gleichen Funktionen der Spannung und der Radien wie bei dem Membranmanometer. Die den obigen Gleichungen analogen lauten hier:

$$V = (P - Ef)\gamma + p/E'$$

$$f = \frac{P - Ef}{\eta} + p \cdot \gamma.$$

Daraus ergibt sich weiter:

$$p = \frac{VE' - f\eta\gamma E'}{1 - \eta\gamma^2 E'}$$

$$P = \frac{f(\eta + E - \eta\gamma^2 E' E) - V\eta\gamma E'}{1 - \eta\gamma^2 E'}.$$

Der Koeffizient A ist also $= \frac{E'\varphi}{\varphi - 1}$. Der Koeffizient $B = \frac{E(n\varphi + \varphi - 1)}{\varphi - 1}$ und $C = \frac{1}{\gamma(\varphi - 1)}$. Der Koppelungsfaktor wird zu $\frac{n}{n\varphi + \varphi - 1}$. In meinen früheren Abhandlungen habe ich ihn mit $1/\Phi$ bezeichnet. Bei dem von Petter und mir nach den Ergebnissen der Theorie konstruierten Manometer betragen die Konstanten:

$$n = 0.1, \quad \delta = 0.8, \text{ also } \frac{1}{\varphi} = 0.9835, \quad \frac{1}{\Phi} = K = 0.8424,$$

$$2r = 0.89, \quad m = 36.7, \quad M' = 100.$$

$$E = 5.7 \times 10^6, \quad \eta = 0.57 \times 10^6.$$

Der Koppelungsfaktor beläuft sich auf 0.8424. Die kürzere Schwingung ist bei der Russschreibung, für die das Instrument

[1]) Selbstverständlich nicht mit der Schwingungszahl zu verwechseln.

selbstverständlich bestimmt ist, nicht zu ermitteln. Sie wurde in einem besonderen Versuch, bei dem ein Gewicht statt der reduzierten Masse des Hebels mit der Platte verbunden wurde, durch optische Registrierung festgestellt. Es sind Schwingungen, die auf die Hauptschwingung aufgesetzt erscheinen. Die aus den obigen Daten nach der Formel 7 berechnete Schwingungszahl, wonach sie 5.04 fachgrößer als diejenige der Hauptschwingung sein sollte, stimmt sehr gut mit der beobachteten überein. Es ist also nicht mehr der geringste Zweifel, daß sowohl das Hebelmanometer als das Federmanometer in der angegebenen Weise als System von 2 Freiheitsgraden endgültig beschrieben ist. Der Fehler, den ich nach meiner früheren Formel, vgl. S. 294, für die Berechnung der Hauptschwingung begangen habe, beträgt nur 2%.

3. Luftsäule in einer zylindrischen Röhre, die an beiden Seiten mit einer Membran verschlossen ist. Die Membran wird zunächst als masselos behandelt. Die Lösung dieses Problems ist wertvoll für die Behandlung der unter den nächsten Nummern angeführten Aufgaben. Vor allem für die Theorie der Lufttransmission. Bei der Analyse dieser und ähnlicher Probleme habe ich mich mit großem Vorteil einer Beziehung bedient, die ich in der folgenden Formel kurz ausdrücke: $m_r \xi_r n^2 =$ Elastische Kraft. m_r ist die Masse eines Teils oder Elementes des Systems, ξ_r seine maximale Verrückung und die elastische Kraft ist die an dem Systemteil wirkende, sinngemäß gebildete Komponente der elastischen Kraft. Sie muß umgekehrte Richtung wie die Verrückung haben. Es ist eine Gleichung, die sich auf Grund des d'Alembertschen Prinzips ergibt für solche Bewegungen des Systems, bei denen vermöge der Anfangsbedingungen die sämtlichen Teile des Systems in der gleichen Periode n schwingen (vgl. Rayleigh I, S. 107). Sie ist vollständig analog der für die Behandlung von Luftwellen allgemein benutzten Gleichung. Sind die einzelnen Teile des Systems diskrete Massen, so resultiert für n eine algebrasche Gleichung von dem Grad, der durch die Anzahl der Massen bzw. der Freiheitsgrade bestimmt wird. Besteht das ganze

System oder ein Teil desselben aus einem kontinuierlichen Medium, dann werden die Massen zu den Massenelementen und die elastische Kraft für das Massenelement ergibt sich aus einer Differentialbeziehung. Das allgemeine Integral der Differentialgleichung führt zu unendlich vielen Lösungen für n, d. h. zu unendlich vielen Freiheitsgraden. (Unsere Formel konnte selbstverständlich auch für die Lösung der Probleme 1 und 2 verwendet werden.) Wendet man das Prinzip auf die zylindrische Luftsäule von der Länge L und dem Querschnitt Q an, so erhält man folgende Differentialgleichung:

$$\frac{d^2\xi}{dx^2} = -\frac{\varrho n^2 \xi}{\varkappa}.$$

In ihr ist $\varkappa$ der Volumelastizitätskoeffizient der Luft, der je nach dem es sich um isotherme oder adiabatische Zustandsänderung handelt, verschieden ist. ϱ ist die Dichte der Luft. Die Lösung der Gleichung ist:

$$\xi = A \sin(kx + \varepsilon), \qquad k = n\sqrt{\frac{\varrho}{\varkappa}}$$

worin k die Größe $\frac{2\pi}{\lambda}$ („Wellenzahl") bedeutet, wie sie in vielen Formeln der Luftschwingungen und Wellen vorkommt. Die Elastizität der Membranen drücke ich wieder durch dieselben Koeffizienten (E') aus, wie sie in den vorhergehenden Problemen benutzt worden sind. Ich bezeichne sie mit e_1 und e_2. Darnach lauten die Grenzbedingungen:

$$e_1 \xi_0 Q = \varkappa \left(\frac{d\xi}{dx}\right)_0 \text{ und } e_2 \xi_L Q = -\varkappa \left(\frac{d\xi}{dx}\right)_L$$

oder:

$$e_1 Q \sin\varepsilon = \varkappa \cos\varepsilon \text{ und } e_2 Q \sin(kL + \varepsilon) = -\varkappa \cos(kL + \varepsilon)$$

$$\text{bzw. } \tan\varepsilon = \frac{k\varkappa}{Qe_1} \text{ und } \tan(kL + \varepsilon) = -\frac{k\varkappa}{Qe_2}.$$

Mit diesen zwei Gleichungen zur Bestimmung von k und ε ist die Lösung des Problems gegeben. Interessant ist die Behandlung der Grenzfälle.

a) Wenn die eine Membran durch eine starre Wand ersetzt wird, d. h. $e_2 = \infty$ wird, erhalten wir:

$$\tan \varepsilon = \frac{k\varkappa}{Qe_1} \text{ und } kL + \varepsilon = \pi \text{ bzw. } m\pi.$$

b) Wenn noch e_1 unendlich wird, resultiert

$$\varepsilon = 0 \text{ und } kL = m\pi \text{ oder } \lambda = 2L/m.$$

Die bekannte Lösung für die Schwingungen einer Luftsäule in einer an beiden Enden geschlossenen zylindrischen Röhre.

c) Wenn statt dessen $e_1 =$ Null wird, d. h. die Röhre am Anfang offen ist, ergibt sich:

$$\varepsilon = \frac{\pi}{2} \text{ und } kL = \pi(2m-1)/2 \text{ oder } \lambda = 4L/(2m-1).$$

Die Lösung für eine gedeckte Pfeife.

d) Wenn e_1 Null ist und am anderen Ende die Röhre durch eine Membran verschlossen ist, ergibt sich:

$$\varepsilon = \frac{\pi}{2} \text{ und } \tan\left(kL + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{-k\varkappa}{Qe_2}$$

oder nach einigen Umformungen:

$$\tan kL = \frac{Qe_2}{k\varkappa}.$$

Wird auch diese Membran durch eine starre Platte ersetzt, so resultiert wieder die Gleichung

$$kL = \pi(2m-1)/2 \text{ (vgl. } c)$$

e) Wird e_1 und $e_2 =$ Null, d. h. die Röhre an beiden Seiten offen, so wird $kL = (m-1)\pi$ und für den Grundton $k = 0$, $n = 0$ und $\lambda = \infty$. Dies Resultat widerspricht scheinbar der üblichen Behauptung, daß die Wellenlänge des tiefsten Tones für eine an beiden Seiten offenen Pfeife $= 2L$ ist. Aber dieser Ton ist zweifellos der erste Oberton des Systems. Der Grundton muß tiefer sein als der Ton, den eine an beiden Seiten geschlossene Röhre gibt. Denn bei dem letzteren Fall steht das System unter einem Zwang und seine Schwingungen müssen

nach Rayleigh zwischen den Schwingungen der an beiden Seiten offenen Röhre liegen. Der ideale Grenzfall bietet ein gewisses systematisches Interesse. Es erscheint aber auch nicht ausgeschlossen, den beliebig tiefen Grundton experimentell darzustellen.

Sehr bemerkenswerte Resultate ergeben sich, wenn die Flüssigkeit inkompressibel oder schwach kompressibel gemacht wird.

f) Es resultiert dann, wenn $\varkappa = \infty$ ist:

$\lim \tan \varepsilon = \infty$ und $\lim \tan (kL + \varepsilon) = -\infty$: ε und $kL + \varepsilon$ werden nahezu $+ \frac{\pi}{2}$.

Setzt man $\varepsilon = \frac{\pi}{2} - \gamma$ und $kL + \varepsilon = \frac{\pi}{2} + \delta$, worin γ und δ unendlich kleine Winkel sind, so erhält man schließlich:

$$kL = \gamma + \delta = \frac{Q}{k\varkappa}(e_1 + e_2) \text{ bzw. } n^2 = \frac{(e_1 + e_2)Q}{L \cdot \varrho}.$$

d. h. die Formel für die Schwingung einer Flüssigkeitssäule, die von den Membranen mit den Koeffizienten e_1 und e_2 begrenzt ist. Es ist der Ausdruck für die Schwingungszahl des von mir als optisches Manometer bezeichneten Systems, vgl. S. 289. In ihm ist die wirksame Masse $M' = \frac{L\varrho}{Q}$ enthalten.

g) Kann die Flüssigkeit nicht mehr als absolut inkompressibel betrachtet werden, so muß von der Reihenentwicklung für arc tang auch das zweite Glied $-\frac{x^3}{3}$ berücksichtigt werden. Es ergibt sich dann

$$kL = \gamma + \delta = \frac{Qe_1}{k\varkappa} - \frac{1}{3}\left(\frac{Qe_1}{k\varkappa}\right)^3 + \frac{Qe_2}{k\varkappa} - \frac{1}{3}\left(\frac{Qe_2}{k\varkappa}\right)^3.$$

Berücksichtigt man, daß k^2 annähernd $= \frac{Q}{L\varkappa}(e_1 + e_2)$ ist (vgl. oben unter f und S. 297), so erhält man

$$n^2 = \frac{(e_1 + e_2)Q}{L\varrho}\left\{1 - \frac{LQ(e_1^3 + e_2^3)}{3\varkappa(e_1 + e_2)^2}\right\}.$$

Ich habe früher gezeigt, daß bei den leistungsfähigsten Manometern die Kompressibilität der Flüssigkeit nicht mehr vernachlässigt werden kann. Wir erhalten in dem Summanden in der Klammer einen Korrekturfaktor für die Berechnung der Schwingungszahl bei solchen Systemen.

Instruktiv werden diese analytischen Beziehungen, wenn man sie graphisch darstellt. Die Länge der Luft bzw. Flüssigkeitssäule stellen dann verschieden lange Teile einer Sinuskurve dar. In dem Fall 3b reicht die Länge von 0 bis π, in dem Fall 3c von 0 bis $\frac{\pi}{2}$. Am interessantesten erweisen sich die Fälle 3e, f, g. Bei ihnen umgreift die Länge der Säule nur das Maximum der Sinuskurve. Dadurch wird es erreicht, daß die Verrückungen für die ganze Länge der Flüssigkeitssäule bzw. der Luftsäule gleich groß werden.

Zu genau denselben Ergebnissen führt die Analyse der Schwingungen einer schweren Saite, die an masselosen Federn aufgehängt ist.

4. Angenäherte Berechnung des Problems 3. Ehe ich die volle Lösung des Problems 3 erreicht hatte, habe ich eine angenäherte versucht. Man kann aus Rayleigh Art. 89 ersehen, daß angenäherte Berechnungen, wenn sie sinngemäß durchgeführt werden, überraschend genau ausfallen. Sie ermöglichen zunächst nur die Berechnung der tiefsten Schwingung des Systems, aber auch die höheren lassen sich durch besondere Kunstgriffe ermitteln. Das Prinzip der angenäherten Berechnung, die ich im folgenden nur ganz kurz angebe, beruht darauf, den Teilen des Systems eine willkürlich aber vernünftig ausgewählte Verrückung zu erteilen, dann die maximale potentielle Energie und die maximale kinetische Energie der Schwingung zu berechnen. Ich lasse die Elementarscheiben der Luftsäule Verrückungen durchmachen in Form einer parabolischen Funktion der Strecke x. Sie resultiert bei der Saite, wenn sie gleichmäßig belastet wird, und bei der senkrecht gestellten Luftsäule, wenn sie sich unter ihrem eigenen Gewicht verrückt. Die Rechnungen sind ein-

fach, aber ziemlich langwierig und führen für die maximale während einer Schwingung entwickelte potentielle Energie zu dem Ausdruck

$$V = \frac{e_1 e_2 L^2 Q^2 + (4 e_1 \varkappa + 4 e_2 \varkappa) L Q + 12 \varkappa^2}{24 (e_1 e_2 L Q + e_1 \varkappa + e_2 \varkappa) \varkappa}.$$

Für die maximale kinetische Energie ergibt sich:

$$T = \frac{\varrho n^2 L}{240 Q \varkappa^2 (e_1 e_2 L Q + e_1 \varkappa + e_2 \varkappa)^2} \{e_1^2 e_2^2 L^4 Q^4 + 7 e_1 e_2 (e_1 + e_2) L^3 Q^3 \varkappa + [16 (e_1 + e_2)^2 + 10 e_1 e_2] L^2 Q^2 \varkappa^2 + 80 (e_1 + e_2) L Q \varkappa^3 + 120 \varkappa^4\}.$$

Die Schwingungszahl ergibt sich, wenn man diese beiden Energien gleich setzt. Es ist bemerkenswert, daß für die Grenzfälle Werte resultieren, die den nach 3 berechneten außerordentlich nahe kommen. So erhalten wir für den Fall 3 b statt des Wertes $2L : 1.99\,L$ und bei dem Fall 3 c statt $4L : 3.97\,L$. Wenn die Flüssigkeit inkompressibel bzw. schwach kompressibel ist, dann erhält man dieselben Beziehungen wie bei der genauen Formel. Damit ist gezeigt, daß die angenäherte Berechnung derartiger Probleme zu außerordentlich genauen Werten führen kann. Sie wird in vielen Fällen, wenn die exakte Berechnung nicht durchgeführt werden kann oder zu umständlich ist, zum Ziel führen.

5. Optisches Manometer (vgl. S. 299) mit angeschlossener Luftsäule. Eine interessante Anwendung der Lösung des Problems 3 oder 4 kann auf folgendes System gemacht werden. Es besteht aus einer Röhre vom Querschnitt Q, in der sich hinter einer Membran zunächst eine Flüssigkeitssäule von der wirksamen Masse M' und darauf eine Luftsäule von der Länge L befindet. Die Membran 1 fehlt. Damit wird $\varepsilon = \frac{\pi}{2}$, vgl. 3 c. Der Hauptansatz lautet:

$$V n^2 M' = V e + k \varkappa A \cos\left(\frac{\pi}{2} + k L\right).$$

Hierin ist V die Volumverrückung der Flüssigkeit. Die weitere Entwicklung ist folgende:

$$Vn^2M' = Ve - Ak\varkappa \sin kL$$

bzw. $Ak\varkappa \sin kL = V(e - n^2M') = QA\cos kL(e - n^2M')$.

Lösung:

$$\tan kL = \frac{Q(e - n^2M')}{k\varkappa} = \frac{Q(e - k^2c^2M')}{k\varkappa},$$

worin c die Schallgeschwindigkeit (adiabatisch oder isotherm) ist. Man hat das Gefühl, daß dieses System sich wie ein System von 2 Freiheitsgraden verhalten kann. Ich habe auf Grund dieser Annahme früher eine angenäherte Berechnung durchgeführt, die ich hier nicht aufnehme, da sie keine prinzipielle Bedeutung hat. Es hat sich gezeigt, daß sie hinreichend genau ist. Ich habe sie nämlich an einem Experiment erprobt, das die Anregung zu diesen Berechnungen gegeben. Die Richtigkeit der oben angegebenen Gleichung (vgl. 3 f) für die Schwingung einer Flüssigkeitssäule unter der Einwirkung einer Membran war angezweifelt worden. Von den Kritikern ausgeführte Versuche sollten dartun, daß ein solches System überhaupt keiner Regel folgt und die Schwingungen ganz unregelmäßigen schwebungsartigen Charakter tragen. Ich hatte den Verdacht, daß bei diesen Experimenten Luftsäulen angehängt waren, und habe experimentell gezeigt, daß dann ähnliche Schwingungen auftreten, wie sie der Flüssigkeitssäule allein zugeschrieben waren. Läßt man die Luftsäule weg, so resultieren schwebungsfreie Schwingungen mit bestimmtem Dekrement, deren Zahl bis auf 1—2 % nach der obigen Formel (3 f) zu berechnen ist. Fügt man die Luftsäule an, so können Schwebungen auftreten, die sich nach der angenäherten Formel gut berechnen lassen. Das System stellt sich damit in der Hauptsache als ein lose gekoppeltes von 2 Freiheitsgraden dar. Dies muß sich nun auch aus der genauen Formel ergeben. In der Tat stimmt die Berechnung nach der genauen Formel noch um 3—4 % besser mit der Beobachtung und zwar in der korrekten Richtung (vgl. Rayleigh, Art. 88, 89). Stellt

man die obige Beziehung graphisch dar, so sieht man, daß die Funktion der rechten Seite die Tangentenfunktion der linken Seite schneidet oder schneiden kann und zwar zweimal von $0 - \pi$. Von da ab jeweils nur hinter $(2m+1)\pi$ usw. Die zwei ersten Schnittpunkte repräsentieren die Schwingungen, die miteinander zu Schwebungen interferieren können, wenn sie nahe genug beieinander liegen.

Um den Koppelungsfaktor zu ermitteln, setze ich den Wert für die Schwingungszahl des Systems, das aus der Membran mit Flüssigkeitssäule ohne Luftsäule besteht, in die Gleichung ein. Der Wert ist $n_A^2 = \frac{e}{M'}$. Es ergibt sich dann

$$\tan k L = \frac{Q\left(e - \frac{n^2}{n_A^2} \cdot e\right)}{k \varkappa}$$

oder:

$$\frac{n^2}{n_A^2} = 1 - \frac{\varkappa k \tan k L}{Q e},$$

d. h. die Schwingungszahl des gekoppelten Systems kann um so näher an diejenige des Einzelsystems rücken, je kleiner der Wert $\frac{\varkappa}{Qe}$ ist, bzw. je größer der Querschnitt der Röhre und der Elastizitätskoeffizient E' der Membran ist. Eine ganz ähnliche Beziehung erhält man, wenn man die Schwingungen eines Systems von 2 Freiheitsgraden berechnet, das besteht aus 2 diskreten Massen, die an 2 Federn hintereinander aufgehängt sind. Dann wird der Koppelungsfaktor $= \frac{1}{\frac{e_1}{e_2} + 1}$ und um so kleiner, je größer das Verhältnis des Elastizitätskoeffizienten der dem Aufhängepunkt benachbarten Feder e_1 zu dem zweiten Elastizitätskoeffizienten e_2 ist.

6. Lufttransmission. Bei dem Verfahren der Lufttransmission, das zu Registrierzwecken wesentlich zuerst von Marey angewandt worden ist, wird eine Bewegung von einer Stelle durch eine Luftsäule auf eine Membran übertragen. Das voll-

ständige System besteht aus der Röhre, die mit Luft erfüllt und an beiden Enden durch Membranen verschlossen ist. Wird die eine Membran deformiert, so deformiert sich die zweite durch die entsprechenden Druckschwankungen. Die Deformation der zweiten Membran wird durch einen mit ihr verbundenen Hebel aufgeschrieben. Im kompliziertesten Fall wird die Deformation der ersten Membran ebenfalls durch einen mit ihr verbundenen Hebel hervorgerufen. Die Schwingungen dieses komplizierten Systems werden durch Kombination der Analyse des Falles 1 und des Falles 3 berechnet. Wenn L und Q Länge und Querschnitt der Luftsäule, ferner m_1 und m_2 die reduzierten Massen der beiden Hebel, f_1 und f_2 die Exkursionen der beiden Platten sind, schreiben sich die Bedingungen wie folgt an: ($e = E$, η, γ, φ haben dieselbe Bedeutung wie bei 1).

a) Anfang des Systems: $x = 0$

$$f = \frac{n^2 m f}{\eta} + \gamma \varkappa k \cos \varepsilon$$

$$V = Q \sin \varepsilon = n^2 m f \gamma + \varkappa k \cos \varepsilon / e.$$

Daraus

$$f = \frac{e Q \sin \varepsilon - \varkappa k \cos \varepsilon}{e n^2 m \gamma} = \frac{e Q \sin \varepsilon - \varkappa k \cos \varepsilon}{e \gamma \eta} + \gamma \varkappa k \cos \varepsilon;$$

weiterhin

$$\tan \varepsilon = \frac{-e \eta \gamma^2 k \varkappa n^2 m + n^2 m k \varkappa - k \varkappa \eta}{e Q n^2 m - e \eta Q} = \frac{k \varkappa}{e Q} \left\{ 1 - \frac{n^2 m}{\varphi (n^2 m - \eta)} \right\}.$$

b) Ende des Systems $x = L$

$$f = \frac{n^2 m f}{\eta} - \gamma \varkappa k \cos (k L + \varepsilon)$$

$$V = Q \sin (k L + \varepsilon) = n^2 m f \gamma - \varkappa k \cos (k L + \varepsilon) / e.$$

Daraus:

$$\tan (k L + \varepsilon) = - \frac{k \varkappa}{e Q} \left\{ 1 - \frac{n^2 m}{\varphi (n^2 m - \eta)} \right\}.$$

Die Größen m, $e = E'$, η, γ, q sind für den Anfang des Systems ($x = 0$) und das Ende ($x = 0$ und das Ende ($x = L$) verschieden.

Eine Diskussion der Schlußergebnisse unterlasse ich. Es empfiehlt sich, zunächst das Experiment anzusetzen, um aus den Möglichkeiten, welche die Theorie liefert, diejenigen heraus zu wählen, die praktisch von Bedeutung sind. Ähnlich wie die Lufttransmission verhält sich die elektrische Transmission.

7. Schwingungen von Luftsäulen in ungleich weiten Röhren. x sei die Achse der Röhre, ihr Querschnitt ein Kreis vom Radius $y = f(x)$. Ich nehme vorerst an, daß sich die Bewegung nur senkrecht zu dem Querschnitt der Röhre vollzieht. Die Volumänderung, welche die Querscheibe $y^2 \pi dx$ durch die maximalen Verrückungen ihrer Grundflächen um ξ und $\xi + \frac{d\xi}{dx}$ im Verhältnis zu dem Volumen der Querscheibe im ungestörten Zustand erfährt, berechnet sich zu

$$\frac{dV}{V} = \frac{2\xi}{y} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{d\xi}{dx}.$$ [1]

Darnach ist der Druck in dieser Scheibe

$$p = -\varkappa \left(\frac{2\xi}{y} \frac{dy}{dx} + \frac{d\xi}{dx} \right).$$

Der Differentialquotient $\frac{dp}{dx}$ bestimmt die durch die Druckdifferenz auf beiden Seiten der Scheibe wirkende bewegende Kraft. Die Differentialgleichung zur Ermittelung der Schwingungszahl lautet demgemäß:

$$\xi n^2 \varrho = -\varkappa \left[\frac{2 d\xi}{y dx} \frac{dy}{dx} - \frac{2\xi}{y^2} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + \frac{2\xi}{y} \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{d^2\xi}{dx^2} \right].$$

Die Formel kann experimentell an einigen einfach gestalteten Röhren verifiziert werden. Ihre Tragweite kann aber auch bis zu einem gewissen Grade theoretisch voraus bestimmt

[1] $V = Q \cdot h$; $\delta V = \frac{\partial V}{\partial h} \delta h + \frac{\partial V}{\partial Q} \delta Q = y^2 \pi \frac{d\xi}{dx} dx + 2y\pi \frac{dy}{dx} \xi dx.$

werden. Zu dem Zweck wende ich sie auf Probleme an, deren Lösung bekannt ist. Zunächst auf eine gleichmäßig konische Röhre. Die Spitze des Konus liege im Anfang der x Achse, μ sei die Tangente des halben Öffnungswinkels des Konus. y ist dann $= \mu \cdot x$. Die Differentialgleichung wird zu

$$\xi n^2 \varrho = -\varkappa \left(\frac{2}{x} \frac{d\xi}{dx} - \frac{2\xi}{x^2} + \frac{d^2\xi}{dx^2} \right).$$

Ich habe das Integral dieser Differentialgleichung nicht direkt ermittelt. Aber ich war der Überzeugung, daß es schon auf einem anderen bewährten Weg gefunden werden kann. Es ist bekanntlich gelungen, die Schwingung einer Luftmasse zu berechnen, die in einer Hohlkugel enthalten ist. Die Lösung dieses Problems basiert auf der Lösung der Gleichung:

$$\nabla^2 \varphi + k^2 \varphi = 0.$$

φ ist das Geschwindigkeitspotential, von dem die Bewegung ableitbar sein soll, die also wirbelfrei ist. Die Lösung dieser Gleichung unter den bestehenden Grenzbedingungen wird auf Kugelfunktionen zurückgeführt. Sie ergibt sich in folgender Form: $\varphi = \Sigma R_n r^n S^n$[1]) (ohne den Zeitfaktor). In diesem Ausdruck ist S_n eine Kugelflächenfunktion $n$ter Ordnung und R_n eine Funktion von r allein. Wenn $n = 0$ ist, resultiert $\varphi = A \frac{\sin kr}{kr}$ mit der Grenzbedingung $\left(\frac{d\varphi}{dr} \right)_{r=a} = 0$, welche die Schwingungszahl definiert. Dieser Fall entspricht einer Bewegung in radiärer Richtung. Man kann aus der Kugel beliebige Konuse durch feste Wände abgrenzen, ohne daß die Schwingungszahlen sich ändern. Es muß also die Gleichung auch die Lösung für die konische Luftsäule sein. Aus dem Geschwindigkeitspotential läßt sich die Verrückung in der r Richtung durch Differentiation nach r ermitteln, was ergibt:

$$\xi = kA \left(\frac{\cos kr}{kr} - \frac{\sin kr}{k^2 r^2} \right).$$

[1]) Vgl. z. B. Lamb, Hydrodynamics, S. 478 oder Rayleigh, tom. II, S. 260 ff.

Dies müßte die Lösung der obigen Differentialgleichung sein, wenn unsere Überlegungen stichhaltig sind. In der Tat trifft dies zu, wie man durch Einsetzen von ξ in die Differentialgleichung ersehen kann (x statt r gesetzt).[1])

Wenn man jetzt die allgemeine Differentialgleichung (S. 305) auf einen weiteren Fall, dessen Lösung bekannt ist, auszubeuten versucht, nämlich für eine Schwingung der in einer Kugel enthaltenen Luftsäule, die von einem Pol der Kugel zu dem entgegengesetzten erfolgt, so erkennt man sofort die Grenzen ihrer Anwendungsmöglichkeit. Wandelt man die Differentialgleichung für diesen Fall der kugelförmigen Begrenzung um, und vergleicht sie mit dem nach der obigen Gleichung für $n = 1$ erhaltenen partikulären Integral, so erkennt man ohne weiteres, daß es nicht die Lösung der Differentialgleichung sein kann. Eine nähere Überlegung zeigt, daß meine Differentialgleichung zu einer größeren Schwingungszahl führen muß. Denn bei ihrer Aufstellung wurde angenommen, daß die Bewegung streng in einer Richtung parallel zur x Achse erfolgt. Dadurch, daß wir diese Annahme gemacht haben, haben wir dem System einen Zwang auferlegt und die danach berechnete Schwingungszahl muß größer als die wirkliche sein (vgl. Rayl., Art. 88). Dies kann man für den Fall des Konus auch ohne Kenntnis dieses Rayleighschen Satzes sehen. Konus und Kugelsektor stimmen ja nur für kleine Öffnungswinkel überein. Für große Öffnungswinkel ist ein Konus, welcher dieselbe Höhe

[1]) Mehr unmittelbar gelangt man zu der Lösung der Differentialgleichung, wenn man bedenkt, daß für einen engen Konus r statt x gesetzt werden kann. Führt man noch statt ξ das Geschwindigkeitspotential $\xi = \frac{d\varphi}{dr}$ in die Differentialgleichung ein, so wird sie zu

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d\varphi}{dr}\right) + k^2\frac{d\varphi}{dr} = 0.$$

Wenn φ wie hier nur von r abhängt, so wird $\nabla^2\varphi = \frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d\varphi}{dr}$ und die Differentialgleichung geht in $\nabla^2\varphi + k^2\varphi = 0$ über, deren nur von r abhängige Lösung ist: $\varphi = A\frac{\sin kr}{kr}$.

wie der Radius des Sektor hat, an Inhalt größer als der Sektor. Es muß also seine Schwingungszahl kleiner sein als diejenige des Kugelsektors. Unsere Beziehung ergibt aber die gleiche Schwingungszahl wie die für den Kugelsektor streng, d. h. für eine wirbelfreie Bewegung abgeleitete Formel, also für den Konus eine zu hohe Schwingungszahl. Sie ist nur richtig für einen Konus von kleiner Öffnung. Man darf so wohl schließen, daß die Differentialgleichung für enge Röhren richtig ist, streng wahrscheinlich für Stromröhren. Eine spätere Diskussion wird dies zu erweisen haben. Aber ich habe gar keinen Zweifel, daß der Geltungsbereich der Differentialgleichung sehr weit reicht. Früher angestellte Experimente erweisen dies.[1]) Wir haben in eine Röhre von mehrmals plötzlich wechselndem Querschnitt Flüssigkeit unter dem Einfluß einer Membran schwingen lassen. Die Schwingungszahl wurde so berechnet, als ob die Flüssigkeitsbewegung parallel den Wänden erfolgte, die Stromlinien an den Querschnittsveränderungen also unterbrochen wurden. Die Abweichung der Beobachtung von der Rechnung war, trotzdem der Fall extrem gelagert war, äußerst gering.

Es fragt sich nun, ob es nicht möglich ist, diese Abweichung irgendwie zu schätzen. Hier scheint mir zunächst ein Weg gegeben durch Benutzung einer Analogie, die Rayleigh für ähnliche Verhältnisse mit der elektrischen Strömung gezogen hat.[2]) Bei der Berechnung der Schwingungszahlen von Luftresonatoren, die aus einem weiten Gefäß mit angeschlossenem Hals bestehen, kommt Rayleigh zu der Überlegung, daß für die Schwingungszahl erstens maßgebend ist die Kompressibilität der in den Bauch des Resonators eingeschlossenen im wesentlichen ruhenden Luft, zweitens die Trägheit der in dem Hals als inkompressibel behandelten Luftsäule. Die Trägheit wird bestimmt durch den zweiten Differentialquotienten des Flusses nach der Zeit und durch eine von der

[1]) Brömser-Frank-Petter, Zeitschr. f. Biol., 59, S. 232.
[2]) Rayleigh, sound II, S. 181.

Konfiguration des Halses abhängige Konstante. Sie wird gleich $\frac{Q}{L}$, wenn der Hals gleich weit zylindrisch ist und die Stromfäden in den Zylinderwänden parallel verliefen. Sie ist vergleichbar der Leitfähigkeit eines leitenden Körpers für den elektrischen Strom. (Die Leitfähigkeit entspricht vollständig dem reciproken Wert der von mir eingeführten wirksamen Masse $\frac{\varrho L}{Q}$. Vgl. oben unter 1).

Da sowohl der elektrische Strom als die Verrückungen sich von einem Potential ableiten, kann man aber auch umgekehrt die Trägheit aus der Leitfähigkeit eines mit der Röhre gleich geformten leitenden Körpers entnehmen. Dies ließe sich durchführen für ähnliche Systeme, wie sie bei den obigen Experimenten benutzt worden sind, bei denen die Flüssigkeit inkompressibel ist, also auch für Manometer mit optischer Registrierung. Viel schwieriger liegen jedoch die Verhältnisse für die kompressible Luft. Hier müßte die Erhöhung der lebendigen Kraft gegenüber der angenommenen, aus der gradlinigen Bewegung sich ergebenden, für möglichst kleine Abschnitte der Röhre einzeln angesetzt werden. Es wird kaum möglich sein, die Leitfähigkeit so festzustellen, daß die einzelnen Stücke einer Röhre sich richtig aneinander schließen würden. Dagegen dürfte eine andere Methode zum Ziel führen, die auf dem obigen Experiment beruht. Man verschließt die Röhrenstücke an beiden Seiten mit Membranen, nachdem sie mit einer inkompressiblen Flüssigkeit gefüllt worden sind, und stellt nun die Abweichung der beobachteten Schwingungszahl von der unter der Voraussetzung einer gradlinigen Bewegung berechneten fest.

8. Schwingungen der Luft in den Vokalräumen. Von wesentlich größerer Bedeutung für physiologische Zwecke ist die Berechnung der Schwingungen einer Luftsäule, die in einem unregelmäßigen Hohlraum enthalten ist, für dessen Begrenzung sich keine hinreichend einfache Gleichung aufstellen läßt. Sie kommt nämlich in Betracht für die Theorie der

Erzeugung der Vokale durch die „Vokalräume“. Sie bestehen aus Kehlkopf, Rachen und Mundhöhle. Man muß hier den Leitfaden der Theorie haben, um sich in dem Gewirre der empirischen Daten zurecht zu finden. Für die Berechnung der Hauptschwingung der Luftmasse, die in einem derartigen Raum schwingt, schlage ich ein Verfahren vor, das in ganz ähnlicher Weise zuerst für die Berechnung der Schwingungen der Saite angewandt worden ist, nämlich eine sinngemäße Unterteilung des Raumes in einzelne Kammern. Wie rasch man durch eine derartige Berechnung zu genügend genauen Resultaten kommt, zeigen die folgenden Beispiele.

a) Angenäherte Berechnung der Schwingungsdauer einer Luftsäule, die sich in einer beiderseits geschlossenen zylindrischen Röhre befindet. Ebenso wie bei der Saite werden entsprechende Massen der Luft an den Wänden als stillstehend angenommen. Teilt man die Röhre in 2 Kammern ein, verlegt die halbe Masse in die Mitte und an den beiden Enden je ein Viertel der Masse, die sich an diesen Stellen nicht bewegen, während nur die mittlere Masse unter dem Einfluß der Elastizität der beiden Kammern schwingt, so erhält man bei dieser ganz rohen Anordnung eine Wellenlänge $\lambda = 2.22\, L$, also eine um 11 % zu geringe Schwingungszahl. Teilt man die Röhre in 3 Kammern ein, beläßt je ein Sechstel der Masse an den Enden, während zwischen den Kammern je ein Drittel der Masse unter dem Einfluß der Elastizität der Kammern schwingt, so erhält man $\lambda = 2.09\, L$, welcher Wert nur mehr um 4.5 % von dem richtigen abweicht.

b) Führt man dasselbe aus für die diametralen Schwingungen einer Luftmasse, die sich in einer Hohlkugel befindet, vgl. S. 307, so erhält man für eine 3 Kammer-Einteilung, wobei das System 2 Freiheitsgrade besitzt, den Wert $\frac{\lambda}{2a} = 1.566$ statt 1.509. Teilt man die Kugel in 4 Kammern ein, so resultiert $\frac{\lambda}{2a} = 1.521$ statt 1.509, also nur mehr eine Differenz von $^2/_3$ %. Im letzten Fall besitzt das vereinfachte System 3 Freiheits-

grade und die Behandlung führt zu einer algebraischen Gleichung dritten Grades. Geht man noch weiter mit der Kammer-Einteilung, so macht die Auflösung dieser Gleichung Schwierigkeiten. Mir erscheint es daher in diesem Fall vorteilhafter, durch die Einteilung der Säule in 2 oder 3 Kammern einen angenäherten Wert für die Schwingungszahl auszurechnen und dann bei der Elimination der Verrückungen aus den verschiedenen Gleichungen diesen Wert plus einer kleinen Größe δ einzusetzen und alle höheren Potenzen als die erst von δ fortzulassen, so daß schließlich eine lineäre Gleichung für δ resultiert.

Das Beispiel des kugelförmigen Raumes trügt insofern etwas, als es den Anschein erweckt, daß man sich bei der Einteilung in eine wachsende Zahl von Kammern dem richtigen Wert sukzessive nähern würde. Es ist aber kein Zweifel, daß dann wegen der ungenauen Annahme über die Bewegung der wahre Wert unterschritten wird. Denn wir haben hier dieselbe Grundannahme gemacht wie bei der Aufstellung der obigen Differentialgleichung (vgl. S. 305) und müssen schließlich eine zu hohe Schwingungszahl erhalten. Wir lassen ja ebenfalls die Bewegung nur in einer Richtung erfolgen, haben das System also einem Zwang unterworfen. Wenn man hierfür noch eine Korrektur einführen will, so muß man das obige Verfahren der experimentellen Bestimmung der wirksamen Masse für die einzelnen Kammern anwenden (vgl. S. 309).

Die gesamte Energie ist immer größer als diejenige der wirbelfreien Bewegung, was ebenfalls aus dem Satz von der Einwirkung eines Zwanges oder aus dem Kelvinschen Theorem folgt.[1]) Die wirkliche Schwingungszahl ist also immer kleiner als die unter Annahme der Existenz eines Geschwindigkeitspotentials berechnete.

9. Schwingung einer kreisförmigen Membran. Angenäherte Berechnung. Die Gleichungen für die Berechnung der Membranschwingungen sind bekannt (vgl. Rayl., I, S. 306—351). Sie führen auf Besselsche Funktionen. Da

[1]) Vgl. z. B. Lamb, Hydrodynamics, S. 45, und Rayleigh, Art. 79.

die angenäherte Berechnung der Hauptschwingung eines Systems von Bedeutung sein kann, gebe ich hier eine solche für die Membran nach einem von Rayleigh, I, Art. 89 für die Saite vorgeschlagenen Weg. Ich nehme an, daß die einzelnen Punkte der Membran eine Schwingung nach der folgenden Beziehung ausführen.

$$y = \cos nt \left\{ 1 - \left(\frac{r}{a}\right)^m \right\}.$$

Die potentielle Energie berechnet sich daraus wie folgt:

$$V = \tfrac{1}{2} S \int_0^a 2r\pi \left(\frac{dy}{dr}\right)^2 dr = \frac{\pi m S}{2} \cos^2 nt.$$

Die kinetische Energie des Systems ergibt sich aus folgender Formel:

$$T = \tfrac{1}{2} \int_0^a 2r\pi d \cdot \varrho \dot{y}^2 dr = n^2 \pi d \cdot \varrho \left(\frac{m^2 a^2}{2(m+1)(m+2)} \right) \sin^2 nt.$$

Durch Gleichsetzung der beiden maximalen Werte von V und T erhält man für die Schwingungszahl

$$n^2 = \frac{(m+1)(m+2)S}{d \cdot \varrho m a^2}.$$

Da die Schwingungszahl bei einer derartigen Berechnung nach Rayleigh immer zu hoch wird, hat man m so zu wählen, daß sie ein Minimum wird, was für $m = \sqrt{2}$ eintritt. Dann wird die Schwingungszahl zu $\frac{2.414}{a} \sqrt{\frac{S}{d \cdot \varrho}}$. Sie ist nur 0.4 % höher als die korrekte (vgl. Rayleigh, S. 345). Aber auch wenn man $m = 1$ oder 2 entsprechend der Schnittkurve als gebrochene Grade oder Parabel gewählt hätte, würde die Differenz immer gering, nämlich 1.8 % sein.

10. Kreisförmige Membran mit einer starren Scheibe in der Mitte. Radius der Membran $= a$, Radius der Scheibe $= b$, Maße der Scheibe: M. Die Differentialgleichung lautet:

$$\frac{d^2\zeta}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\zeta}{dr} = -\frac{n^2 d\cdot\varrho}{S}\cdot\zeta.$$

(Nur symmetrische Schwingungen berücksichtigt.)

Setzt man

$$\frac{n^2 d\cdot\varrho}{S} = \mu^2,$$

so ist die Lösung

$$\zeta = AJ_0(\mu r) + BK_0(\mu r).$$

J_0 und K_0 sind Besselsche Funktionen erster und zweiter Art. Die Grenzbedingungen ergeben sich aus folgender Gleichung:

$$0 = AJ_0(\mu a) + BK_0(\mu a).$$

Ferner aus der Bewegungs-Gleichung für die Scheibe selbst. Sie lautet, wenn α der Neigungswinkel der meridionalen Schnittkurve am Rand der Scheibe ist. $2b\pi S\sin\alpha = Mn^2\varrho$. Setzt man statt $\sin\alpha$ die Tangente, so erhält man folgende Gleichung:

$$A\mu J_0'(\mu b) + B\mu K_0'(\mu b) = -\frac{Mn^2}{2b\pi S}[AJ_0(\mu b) + BK_0(\mu b)].$$

Hieraus:

$$J_1(\mu b) - \frac{J_0(\mu a)\,K_1(\mu b)}{K_0(\mu a)} = \frac{M\mu}{2bd\varrho\pi}\left[J_0(\mu b) - \frac{J_0(\mu a)}{K_0(\mu a)}K_0(\mu b)\right].$$

Das durch die vorhergehende Gleichung charakterisierte System wird bei manchen akustischen Registrierungen verwendet, so zum Beispiel bei dem von Hermann vorgeschlagenen. In ähnlicher Weise läßt sich auch das Weißsche Phonoskop behandeln oder die von Garten vorgeschlagene Methode, bei der eine Seifenmembran mit eingestreutem Eisenspähnchen der wesentliche Teil ist.

11. Kreisförmige in der Mitte mit einer starren Scheibe von der Masse M verkittete Platte. Die Phonographen- und Grammophonkapseln sind nach diesem Prinzip gebaut. Wenn die in folgendem skizzierte Berechnung zu große Schwierigkeiten bieten sollte, dürfte für unseren Zweck auch eine angenäherte genügen, die etwa nach dem Schema von

Nr. 9 durchgeführt werden müßte. Die Platte ist am Rand eingeklemmt. Ebenso ist die Scheibe starr mit dem mittleren Teil der Platte verbunden.

$$\frac{d^2\zeta}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\zeta}{dr} = \mp \mu^2 \zeta.$$

$$\mu^4 = n^2 \times \frac{12\varrho(m^2-1)}{h^2 E m^2}$$

(m = Koeffizient der Querkontraktion, vgl. Föppl, Festigkeitslehre, 1. Aufl., S. 8, h = Dicke der Platte).

Lösung:

$$\zeta = AJ_0(\mu r) + BJ_0(i\mu r) + CK_0(\mu r) + DK_0(i\mu r)$$

Grenzbedingungen $\zeta = 0$ für $r = a$

$$\frac{d\zeta}{dr} = 0 \quad , \quad r = a$$

$$\frac{d\zeta}{dr} = 0 \quad , \quad r = b$$

$$\frac{h^3 E m^2}{12(m^2-1)} \frac{d}{dr}\left(\frac{d^2\zeta}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\zeta}{dr}\right) \times 2b\pi = n^2 M_\varrho \text{ für } r = b.$$

12. Einige weitere den unter 9—11 Angeführten verwandte Systeme. Von Ph. Brömser und mir ist zu akustischen Registrierzwecken eine Kapsel vorgeschlagen worden, in der eine Glimmerplatte eingespannt ist. Auf der Glimmerplatte ist unmittelbar ein kleines Spiegelchen exzentrisch aufgeklebt und zwar an der Stelle, wo der Neigungswinkel der Meridiankurve der elastischen Fläche bei der Einwirkung eines hydrostatischen Druckes am größten wird. Das ist in einer Entfernung von $\frac{1}{\sqrt{3}}$ des Radius der Platte der Fall. Ich habe eine angenäherte Berechnung dieses Systems in ähnlicher Weise, wie vorher angegeben wurde, durchgeführt und hierzu die von Föppl, Sitzungsberichte der Akademie München 1912, S. 155 angegebenen Gleichungen verwendet. Die Berechnung ist jedoch so kompliziert, daß ich sie vor-

läufig nicht veröffentliche. Erst nach der Ausführung einiger Experimente wird sich der beste Weg für die Lösung des Problems ergeben.

Dasselbe gilt für ein System, das aus einer Membran oder Platte, deren Masse nicht mehr vernachlässigt werden kann, und einer an sie angeschlossenen Luftsäule besteht. Seine Berechnung ist wertvoll für die Theorie des Mikrophons und ähnlicher Apparate mit angeschlossenem Schalltrichter. Auch hier hat mir eine angenäherte Berechnung eine ziemlich gute Übereinstimmung mit den Beobachtungen ergeben.

Ganz ähnlich wird sich ferner das schallleitende System berechnen lassen, das aus Trommelfell, Gehörknöchelchen, den Membranen in dem ovalen und dem runden Fenster mit der Flüssigkeit in der Schnecke besteht. Es dürfte sich auf ein System mit 3 Freiheitsgraden zurückführen lassen, während bis jetzt noch nicht der geringste Versuch gemacht worden ist, es überhaupt von dieser Seite zu behandeln.

Auch die Schwingungen einer Membran von der Gestalt eines Kreissegments, die mit einer segmentförmigen Scheibe verbunden ist, werden sich mit genügender Annäherung bestimmen lassen, nachdem durch Sommerfeld die Deformation festgestellt worden ist, die sie unter Einwirkung eines hydrostatischen Druckes erfährt.

Über Dirichlets Teilerproblem.

Von **Edmund Landau** in Göttingen.

Vorgelegt von A. Pringsheim in der Sitzung am 3. Juli 1915.

Es bezeichne $T(n)$ die Anzahl der Teiler von n und $\tau(x)$ für $x > 0$ die summatorische Funktion[1])

$$\tau(x) = \sum_{n=1}^{[x]} T(n) = \sum_{m=1}^{[x]} \left[\frac{x}{m} \right] = \sum_{lm \leq x} 1.$$

Dirichlet[2]) hatte

$$\tau(x) = x \log x + (2C - 1)x + O(\sqrt{x}) \tag{1}$$

bewiesen, wo C die Eulersche Konstante bezeichnet. Erst Voronoï[3]) gelang es, (1) zu verbessern und zwar zu

$$\tau(x) = x \log x + (2C - 1)x + O(\sqrt[3]{x} \log x). \tag{2}$$

Der Voronoïsche Beweis von (2) ist etwa 40 Seiten lang; ein späterer, ganz verschiedener Beweis von mir[4]), der gleichfalls

---

1) $\sum_{n=1}^{0}$ bedeute 0.

2) *Über die Bestimmung der mittleren Werthe in der Zahlentheorie* [Abhandlungen der Königlichen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Jahrgang 1849, mathematische Abhandlungen, S. 69—83; Werke, Bd. II, S. 49—66], S. 73 bzw. 56.

3) *Sur un problème du calcul des fonctions asymptotiques* [Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. CXXVI (1903), S. 241—282].

4) *Die Bedeutung der Pfeiffer'schen Methode für die analytische Zahlentheorie* [Sitzungsberichte der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien, mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse, Bd. CXXI (1912), Abt. IIa, S. 2195—2332], S. 2206—2246.

im Gebiete der reellen Analysis verläuft, erfordert weniger Rechnungen, ist aber auch noch recht lang. Meine Behandlung[1]) dieses Problems (im Rahmen einer allgemeineren Untersuchung) mit den Mitteln der komplexen Funktionentheorie hatte zwar auch über (1) hinausgeführt, aber nur bis fast zu (2), nämlich bis zu $O(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon})$ bei jedem $\varepsilon > 0$. Dafür hatte diese komplexe Methode das über

$$\tau_k(x) = \sum_{n=1}^{[x]} T_k(n) = \sum_{m_1 \dots m_k \leq x} 1 \qquad (k \geq 2)$$

(Anzahl der Zerlegungen aller Zahlen bis x in k Faktoren) Bekannte zu

$$(3) \qquad \tau_k(x) = x(b_{k-1}\log^{k-1} x + \cdots + b_0) + O\left(x^{\frac{k-1}{k+1}+\varepsilon}\right)$$

bei jedem $\varepsilon > 0$ verschärft; die b sind hierbei Konstanten.

Nunmehr ist es mir gelungen, durch Verschmelzung meiner beiden alten Methoden und einige weitere Kunstgriffe einen Weg mit komplexer Funktionentheorie zu finden, der den ersten kurzen Beweis von (2) ergibt und für $k > 2$ das bisher beste Ergebnis (3) zu

$$(4) \qquad \tau_k(x) = x(b_{k-1}\log^{k-1} x + \cdots + b_0) + O\left(x^{\frac{k-1}{k+1}}\log^{k-1} x\right)$$

verschärft.

Und zwar werde ich nicht $k = 2$ besonders, sondern gleichzeitig alle $k > 2$ behandeln; das Ziel (4) enthält ja (2) genau als Spezialfall $k = 2$. Es sei also k eine feste ganze Zahl > 2.

Hilfssatz 1: *Es gibt eine absolute Konstante c derart, daß für alle $U > 0$ und alle $v \gtrless 0$*

$$\left|\int_0^U u^{-\frac{1}{2}} e^{iu(\log u - v)} du\right| < c$$

ist.

[1]) *Über die Anzahl der Gitterpunkte in gewissen Bereichen* [Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, mathematisch-physikalische Klasse, Jahrg. 1912, S. 687–771]. S. 695–720.

Beweis: Steht z. B., übrigens mit $c = 18\sqrt{2}$, auf S. 381 meiner Besprechung der Wigertschen Abhandlung *Sur quelques fonctions arithmétiques* [Acta Mathematica, Bd. XXXVII (1914), S. 113—140] in den Göttingischen gelehrten Anzeigen, Jahrgang 1915, S. 377—414. Die Behauptung deckt sich offenbar[1]) mit dem (ebenda nicht vorgekommenen) Spezialfall $\gamma = -\frac{1}{2}$ des Hilfssatzes 10 meiner oben erwähnten Abhandlung aus den Göttinger Nachrichten und ist fast wörtlich wie dieser Hilfssatz beweisbar; was eben l. c. geschah.

Hilfssatz 2: *Es sei $w > 0$. Dann sind die $k+1$ Integrale*

$$\int_{\frac{3}{4}-\infty i}^{\frac{3}{4}+\infty i} \frac{1}{\left(\cos\frac{s\pi}{2}\,\Gamma(s)\right)^k} \frac{w^{s+k}}{s(s+1)\cdots(s+k)}\,ds = H(w),$$

$$\int_{\frac{3}{4}-\infty i}^{\frac{3}{4}+\infty i} \frac{1}{\left(\cos\frac{s\pi}{2}\,\Gamma(s)\right)^k} \frac{w^{s+k-1}}{s(s+1)\cdots(s+k-1)}\,ds = H_1(w),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\int_{\frac{3}{4}-\infty i}^{\frac{3}{4}+\infty i} \frac{1}{\left(\cos\frac{s\pi}{2}\,\Gamma(s)\right)^k} \frac{w^s}{s}\,ds = H_k(w)$$

absolut konvergent und zwar bei festem $w_0 > 0$ für $0 < w < w_0$ gleichmäßig, so daß jede dieser Funktionen stetig und (von der zweiten an) die Ableitung der vorangehenden ist. Also insbesondere: $H(w)$ ist k Male differentiierbar, und zwar ist:

$$H^{(k)}(w) = H_k(w).$$

Beweis: s werde $= \sigma + ti$ gesetzt. Bekanntlich[2]) ist bei festem σ und sogar (was beim Beweise von Hilfssatz 3 ange-

[1]) Abgesehen von dem unerheblichen Werte der absoluten Konstanten c.

[2]) Vgl. z. B. S. 702 meiner Arbeit aus den Göttinger Nachrichten.

wendet werden wird) bei festem σ_1 und festem $\sigma_2 > \sigma_1$ für $\sigma_1 \leqq \sigma \leqq \sigma_2$ gleichmäßig

$$\frac{1}{\cos\frac{s\pi}{2}\,\Gamma(s)} = O(t^{\frac{1}{2}-\sigma}). \tag{5}$$

also für $\sigma = \frac{3}{4}$

$$\left(\frac{1}{\cos\frac{s\pi}{2}\,\Gamma(s)}\right)^k \frac{1}{s} = O\left(t^{-\frac{k}{4}-1}\right) = O(t^{-\frac{3}{2}}).$$

folglich jeder der $k+1$ Integranden absolut genommen gleich $w^{\frac{3}{4}+\nu}$ $(\nu = k, \ldots, 1, 0)$ mal einer Funktion von t, welche $O(t^{-\frac{3}{2}})$ ist.

Hilfssatz 3: *Es ist für $w > 0$ erstens*

$$H(w) = \int_{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2k}-\infty i}^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2k}+\infty i} \left(\frac{1}{\cos\frac{s\pi}{2}\,\Gamma(s)}\right)^k \frac{w^{s+k}}{s(s+1)\cdots(s+k)}\,ds \tag{6}$$

$$= \int_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2k}-\infty i}^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2k}+\infty i} \frac{1}{\left(\cos\frac{s\pi}{2}\,\Gamma(s)\right)^k} \frac{w^{s+k}}{s(s+1)\cdots(s+k)}\,ds \tag{7}$$

und zweitens

$$H^{(k)}(w) = \int_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2k}-\infty i}^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2k}+\infty i} \frac{1}{\left(\cos\frac{s\pi}{2}\,\Gamma(s)\right)^k} \frac{w^s}{s}\,ds. \tag{8}$$

Beweis: 1) Ich wende den Cauchyschen Satz auf den Integranden in (6), (7) und das Rechteck mit den Ecken

$$\frac{3}{4} - Ui,\quad \frac{3}{4} + Ti,\quad -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2k} + Ti,\quad -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2k} - Ui$$

an, wo $T > 0$, $U > 0$ ist. Dasselbe enthält keinen Pol des

Integranden. (Diese Pole sind ja 1, 3, 5, ... ad inf., sowie die negativen ungeraden Zahlen $> -k$.) (6) und (7) werden also aus Symmetriegründen bewiesen sein, wenn ich für

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2k} < \sigma < \frac{3}{4}$$

gleichmäßig

$$\lim_{t=\infty} \frac{1}{\left(\cos\frac{s\pi}{2}\,\Gamma(s)\right)^k} \frac{1}{s(s+1)\cdots(s+k)} = 0$$

zeige; dies folgt aber nach (5) so:

$$\frac{1}{\left(\cos\frac{s\pi}{2}\,\Gamma(s)\right)^k} \frac{1}{s(s+1)\cdots(s+k)} = O\left(t^{k\left(\frac{1}{2}-\sigma\right)-k-1}\right)$$

$$= O\left(t^{-\frac{k}{2}-1-k\sigma}\right) = O\left(t^{-\frac{k}{2}-1+\frac{k}{2}+\frac{1}{2}}\right) = O\left(t^{-\frac{1}{2}}\right).$$

2) Dieselbe Betrachtung beim Rechteck mit den Ecken

$$\frac{3}{4} - Ui,\ \frac{3}{4} + Ti,\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2k} + Ti,\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2k} - Ui$$

ergibt wegen der für $\frac{1}{2} - \frac{1}{2k} < \sigma < \frac{3}{4}$ gleichmäßigen Abschätzung

$$\frac{1}{\left(\cos\frac{s\pi}{2}\,\Gamma(s)\right)^k} \frac{1}{s} = O\left(t^{k\left(\frac{1}{2}-\sigma\right)-1}\right) = O\left(t^{k\frac{1}{2k}-1}\right) = O\left(t^{-\frac{1}{2}}\right)$$

die Behauptung über $H_k(w) = H^{(k)}(w)$.

Hilfssatz 4: *Bei wachsendem w ist*

$$H(w) = O\left(w^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2k}+k}\right),$$

$$H^{(k)}(w) = O\left(w^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2k}}\right).$$

Beweis: Bekanntlich[1]) ist bei festem σ, wenn a_1 eine komplexe, nur von σ abhängige Konstante bezeichnet,

$$\frac{1}{\cos\frac{s\pi}{2}\,\Gamma(s)} = a_1 t^{\frac{1}{2}-\sigma} e^{-ti(\log t-1)}\left(1+O\left(\frac{1}{t}\right)\right).$$

Folglich ist, wenn a_2 und a_3 zwei nur von k abhängige komplexe Konstanten bezeichnen, für $\sigma = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2k}$

$$\frac{1}{\left(\cos\frac{s\pi}{2}\,\Gamma(s)\right)^k}\,\frac{1}{s(s+1)\cdots(s+k)}$$

$$= a_2 t^{k\left(\frac{1}{2}-\sigma\right)-k-1} e^{-kti(\log t-1)}\left(1+O\left(\frac{1}{t}\right)\right)$$

$$= a_2 t^{-\frac{1}{2}} e^{-kti(\log t-1)} + O\left(t^{-\frac{3}{2}}\right) \tag{9}$$

und für $\sigma = \frac{1}{2} - \frac{1}{2k}$

$$\frac{1}{\left(\cos\frac{s\pi}{2}\,\Gamma(s)\right)^k}\,\frac{1}{s} = a_3 t^{k\left(\frac{1}{2}-\sigma\right)-1} e^{-kti(\log t-1)}\left(1+O\left(\frac{1}{t}\right)\right)$$

$$= a_3 t^{-\frac{1}{2}} e^{-kti(\log t-1)} + O\left(t^{-\frac{3}{2}}\right). \tag{10}$$

Der Integrand in (7) ist $w^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2k}+k} w^{ti}$ mal dem Ausdruck (9); der Integrand in (8) ist $w^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2k}} w^{ti}$ mal dem Ausdruck (10). Also wird offenbar Hilfssatz 4 bewiesen sein, wenn es gelingt, für $w>0$, $T>0$

$$\left|\int_0^T t^{-\frac{1}{2}} e^{-kti\left(\log t-1-\frac{1}{k}\log w\right)} dt\right| < A = A(k) \tag{11}$$

[1]) Vgl. z. B. S. 701 meiner Arbeit aus den Göttinger Nachrichten für $\frac{1}{\Gamma(s)}$, während $\frac{1}{\cos\frac{s\pi}{2}} = 2e^{\frac{\pi}{2}\pi i} e^{-\frac{\pi}{2}t}\left(1+O\left(\frac{1}{t}\right)\right)$ trivial ist. Übrigens ergibt sich a_1 sogar als absolute Konstante, was aber unerheblich ist.

zu beweisen, wo A nicht von w und T abhängt. Da nun

$$\int_0^T = \frac{1}{\sqrt{k}} \int_0^{kT} u^{-\frac{1}{2}} e^{-ui\left(\log u - \log k - 1 - \frac{1}{k}\log w\right)} du$$

ist, so ist (11) nach Hilfssatz 1 wahr, sogar mit dem absolut konstanten $A = \frac{c}{\sqrt{2}}$.

Hilfssatz 5: *Es sei $w > 1$, $0 < v < w$, $\Delta_v H(w)$ die $k$te Differenz bei jeweiligem Fortschreiten um v:*

$$\Delta_v H(w) = H(w + kv) - \binom{k}{1} H(w + (k-1)v) + \cdots + (-1)^k H(w). \tag{12}$$

Behauptet wird die Existenz zweier nur von k, nicht von v, w abhängiger Konstanten A_1, A_2, so daß

$$\Delta_v H(w) < A_1 w^{-\frac{1}{2} - \frac{1}{2k} + k},$$

$$\Delta_v H(w) < A_2 v^k w^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2k}}$$

ist.

Beweis: Nach Hilfssatz 4 ist für $w > 1$

$$|H(w)| < A_3 w^{-\frac{1}{2} - \frac{1}{2k} + k} \tag{13}$$

und

$$|H^{(k)}(w)| < A_4 w^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2k}}. \tag{14}$$

1) Nach (12) und (13) ist

$$|\Delta_v H(w)| < A_3 \left((w + kw)^{-\frac{1}{2} - \frac{1}{2k} + k} + \binom{k}{1} (w + kw)^{-\frac{1}{2} - \frac{1}{2k} + k} + \cdots + (w + kw)^{-\frac{1}{2} - \frac{1}{2k} + k} \right) = A_1 w^{-\frac{1}{2} - \frac{1}{2k} + k}.$$

2) Wegen

$$\Delta_v H(w) = \int_w^{w+v} dw_1 \int_{w_1}^{w_1+v} dw_2 \cdots \int_{w_{k-1}}^{w_{k-1}+v} H^{(k)}(w_k)\, dw_k$$

ist nach (14)

$$A_1 H(x) < x^k A_4 (x + k x)^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2k}} = A_2 x^k x^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2k}}.$$

Hilfssatz 6: *Es ist*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{2-\infty i}^{2+\infty i} \frac{y^{s+k}}{s(s+1)\cdots(s+k)}\, ds = \begin{cases} \frac{1}{k!}(y-1)^k & \text{für } y > 1, \\ 0 & \text{für } 0 < y \leqq 1. \end{cases}$$

Beweis: Steht z. B. auf S. 380 meiner Besprechung der Wigertschen Arbeit.

Es ist für $\sigma > 1$

$$Z(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{T_k(n)}{n^s} = (\zeta(s))^k.$$

Die Riemannsche Funktionalgleichung

$$\zeta(1-s) = \frac{2}{(2\pi)^s} \cos\frac{s\pi}{2}\, \Gamma(s)\, \zeta(s) \tag{15}$$

gibt demnach

$$Z(s) = \frac{(2\pi)^{ks}}{2^k} \frac{1}{\left(\cos\frac{s\pi}{2}\right)^k} \Gamma(s)^k\, Z(1-s),$$

also für $\sigma < 0$

$$Z(s) = \frac{1}{2^k} \frac{1}{\left(\cos\frac{s\pi}{2}\right)^k} \Gamma(s)^k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{T_k(n)}{n}\, (2^k \pi^k n)^s. \tag{16}$$

Ich setze für $x > 0$ zur Abkürzung

$$\Phi(x) = \frac{1}{k!} \sum_{n=1}^{[x]} T_k(n)\, (x-n)^k = \int_0^x dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \cdots \int_0^{x_{k-1}} \tau_k(x_k)\, dx_k.$$

Dann ergibt Hilfssatz 6 für $x > 0$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{2-\infty i}^{2+\infty i} \frac{x^{s+k}}{s(s+1)\cdots(s+k)} Z(s)\, ds = \frac{1}{2\pi i} \int_{2-\infty i}^{2+\infty i} \frac{x^{s+k}}{s(s+1)\cdots(s+k)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{T_k(n)}{n^s}\, ds$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} T_k(n)\, n^k \frac{1}{2\pi i} \int_{2-\infty i}^{2+\infty i} \frac{\left(\frac{x}{n}\right)^{s+k}}{s(s+1)\cdots(s+k)}\, ds = \frac{1}{k!} \sum_{n=1}^{[x]} T_k(n)\, n^k \left(\frac{x}{n} - 1\right)^k = \Phi(x).$$

Nun werde der Cauchysche Satz auf das Rechteck mit den Ecken

$$2 - Ui,\ 2 + Ti,\ -\frac{1}{2} + \frac{1}{2k} + Ti,\ -\frac{1}{2} + \frac{1}{2k} - Ui$$

(wo $T > 0$, $U > 0$ ist) und den Integranden

$$\frac{x^{s+k}}{s(s+1)\cdots(s+k)}\,Z(s) \tag{17}$$

angewendet. Darin liegt der Pol $k$ter Ordnung $s = 1$ und der Pol erster Ordnung $s = 0$ mit der Residuensumme

$$R(x) = x^{k+1}(g_{k-1}\log^{k-1}x + \cdots + g_0) + g\,x^k,$$

wo $g_{k-1}, \ldots, g$ reelle Konstanten bezeichnen (die nur von k und ihrem Index abhängen). Das Integral über die wagerechten Rechtecksseiten strebt gegen Null, da bekanntlich[1]) für $\sigma \geqq -\frac{1}{2} + \frac{1}{2k}$ gleichmäßig

$$\zeta(s) = O\left(t^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2k}}\right),$$

also für $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2k} \leqq \sigma < 2$ gleichmäßig der Integrand (17)

$$O\left(t^{k-\frac{1}{2}-k-1}\right) = O\left(t^{-\frac{3}{2}}\right) = o(1)$$

ist. Demnach ist

$$F(x) = \Phi(x) - R(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2k}-\infty i}^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2k}+\infty i} \frac{x^{s+k}}{s(s+1)\cdots(s+k)}\,Z(s)\,ds,$$

folglich nach (16)

$$= \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{2^k}\int_{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2k}-\infty i}^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2k}+\infty i} \frac{x^{s+k}}{s(s+1)\cdots(s+k)}\left(\frac{1}{\cos\frac{s\pi}{2}\,\Gamma(s)}\right)^k \sum_{n=1}^{\infty}\frac{T_k(n)}{n}\,(2^k\pi^k n)^s\,ds.$$

[1]) Man pflegt es aus (15) abzuleiten.

Hier ist Vertauschung von Summation und Integration erlaubt, da

$$\frac{x^{s+k}}{s(s+1)\cdots(s+k)}\left(\cos\frac{s\pi}{2}\,\Gamma(s)\right)^k\sum_{n=1}^{\infty}\frac{T_k(n)}{n}\,(2^k\pi^k n)^s\Big|$$

$$= O\left(\frac{1}{t^{k+1}}\,t^{k\left(1-\frac{1}{2k}\right)}\right) = O\left(t^{-\frac{3}{2}}\right)$$

ist. Demnach ist

$$F(x) = -\frac{i}{2^{1+k+k^2}\pi^{1+k^2}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{T_k(n)}{n^{k+1}}\int_{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2k}-\infty i}^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2k}+\infty i}\frac{1}{\left(\cos\frac{s\pi}{2}\,\Gamma(s)\right)^k}\,\frac{(2^k\pi^k nx)^{s+k}}{s(s+1)\cdots(s+k)}\,ds$$

$$= -\frac{i}{2^{1+k+k^2}\pi^{1+k^2}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{T_k(n)}{n^{k+1}}\,H(2^k\pi^k nx), \tag{18}$$

nach (6).

Nun setze ich für $x>1$, indem z die Bedeutung $x^{\frac{k-1}{k+1}}$ hat,

$$\Delta_z F(x) = F(x+kz) - \binom{k}{1}F(x+(k-1)z) + \cdots + (-1)^k F(x).$$

Dann ist nach (12) und (18) für $x>1$

$$\Delta_z F(x) = -\frac{i}{2^{1+k+k^2}\pi^{1+k^2}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{T_k(n)}{n^{k+1}}\,\Delta_v H(w),$$

worin $w = 2^k\pi^k nx$, $v = 2^k\pi^k nz$ gesetzt ist. Nach Hilfssatz 5 ist demnach

$$\Delta_z F(x) = O\sum_{n=1}^{\infty}\frac{T_k(n)}{n^{k+1}}\,\mathrm{Min.}\left(n^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2k}+k}x^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2k}+k}, n^k x^{\frac{k(k-1)}{k+1}}n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2k}}x^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2k}}\right)$$

$$= O\left(x^{\frac{k(k-1)}{k+1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2k}}\sum_{n=1}^{\left[\frac{k-1}{x^{k+1}}\right]}\frac{T_k(n)}{n^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2k}}}\right) + O\left(x^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2k}+k}\sum_{n=\left[\frac{k-1}{x^{k+1}}\right]+1}^{\infty}\frac{T_k(n)}{n^{\frac{3}{2}+\frac{1}{2k}}}\right). \tag{19}$$

Bekanntlich ist, nämlich als leichte Folge der rohesten Abschätzung $\tau_k(x) = O(x \log^{k-1} x)$,

$$\sum_{n=1}^{[y]} \frac{T_k(n)}{n^\lambda} = O(y^{1-\lambda} \log^{k-1} y) \quad \text{für } \lambda < 1$$

und

$$\sum_{n=[y]+1}^{\infty} \frac{T_k(n)}{n^\lambda} = O(y^{1-\lambda} \log^{k-1} y) \qquad \text{für } \lambda > 1;$$

(19) liefert also

$$\begin{aligned} \Delta_z F(x) &= O\left(x^{\frac{k(k-1)}{k+1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2k}+\frac{k-1}{k+1}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2k}\right)} \log^{k-1} x\right) \\ &\quad + O\left(x^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2k}+k+\frac{k-1}{k+1}\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2k}\right)} \log^{k-1} x\right) \\ &= O(x^{k-1} \log^{k-1} x) = O(z^{k+1} \log^{k-1} x). \end{aligned}$$

Nun ist

$$\Delta_z R(x) = z^k R^{(k)}(\xi) \qquad \left(x < \xi \leqq x + k x^{\frac{k-1}{k+1}}\right),$$

also, wegen

$$\begin{aligned} R^{(k)}(x) &= x(b_{k-1} \log^{k-1} x + \cdots + b_0) + b, \\ \Delta_z R(x) &= z^k (x(b_{k-1} \log^{k-1} x + \cdots + b_0) + b + O(z \log^{k-1} x)) \\ &= z^k x(b_{k-1} \log^{k-1} x + \cdots + b_0) + O(z^{k+1} \log^{k-1} x), \end{aligned}$$

$$\Delta_z \Phi(x) = \Delta_z F(x) + \Delta_z R(x)$$

(20) $$= z^k x(b_{k-1} \log^{k-1} x + \cdots + b_0) + O(z^{k+1} \log^{k-1} x).$$

Wegen

$$\Delta_z \Phi(x) = \int_x^{x+z} dx_1 \int_{x_1}^{x_1+z} dx_2 \cdots \int_{x_{k-1}}^{x_{k-1}+z} \tau_k(x_k)\, dx_k$$

ist

(21) $$z^k \tau_k(x) \leqq \Delta_z \Phi(x) \leqq z^k \tau_k(x + kz).$$

Aus (20) und (21) folgt erstens

(22) $$\tau_k(x) < x(b_{k-1} \log^{k-1} x + \cdots + b_0) + O\left(x^{\frac{k-1}{k+1}} \log^{k-1} x\right),$$

zweitens

$$\tau_k\left(x + k x^{\frac{k-1}{k+1}}\right) > x(b_{k-1} \log^{k-1} x + \cdots + b_0) + O\left(x^{\frac{k-1}{k+1}} \log^{k-1} x\right),$$

d. h., $x + k x^{\frac{k-1}{k+1}} = y$ als neue Variable eingeführt,

$$\tau_k(y) > \left(y + O\left(y^{\frac{k-1}{k+1}}\right)\right)\left(b_{k-1}\left(\log y + O\left(y^{\frac{k-1}{k+1}-1}\right)\right)^{k-1} + \cdots + b_0\right) + O\left(y^{\frac{k-1}{k+1}} \log^{k-1} y\right)$$

$$= y(b_{k-1}\log^{k-1} y + \cdots + b_0) + O\left(y^{\frac{k-1}{k+1}} \log^{k-1} y\right). \tag{23}$$

(22) und (23) besagen zusammen

$$\tau_k(x) = x(b_{k-1}\log^{k-1} x + \cdots + b_0) + O\left(x^{\frac{k-1}{k+1}} \log^{k-1} x\right). \tag{4}$$

Der Spezialfall $k = 2$ der Identität (18) steht (wenn auch mit längerem Beweis) schon[1]) in der Voronoïschen Arbeit *Sur une fonction transcendante et ses applications à la sommation de quelques séries*[2]), S. 497, Z. 3 v. u. Voronoï hat aber nicht bemerkt, daß der lange direkte Beweis von (2) in seiner anderen Arbeit (aus Crelles Journal) durch die obige kurze Schlußweise von (18) aus ersetzt werden kann; die von mir verwandten asymptotischen Abschätzungen[3]) der Funktionen $H(w)$ und $H^{(k)}(w)$ kommen[4]) in jener Arbeit (aus den Annales de l'École Normale) vor, soweit es sich um seinen Fall $k = 2$ handelt.

Göttingen, den 21. Juni 1915.

[1]) Der Leser, welcher die gliedweise Übereinstimmung beider Formeln verifizieren will, muß sich z. B. durch Anwendung des Cauchyschen Satzes davon überzeugen, daß (für $k = 2$) mein $H(w)$ gleich $-2\pi i$ mal der Residuensumme des Integranden in den Polen 1, 3, 5, ... ist, und daß diese Residuensumme

$$\frac{4}{\pi^2}\sum_{\lambda=0}^{\infty}\frac{w^{2\lambda+3}}{(2\lambda)!\,(2\lambda+3)!}\left(\log w + 2C - \left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2\lambda}\right) - \left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2\lambda+3}\right)\right)$$

ist, also in Voronoïscher Bezeichnung $= \frac{4}{\pi^2}w + \frac{2}{\pi^2}(\xi_3(w) - \eta_3(w))$.

[2]) Annales scientifiques de l'École Normale supérieure, Ser. III, Bd. XXI (1904), S. 207—267 und S. 459—533.

[3]) Nicht etwa die Fassung des obigen Hilfssatzes 5 und seine Anwendung, worin gerade mein (der Pfeifferschen Methode entnommener) Ausgangspunkt besteht.

[4]) Wenn man den in der drittletzten Fußnote angedeuteten Übergang von $H(w)$ zu Voronoïs Funktionen hinzunimmt.

Senkungserscheinungen an der Frauenkirche in München und Lageänderung von Hauptdreiecks-punkten in Südbayern.

Von **M. Schmidt**

mit 1 Tafel.

Vorgetragen in der Sitzung am 6. November 1915.

Im Jahre 1914 ist an dieser Stelle über die Ergebnisse der Untersuchung von regionalen und lokalen Bodensenkungen im oberbayerischen Alpenvorland auf Grund geometrischer Höhenmessungen durch Feinnivellements berichtet worden, die im Bereich der Inn-Salzachplatte zur Ausführung gekommen sind.

Für den Abschluß dieser Arbeiten schien eine Verbindung der bisherigen Nivellements mit einigen außerhalb des untersuchten Gebietes gelegenen, zuverlässigen Haupthöhenpunkten des bayerischen Präzisionsnivellements und eine Weiterführung derselben bis München erforderlich.

Diese schon im vergangenen Herbst in Aussicht genommenen Arbeiten erlitten durch den Ausbruch des Krieges eine unerfreuliche Verzögerung und konnten erst in diesem Jahre wieder aufgenommen werden.

Sobald es die Witterungsverhältnisse im Frühjahr erlaubten, wurden einige im Stadtbezirk von München gelegene, für den Nivellementsanschluß in Aussicht genommene ältere Haupthöhenpunkte des Präzisionsnivellements auf ihre Unveränderlichkeit sorgfältig geprüft.

Hiebei kamen die folgenden, in der Veröffentlichung „Das Präzisionsnivellement in Bayern rechts des Rheins,

München 1893“ unter den beigesetzten laufenden Nummern aufgeführten Höhenpunkte in Betracht, welchen noch die zur Benützung für spätere Anschlüsse am Friedensdenkmal auf der Prinzregenten-Terrasse neu festgelegten vier Punkte beigefügt sind, die noch keine laufenden Nummern erhalten konnten. Um die seit der erstmaligen Nivellierung der älteren Punkte eingetretenen Höhenänderungen auf einen Blick übersehen zu können, sind den bisher für sie geltenden Höhen über N.N., die in erster Linie stehen, die entsprechenden neu ermittelten Werte und die Unterschiede beider beigefügt worden.

Die Punkte Nr. 1533, 1537, 1548, 1316, 1319 sind wie die Mehrzahl der Hauptfestpunkte des Präzisionsnivellements durch 10 cm lange und 2 cm starke Messingbolzen mit vorgesetzten gußeisernen Höhenschildern bezeichnet.

Bei den unter Nr. 1321, 1322, 2434, 2435 erwähnten Pfeilern gilt die angegebene Höhe für die wagrecht abgeglichene Oberfläche. Den Punkt Nr. 1540 bezeichnet eine durch ein Quadrat von 10 cm Seitenlänge begrenzte Steinfläche. Die Punkte am Friedensdenkmal sind durch kleine, 5 cm lange und 2 cm starke, mit Bleiringen gut eingestemmte Bronzebolzen mit abgerundeten Köpfen festgelegt, auf welche ebenso wie auf die Pfeileroberflächen und die Steinmarke die Nivellierlatten unmittelbar aufgesetzt werden.

Zwischen den in der nachstehenden Tabelle angeführten Punkten ist in den Monaten April, Mai und September 1915 durch die in der Ausführung von Feinnivellements seit Jahren geübten Beamten des Geodätischen Instituts der K. Technischen Hochschule mit einem dem genannten Institute gehörenden, von der Firma Karl Zeiß in Jena gefertigten, für Feinnivellements von höchster Genauigkeit bestimmten Nivellierinstrument mit biaxialem Fernrohr und zwei von derselben Firma bezogenen Präzisionsnivellierlatten mit Invarbandteilung ein Verbindungsnivellement in beiden Richtungen ausgeführt worden, dessen Genauigkeitsgrad durch den dabei erreichten mittleren zufälligen Kilometerfehler von $\pm$ 0,4 mm gekennzeichnet ist.

Als Ausgangspunkt diente der an einem Mauerpfeiler der

Tabelle I.

Nivellementsanschlusspunkte in und bei München.

Nr.	Höhen über N. N. m	Unterschied mm	Art und Lage des Höhenpunktes
1533	525,3893 525,3873	— 2,0	⊙ Betriebshauptgebäude in Feldkirchen, Bahnseite.
1537	532,9458	—	⊙ Güterhalle in München-Ostbahnhof, Bahnseite, Mittelbau, südöstlicher Pfeiler.
1540	523,9414 523,9397	— 1,7	□ Eiserne Fachwerksbrücke der München-Braunauer Eisenbahn über die Isar in Giesing, südöstl. Widerlager.
1548	529,0621 529,0596	— 2,5	⊙ Stationshaus in Trudering, Nordseite, neben dem Expeditionseingang.
1321	514,8467 514,8451	— 1,6	V Polierte Oberfläche des südl. Komparatorpfeilers im Hofe der K. Technischen Hochschule.
1322	514,6702 514,6708	+ 0,6	V Polierte Oberfläche des nördl. Komparatorpfeilers im Hofe der K. Technischen Hochschule.
2434	529,0203 529,0112	— 9,1	V Oberfläche des ovalen Beobachtungspfeilers im großen Meridiansaal der K. Sternwarte in Bogenhausen.
2435	535,5378 535,5295	— 8,3	V Oberfläche des Pfeilers unter der westlichen Kuppel der K. Sternwarte in Bogenhausen.
1316	519,2605 519,2498	— 10,7	⊙ Gebäude der K. Staatsschuldentilgungskasse rechts vom Eingang am Lenbachplatz.
1319	519,3850 519,3773	— 7,7	⊙ Frauenkirche, nördl. Turm, südl. Wand neben dem Turmaufgang.
			Friedensdenkmal auf der Prinzregententerrasse, 2. Sockelstufe:
NWE	523,4024	—	⌜ nordwestl. Ecke,
SWE	523,4085	—	⌞ südwestl. Ecke,
SOE	523,4202	—	⌟ südöstl. Ecke,
NOE	523,4199	—	⌝ nordöstl. Ecke.

massiv aus Ziegelsteinen gebauten großen Güterhalle in München O.-Bhf durch einen mit Höhenschild gedeckten Messingbolzen versicherte Haupthöhenpunkt Nr. 1537, dessen Höhenlage sich durch die in den Jahren 1913 und 1915 von vorgenannten Beobachtern in beiden Richtungen nach den beiderseits auf der Bahnlinie München-Braunau gelegenen, 4,4 bzw. 4,0 km entfernten Nachbarpunkten Nr. 1540 und 1548 und nach dem auf der Bahnstrecke nach Mühldorf 9,6 km von München O.-Bhf entfernten Punkt Nr. 1533 ausgeführten Feinnivellements als unverändert erwiesen hatte.

Gegenüber der im Jahre 1872 vorgenommenen erstmaligen Nivellierung dieser vier Punkte ergab das wiederholte Nivellement nur Abweichungen von — 1,7 bis — 2,5 mm, welche innerhalb der Grenzen der zulässigen Nivellierfehler liegen. Es kann daher die Höhenlage aller vier Punkte als unverändert angesehen werden.

Als besonders zuverlässig und für den Anschluß weiterer Nivellements geeignet, erscheint der auf dem südöstlichen Widerlager der Isarbrücke durch eine in Granit gehauene Steinmarke festgelegte Punkt Nr. 1540.

Die im Jahre 1868 ausgeführte Gründung der Brücke, auf welcher die München-Braunauer Bahn die Isar südlich von München überschreitet, ist in den Technischen Mitteilungen über den Bau der K. B. Staatseisenbahnen von Oberingenieur Schnorr v. Carolsfeld in der Zeitschr. des Bayer. Architekten- u. Ing.-Vereins, III. Bd., 1871, S. 85 ff. eingehend beschrieben.

Hiernach ist die Beschaffenheit des Untergrundes dieses Bauwerkes durch Anwendung des Erdbohrers untersucht worden. Die Bohrungen ergaben bis 3 m Tiefe lockeren Kies, sodann eine 3 bis 3,5 m mächtige Sandschicht, welche so fest gelagert ist, daß sie dem Eindringen der mit der Kunstramme geschlagenen Pfähle ein fast absolutes Hindernis entgegenstellte. Darunter erreichte die Bohrung den Flinz, jenes sandig-mergelige Gebilde, welches als alter Meeresboden in einer bisher noch nicht ergründeten Mächtigkeit das ganze südliche Bayern durchzieht. Die Bohrungen wurden in diesem Material auf unge-

fähr 15 m Tiefe geführt. Die Flinzmasse zeigte sich als ganz gleichartig, nur die oberen Schichten waren etwas blätterig gefügt und weniger gebunden als die tieferen.

Da die Widerlager durch Hochwasserdämme und Uferdeckwerke vor jeder Unterspülung geschützt sind, konnte ein Teil der festen Sandlage unbedenklich unter den von Spundwänden eingeschlossenen, 2 m mächtigen Betonfundamenten belassen werden. Das Mauerwerk besteht von der Betonoberfläche bis zur Bodengleiche aus Nagelfluhquadern und darüber aus Granit, welcher auch die Abdeckung der Widerlager bildet und keinerlei Spuren von Abwitterung bemerken läßt. Die auf einem der Decksteine angebrachte Steinmarke ist daher unbedenklich als sicherer Anschlußpunkt benützt worden.

Die Höhenpunkte Nr. 1321 und Nr. 1322 werden durch die wagrecht abgeschliffenen Oberflächen zweier im Abstand von 160 m erbauten „Komparatorpfeiler" gebildet, die ursprünglich zur Festlegung einer unveränderlichen Streckenlänge für die Abgleichung geodätischer Längenmaße bestimmt waren.

Die Pfeiler liegen am westlichen Rande der den Hofraum der K. Technischen Hochschule in der Nordsüdrichtung durchziehenden Fahrstraße und sind rund 5 m von den Fluchtlinien der nächsten Gebäude entfernt. Sie sind bis zur Bodengleiche in den aus sandigem Schotter bestehenden Boden versenkt und durch verschließbare gußeiserne Schutzkästen überdeckt. Die unterste, auf den in 6 m Tiefe anstehenden festen Flinz aufgesetzte Fundamentabteilung der Pfeiler wird durch einen 1,6 m hohen und ebenso starken Betonzylinder gebildet. Auf diesen folgt ein vierseitiges Prisma von 3 m Höhe und 1,1 m Geviertseite aus Ziegelmauerwerk, das mit einem Werkstück aus Granit von 0,5 m Höhe und 1 qm Querschnittsfläche abgedeckt ist.

Den Kopf der Pfeiler bildet ein Syenitblock von 0,7 m Höhe und quadratischer Grundfläche von 0,6 m Seitenlänge. Die Oberflächen dieser Blöcke tragen in der Mitte eingesetzte Bronzekegel, deren Achsen die Komparatorlänge begrenzen.

Bei der Auswahl von Hauptfestpunkten für das Präzisionsnivellement sind die polierten Oberflächen dieser Pfeilerköpfe

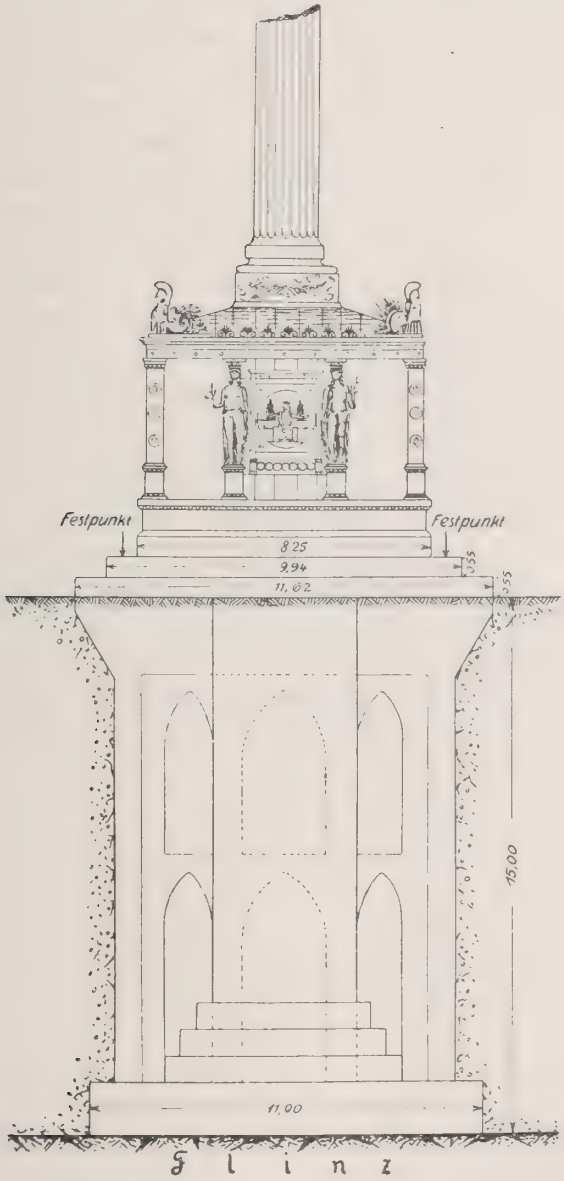
als besonders zuverlässige Höhenpunkte betrachtet und seither vor jeder Veränderung sorgfältig bewahrt worden. Ihre Höhenlage hat sich seit ihrer ersten Nivellierung im Jahre 1870 durch die später vorgenommenen Kanalisations- und Gründungsarbeiten bei der Herstellung umfangreicher Neubauten, die in neuerer Zeit auf dem Gelände der Technischen Hochschule in der Nähe der Pfeiler ausgeführt worden sind, nicht geändert.

Die Punkte Nr. 2434 und 2435 sind ebenfalls durch die wagrechten Oberflächen zweier zur Aufstellung astronomischer Instrumente bestimmter, bereits im Jahre 1818 erbauter Steinpfeiler festgelegt, die, um ihrem Zweck zu entsprechen, besonders sorgfältig gegründet worden sind. Soviel bekannt ist, wurden an diesen Pfeilern seit ihrer Erbauung keinerlei Veränderungen vorgenommen. Durch die Achse des unter der Westkuppel stehenden Pfeilers ist zugleich der Hauptdreieckspunkt der Landesvermessung „München-Sternwarte“ festgelegt.

Auch gegen die Zuverlässigkeit der Höhenmarken Nr. 1316 und 1319 am Gebäude der Staatsschuldenverwaltung und am Nordturm der Frauenkirche bestanden bisher keine Bedenken, weshalb auch diese Punkte für den Anschluß der neuerdings in Oberbayern zur Ausführung gebrachten Feinnivellements beigezogen werden sollten.

Das, wie bereits bemerkt, bei der Höhenmarke Nr. 1537 an der Güterhalle im O.-Bhf München beginnende Nivellement wurde über den Prinzregentenplatz gegen Nord-West durch die äußere Prinzregentenstraße, über die das Friedensdenkmal der Stadt München tragende Prinzregenten-Terrasse und durch die Prinzregent-Luitpoldstraße bis zur Technischen Hochschule an der Arcisstraße geführt und besitzt in seiner Hauptlinie eine Länge von 5,5 km. Von der Prinzregenten-Terrasse aus läuft in nordöstlicher Richtung die 1,6 km lange Abzweigung nach der Sternwarte in Bogenhausen. Ein 2,2 km langer weiterer Zweig führt von der Technischen Hochschule aus in südöstlicher Richtung nach dem Gebäude der Staatsschuldenverwaltung am Lenbachplatz und nach der Frauenkirche.

Am Friedensdenkmal (s. d. Abb.), welches in seinem sicht-



Friedensdenkmal.

baren Hauptteil aus einer mächtigen Steinsäule besteht, die auf ihrem Kapitäl einen vergoldeten Friedensengel trägt, sind als feste Höhenpunkte in den vier Ecken der zweiten Stufe des aus Muschelkalkquadern hergestellten Unterbaues kurze Bronzebolzen mit abgerundeten Köpfen eingesetzt und durch eingestemmte Bleiringe befestigt worden, die ein unmittelbares Aufsetzen der Nivellierlatte gestatten. Diese Höhenpunkte versprechen eine dauernde Unveränderlichkeit, da sie den gleichen behördlichen Schutz wie das sie tragende monumentale Bauwerk genießen und durch die sorgfältige Gründung des massigen Denkmals gegen Höhenänderungen gesichert sind.

Das unterste Fundament des Bauwerks bildet eine 11 m im Geviert messende, 1,5 m starke Betonplatte, welche 15 m unter der Terrassenoberfläche in die auch hier den festen Untergrund bildende Flinzschicht eingebettet ist. Auf dieser Grundplatte bauen sich mächtige, durch Gewölbe verbundene Pfeilerstellungen auf, welche auf einer Plattform den aus drei Stufen von 0,85 m Breite und 0,55 m Höhe gebildeten Unterbau des eigentlichen Denkmals tragen. In die Mitte der diagonal laufenden Gratlinien der 1,81 m langen und 1,42 m breiten Eckquadern der mittelsten Stufe sind die vier Festlegungsbolzen derart eingesetzt, daß sie dem Beschauer des Denkmals nicht in die Augen fallen.

Zu den in Tabelle I zusammengestellten Nivellementsergebnissen ist noch zu bemerken, daß nach denselben außer den Anschlußpunkten Nr. 1533, 1537, 1540 und 1548 nur noch die Punkte Nr. 1321 und 1322 an den Komparatorpfeilern der Technischen Hochschule bis auf kleine den unvermeidlichen Beobachtungsfehlern zuzuschreibende Unterschiede in ihrer Höhe unverändert geblieben sind.

Was die scheinbaren Änderungen der Punkte Nr. 2434 und 2435 auf den Pfeilern der Sternwarte in Bogenhausen anlangt, so ist im Jahre 1874 nach B. M. IV, S. 22 der Höhenunterschied zwischen der Steinmarke □ 1535 am Sockel der Signalglockensäule (Läutebude) bei Bahnwärterposten Nr. 10 der München-Simbacher Bahnlinie und der Oberfläche des ovalen

Beobachtungspfeilers im Meridiansaal der Sternwarte + 7,0312 m gewesen; im Jahre 1915 ist derselbe aber vom Anschlußpunkt Nr. 1537 aus durch Neumessung um 9,1 mm größer gefunden worden. Die Länge der zwischen den erstgenannten beiden Punkten liegenden Nivellementsstrecke beträgt 3,81 km.

Nach den älteren im Jahre 1874 geltenden internationalen Bestimmungen sollte bei Feinnivellements der wahrscheinliche Kilometerfehler 3,0 mm und der mittlere Fehler 4,5 mm nicht überschreiten. Für 3,81 km Streckenlänge wird dieser Grenzwert $4{,}5 \cdot \sqrt{3{,}81} = 8{,}8$ mm. Die vorliegende Abweichung von 9,1 mm liegt daher ganz nahe an der zulässigen Fehlergrenze und kann durch zufällige Beobachtungsfehler im älteren Nivellement genügend erklärt werden. Eine Senkung der beiden Beobachtungspfeiler der Sternwarte ist auch deshalb nicht anzunehmen, weil sich ihre relative Höhe völlig unverändert erhalten hat.

Letztere betrug 6,5175 m nach der Messung im Jahre 1874 und 6,5183 m nach jener vom Jahre 1915. Dieser Wert ist das Mittel aus zwei von verschiedenen Beobachtern mit zwei übereinander gestellten Nivellierlatten unter Berücksichtigung der Lattenkorrektionen ausgeführten Messungen, die bis auf 0,4 mm übereinstimmen. Nebenbei mag noch bemerkt werden, daß der im Jahre 1874 benutzte Ausgangspunkt des Nivellements nach der Sternwarte, der am Sockel einer z. Z. nicht mehr vorhandenen Läutebude angebracht war, nicht als zuverlässig betrachtet werden darf. Eine kleine Senkung desselben ist bei der nur oberflächlichen Gründung der Sockelmauer der Läutebude in der Zeit zwischen der Nivellierung der München-Simbacher Bahnlinie im Jahre 1872 und der Ausführung des Nivellements nach der Sternwarte im Jahre 1874 nicht unwahrscheinlich.

Da die fragliche Läutebude inzwischen bei Umbauten an genannter Bahnlinie beseitigt werden mußte, läßt sich eine Veränderung der Höhe der Steinmarke nicht mehr feststellen. Die neu bestimmten Höhen der Oberflächen der beiden Pfeiler

der Sternwarte Nr. 2434 und 2435 können dagegen nunmehr als sicher und unveränderlich betrachtet werden.

Für die Höhenmarke Nr. 1316 an dem im Jahre 1869 errichteten Gebäude der Staatsschuldenverwaltung am Lenbachplatz hat die Neumessung eine Senkung von 10,7 mm ergeben. Die Höhenmarke ist am rechtsseitigen Pfeiler des den Haupteingang des Gebäudes bildenden Torwegs angebracht und besteht aus einem in der Achse durchbohrten Bronzebolzen mit vorgesetztem gußeisernen Höhenschild mit der Aufschrift „Höhenmarke".

Die Außenwand des Gebäudes steht hart am Rande eines alten, jetzt ausgefüllten und überbauten Stadtgrabens, dessen Verlauf aus älteren Stadtplänen zu ersehen ist. Auf die Flügel des Gebäudes sind zwei Stockwerke, auf den mittleren Teil über dem Torweg dagegen drei Stockwerke aufgebaut, wodurch eine stärkere Belastung der Außenmauern im mittleren Teil des Gebäudes gegenüber den Flügelbauten bedingt ist.

Die nähere Besichtigung des Inneren des Gebäudes ergab, daß die den Torweg an der rechten Seite begrenzende Querwand von der Hauptmauer durch offene Spalten getrennt ist. Solche sind auch im Kellergeschoß an den Gewölbekappen sichtbar und durchsetzen im Erdgeschoß die Sohlbank sowie den Sturz einer Fensteröffnung, welche sich in der Querwand hinter dem die Höhenmarke tragenden Torpfeiler vorfindet. Zur Zeit der Besichtigung waren eben Maurer damit beschäftigt, diese Spalten mit Mörtel zu verstreichen. Es wird also später leicht festzustellen sein, ob sich diese Spalten wieder öffnen und die Senkung der Mauern weiter fortschreitet. Jedenfalls kann die erwähnte Höhenmarke nicht als zuverlässig betrachtet werden.

Der an der Südwand des Nordturms der Frauenkirche angebrachte, durch einen Bronzebolzen mit vorgesetztem Höhenschild versicherte Hauptfestpunkt Nr. 1319 bildet den Endpunkt des im Herbst des Jahres 1870 ausgeführten Nivellements der Bahnlinie Augsburg-München und besteht nunmehr seit 45 Jahren.

Seine Verbindung mit dem durch die Spitze des genannten Turmes festgelegten Normalpunkt der bayer. Landesvermessung und seine Verwendung als Ausgangspunkt des in den Jahren 1892 bis 1894 durch den Observator der K. B. Erdmessungskommission Dr. Carl Oertel ausgeführten Präzisionsnivellements der Kgl. Haupt- und Residenzstadt München verleiht diesem Punkt eine besondere Wichtigkeit.

Die kürzlich ausgeführte Neumessung der Höhenlage dieses Punktes hat in unerwarteter Weise eine Senkung desselben von 7,7 mm ergeben.

Da diese Höhenänderung nicht gut ohne eine Senkung des ganzen Turms denkbar ist, wurde eine eingehende Untersuchung über die Entstehungsweise dieser Senkung gepflogen. Die enorme Belastung des Baugrundes durch die Mauerwerksmassen der Kirche und insbesondere der beiden über der Bodengleiche rund 98 m hohen mächtigen Türme ließ vermuten, daß neben der Senkung auch eine Abweichung der Turmachsen von ihrer lotrechten Stellung und eine entsprechende Lageänderung der Turmspitzen eingetreten sein könne, was mit Rücksicht auf die Benützung der Spitze des Nordturms als Ursprungspunkt des Koordinatensystems der Landesvermessung von großer Bedeutung sein würde.

Die Längsachse der Frauenkirche[1]) ist ziemlich genau von Ost nach West gerichtet. Eine durch die Mitte der auf der Westseite der Kirche angebauten Türme gelegte Vertikalebene entspricht der Querachse der Kirche und verläuft in der Nordsüdrichtung. Zur Untersuchung der lotrechten Stellung der Türme ist zunächst in einem 68 m westlich vom Nordturm auf der Gehbahn der Augustinerstraße ausgewählten Standort ein Theodolit mit seitlichem Fernrohr aufgestellt und mit diesem in beiden Fernrohrlagen die Mitte zwischen den obersten Enden der Kanten der Türme, welche von halber Höhe ab bis unter

[1]) Ausführliche Angaben über die Frauenkirche, besonders in kunsthistorischer Beziehung, finden sich in dem umfangreichen Werk „Die Domkirche zu Unserer Lieben Frau in München", aus den Quellen dargestellt von Anton Mayer, Benefiziat der Domkirche. München 1869.

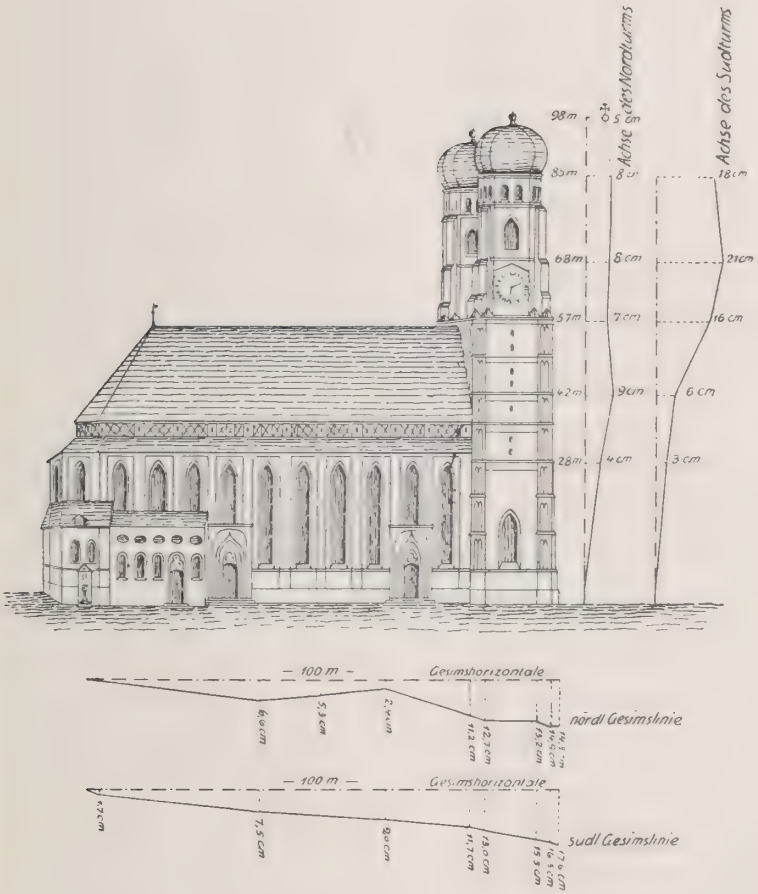
die Hauben die Gestalt von achtseitigen Prismen besitzen, bis auf die Pflasterhöhe am Fuß der Türme projiziert worden.

Die Projektion fällt bis auf einzelne Zentimeter genau mit der Mitte zwischen den Sockelkanten der Westseite der Türme zusammen. Eine seitliche Abweichung der Turmachsen von der Mitte des Sockelmauerwerks am Fuße der Türme ist somit in nordsüdlicher Richtung nicht nachweisbar.

In gleicher Weise wurde die Untersuchung der Stellung der Vertikalachse der beiden Türme in zwei auf der Nord- und Südseite der Türme in 42 bzw. 23,5 m Abstand vom Sockel gewählten Theodolitständen ausgeführt.

In diesen Standorten waren weder die Turmspitzen über dem Knopf noch die Helmstangen sichtbar, da sie durch die Wölbung der Turmhauben verdeckt sind. Es wurden daher die inneren Strebepfeilerkanten des Turmmauerwerks, deren Verlauf in den Abbildungen zu ersehen ist, beiderseits der Mittellinien der Türme in fünf verschiedenen Höhen von 28—42—57—68 und 85 m mit dem vertikalen Faden in beiden Fernrohrlagen eingestellt und durch Kreisablesungen die Abweichungen der Mauerkanten in diesen Höhen von der durch die Mitte des Sockelmauerwerks der beiden Türme laufenden Vertikalen bestimmt. Eine einfache Rechnung ergab die in die Abbildung der Nordseite der Frauenkirche eingeschriebenen Maße.

Nach diesen Maßen ist die Achse des unteren Teiles des Nordturms bis zu 42 m Höhe um etwa 8 Minuten nach Westen geneigt und verläuft von dieser Höhe ab bis zum obersten Mauerkranz unter der Haube nahezu lotrecht. Die Mitte des oberen Endes der den Knopf des Turmes tragenden Helmstange liegt nach einer im Dezember 1909 von Dr. M. Näbauer ausgeführten Einmessung 7 cm südlich und 3 cm östlich vom geometrischen Mittelpunkt des die Turmstube begrenzenden Mauerpolygons. Dieser letztere Punkt ist in der Abbildung als das oberste Ende der Turmachse angenommen worden. Für den Südturm ist diese Einmessung nicht erfolgt und deshalb die Lage des Knopfes in der Zeichnung auch nicht angegeben worden. Beiläufig dieselbe Neigung wie die Achse des Nordturms zeiget



Frauenkirche von Norden.

die Achse des Südturms bis zur Höhe von 57 m, um von hier ab ebenfalls in eine nahezu lotrechte Stellung überzugehen.

Eine Erklärung dieser Erscheinung liefert die Annahme, daß während des Aufbaues der Türme bis zur Höhe von 42 m bzw. 57 m infolge der zunehmenden Belastung des Baugrundes Senkungen desselben stattgefunden haben, die nach Erreichung der angegebenen Turmhöhen zum Stillstand gelangt sind, so daß bei der Fortsetzung des Aufbaues die oberen Teile der Türme keine Störungen in ihrer lotrechten Stellung mehr erlitten haben.

Bei der großen Gleichförmigkeit in der Lagerung der auch hier den Untergrund bildenden Flinzschichten war zu erwarten, daß die eingetretenen Senkungen sich auch auf das Schiff der Kirche ausgedehnt und auch an diesem Neigungsänderungen von ursprünglich wagrecht gerichteten Gesimslinien hervorgerufen haben könnten.

Für eine derartige Untersuchung eignet sich das in beiläufig 4 m Höhe über dem Pflaster rund um das Schiff der Kirche laufende, die Fensteröffnungen nach unten abschließende Sohlbankgesimse. Die Unterkante der Wassernase dieses Gesimses ist in ihrem größten Teil gut erhalten und durch Abwitterung nur an wenigen Stellen beschädigt, so daß ein Nivellement der ursprünglich von den Erbauern der Kirche mit Bleiwage und Setzlatte wagrecht abgeglichenen Gesimslinie gute Anhaltspunkte für eine etwaige nachträgliche Senkung der Umfassungsmauern der Kirche geben muß. Diese Erwartung hat sich erfüllt, wie das in der auf Seite 341 beigefügten Abbildung der Kirche eingetragene Längenprofil der genannten Linie erkennen läßt.

Die mittlere Neigung der Sohlbankgesimslinie auf der Südseite der Kirche beträgt nach unseren Messungen etwa 6 Minuten. Sie ist beiläufig von derselben Größe und verläuft im gleichen Sinn wie die Abweichung des unteren Teiles der Turmachsen von der lotrechten Stellung. Die nördliche Gesimslinie zeigt denselben allgemeinen Charakter, doch macht sich neben dem ersten Seiteneingang auf der Nordseite der

Kirche in ihrem stetigen Verlauf eine Knickung nach oben bemerkbar, die nicht etwa als Messungsfehler erklärt werden kann, wie eine Nachprüfung der Richtigkeit der Messung zeigte.

Die an den Türmen sowie an den Langwänden des Kirchenschiffes nachgewiesenen Neigungsänderungen müssen wohl durch Nachgeben des Untergrundes bei zunehmender Belastung durch die aufgebrachten Mauerwerksmassen entstanden sein.

Daß diese Senkung keine gleichmäßige ist, sondern nach Westen hin an Größe zunimmt, erklärt sich aus der einseitigen Belastung des Baugrundes durch die an der Westseite der Kirche angebauten mächtigen Türme. Den Anlaß zu der in der Neuzeit beobachteten geringen Senkung der Höhenmarke am Nordturm dürften die in den letzten Jahrzehnten auf dem Frauenplatz in nächster Nähe der Türme ausgeführten Kanalisationsarbeiten gegeben haben.

Die Tragfähigkeit der in 4 bis 5 m Tiefe unter der Bodenoberfläche anstehenden Flinzschichten, auf welche das ganze Bauwerk gegründet ist, dürfte wohl schon zur Zeit der Erbauung der Kirche, die in die Zeit von 1468 bis 1488 fällt, durch einen 5 bis 6 m breiten und 3,5 bis 4 m tief ins Gelände eingeschnittenen alten Stadtgraben, welcher vom Hofgrabenbach durchflossen war, beeinträchtigt worden sein.

Dieser Bach bildete die Fortsetzung des erst vor wenigen Jahrzehnten überwölbten Färbergrabens und war ursprünglich ein Teil der unter Heinrich dem Löwen in den letzten Jahrzehnten des 12. Jahrhunderts begonnenen ersten Stadtbefestigung.

Der Verlauf dieses Stadtgrabens ist in dem im Nationalmuseum aufgestellten, vom Drechsler Jakob Sandtner aus Straubing im Auftrag des Herzogs Albrecht V. für die herzogliche Kunstkammer im Jahre 1570 in Holz ausgeführten Modell der Stadt München, sowie in den älteren Stadtplänen, z. B. in dem im Jahre 1806 durch den Ingenieur-Geographen Jos. Consoni aufgenommenen und durch Carl Schleich meisterhaft in Kupfer gestochenen Plan der Haupt- und Residenzstadt München deutlich zu verfolgen. Er umzieht in einem Viertel-

kreisbogen mit 244,0 m Halbmesser und den Mittelpunktskoordinaten $x = -214{,}7$, $y = -76{,}5$ m vom Färbergraben her bis zur Schäfflergasse den Frauenplatz auf der West- und Nordseite der Kirche und nähert sich der Nordwestecke der Kirche bis auf etwa 5 m.

Bei den in den letzten Jahren ausgeführten Fundierungsarbeiten von Neubauten auf alten, über dem Graben liegenden Baustellen am Frauenplatz, hat sich derselbe mit metertiefen schwarzen Schlammschichten angefüllt gezeigt, in welchen die mit Kunstrammen eingetriebenen Rostpfähle erst bei 8 m Tiefe tragfähig wurden. Die Wände des alten Grabens bestanden, wie die ausgeführten Aufgrabungen, welche Oberstleutnant z. D. Karl Müller in seinen „Fortifikatorischen Studien“ in der illustrierten Wochenschrift „Das Bayerland“, 14. Jahrgang, München 1903, und in mehreren Nachträgen hiezu in den folgenden Jahrgängen näher beschreibt, erkennen ließen, ursprünglich aus mit Rollsteinen und Kalkmörtel ausgefüllten Gußfüllmauern von etwa 1,2 m Stärke und waren streckenweise durch ein aus 7 cm starken Bohlen aus Fichten- und Pfählen aus Eichenholz hergestelltem Beschlächt gestützt. In den 70er Jahren des vergangenen Jahrhunderts ist der Graben mit einem 3 m im Lichten haltenden Halbkreisgewölbe überdeckt und im Jahre 1912 mit einem völlig in den festen Flinz eingebetteten geschlossenen Sohlkanal mit eirundem Profil versehen worden. Es ist wohl anzunehmen, daß die wenig widerstandsfähigen Grabenwände schon während der Erbauung der Kirche dem beträchtlichen Seitendruck des durch die Mauerwerksmassen der Kirche überlasteten Bodens etwas nachgegeben haben und daß durch Zusammenpressung der Flinzschichten bei wechselnden Grundwasserständen die neuerdings durch Messung sicher festgestellte und in der Abbildung der Kirche näher angegebene Neigung der Turmachsen gegen Westen entstanden ist.

Die im Turmmauerwerk eingetretenen Bewegungen haben zum Aufreißen offener Spalten an den Verbindungsstellen der Türme mit den Langmauern des Kirchenschiffs geführt, die zwar gelegentlich einer im Jahre 1868 vorgenommenen Haupt-

reparatur der Frauenkirche durch Ausstreichen mit Mörtel äußerlich geschlossen worden sind, die aber bei näherer Betrachtung für das scharfe Auge des Baukundigen noch erkennbar sind, während sie allerdings dem flüchtigen Beschauer leicht entgehen können. Diese Risse im Mauerwerk haben besonders an den Leibungslinien der Spitzbögen der den Türmen zunächst gelegenen Fenster auf beiden Langseiten der Kirche kleine Verdrückungen hervorgerufen und lassen sich in ihrer Fortsetzung auch noch in den über den Fensterbögen liegenden Friesfüllungen wahrnehmen.

Nach einer mündlichen Mitteilung des mit der Ausführung der baulichen Erhaltungsarbeiten an der Frauenkirche betrauten Baumeisters J. Burger mußte sogar das die Fensteröffnungen ausfüllende steinerne Maßwerk, das ganz zertrümmert war, ausgewechselt und das zersprungene Mauerwerk über den Fensterbögen mit starken Eisenbändern verbunden werden.

Diese Beschädigungen im Mauerwerk sind durch kleine Senkungen im Fundament der Türme allein nicht ganz erklärlich; es müssen noch andere Kräfte bei diesen Zerstörungen mitgewirkt haben. Solche lassen sich in dem Einfluß der heftigen Weststürme unschwer erkennen, welche mit voller Wucht die gegen Westen frei liegenden Türme treffen und sie in Schwingungen versetzen, an welchen die Langwände der Kirche nicht teilnehmen können. Die Türme mußten sich deshalb an den schwächsten Verbindungsstellen über den Fenstern von den Langmauern trennen. Auch die Bewegungen, welche im oberen Teil des Nordturmes durch die Glockenschwingungen hervorgerufen werden, können bei der Lostrennung der Türme von den Langmauern mitgewirkt haben, wenn auch diese Ursache hier als eine mehr nebensächliche erscheint, da die Glockenschwingungen in der Querrichtung des Kirchenschiffes erfolgen.

Lageänderung der Turmspitze.

Wie bereits angedeutet, ist die Lage der Spitze des Nordturmes der Frauenkirche für die Landesvermessung von besonderer Bedeutung, da die Projektion dieses Punktes auf die

Meeresfläche den Ursprungspunkt des bayerischen Koordinatensystemes bildet. Es soll daher noch näher untersucht werden, ob die an der Frauenkirche beobachteten Senkungserscheinungen nicht auch mit einer Verschiebung dieses wichtigen Punktes in Zusammenhang stehen, die sich bei der Einpassung der neu gemessenen südbayerischen Dreieckskette in das Hauptdreiecksnetz nach den Sitzungsberichten 1910, 11. Abh., Tabelle III, Nr. 6 als Koordinatenänderung des Nullpunktes $dx_0 = + 0{,}05$ m und $dy_0 = + 0{,}34$ m ergeben hat, wobei dx_0 und dy_0 als Verbesserungen der Koordinatenwerte der Landesvermessung zu nehmen sind. Diese Änderung entspricht einer Verschiebung der den Nullpunkt bildenden Turmspitze um 5 cm gegen Süden und 34 cm nach Osten, die im Zeitraum zwischen dem Beginn der Ausführung der Landesvermessung im Jahre 1801 bis zum Jahre 1904 eingetreten sein müßte.

Wie a. a. O. näher ausgeführt ist, kann aus den auf dem Nordturm der Frauenkirche in den Jahren 1801/05, 1855/57 und 1904 ausgeführten Winkelmessungen eine Lageänderung des Hauptdreieckspunktes München gegen die ihm benachbarten Hauptdreieckspunkte sowie auch gegen die im Stadtbezirk von München gelegenen, bei der Katastertriangulierung benützten Turmpunkte mit Sicherheit nicht gefolgert werden. Es wurde vielmehr der Meinung Ausdruck gegeben, daß die erwähnte scheinbare Nullpunktsverschiebung durch die Fehler der älteren Winkelmessung und die bei der Berechnung umfangreicher Dreiecksnetze vorkommenden sogenannten Netzverschiebungsfehler ihre Erklärung finden müßten. Auch die neuerdings durch Theodolitmessungen vorgenommene Ablotung der den Hauptdreieckspunkt München bildenden Helmstangenspitze des Nordturmes der Frauenkirche bestätigt die erwähnte Anschauung, da die Abweichung dieser Spitze von der Achse des Turmmauerwerkes im Betrag von ca. 5 cm nicht nach Osten, sondern nach Westen fällt und höchstwahrscheinlich schon zur Zeit der Erbauung der Kirche entstanden ist. Das Zusammenfallen der Turmspitze mit der Achse des Turmmauerwerkes ist durch die im Jahre 1904 bei Gelegenheit der Vornahme der Winkel-

messungen auf den in den Fensternischen der Turmstube errichteten Pfeilern durch die daselbst für Zentrierungszwecke sehr sorgfältig ausgeführten Liniennetzmessungen nachgewiesen worden.

Bei der Nachforschung nach etwa vorhandenen Netzverschiebungsfehlern war besonders die Unsicherheit der Lage solcher Dreieckspunkte zu berücksichtigen, die zur Zeit der Landesvermessung mit Pyramidensignalen oder auch durch die auf den Berggipfeln stehenden Holzkreuze bezeichnet waren und erst nachträglich mit Steinen dauerhaft versichert wurden.

Da beim Setzen dieser Versicherungssteine die Pyramiden und Kreuze vielfach zerstört oder in ihrer Stellung verändert waren, konnte die ursprüngliche Lage der Messungspunkte meist nur nach den im Boden noch vorhandenen Resten des Holzwerkes beurteilt werden. Es war daher in vielen Fällen eine scharfe Zentrierung der Versicherungssteine nicht möglich. Die auf den neu versicherten Stationspunkten ausgeführten Winkelmessungen führen daher nicht selten zu kleinen Abweichungen in den daraus berechneten Koordinaten gegenüber den Werten der Landesvermessung. Eine sichere Ermittelung der ursprünglichen Lage der Stationspunkte durch Vergleich der neuen Winkelmessungen mit den ursprünglichen kann aber nur dann ausgeführt werden, wenn die bei den neuen Winkelmessungen benützten Zielpunkte identisch mit jenen der Landesvermessung sind, oder gegen diese mit Sicherheit eingemessen werden können.

Als solche können in der Regel nur die auf Türmen festgelegten Punkte gelten, unter der Voraussetzung, daß die Türme seit der Zeit ihrer früheren Benützung bei der Landesvermessung durch Umbauten nicht verändert worden sind, was übrigens zumeist aus den pfarramtlichen Akten mit Sicherheit festgestellt werden kann.

Bei den kürzlich unternommenen Versuchen, die im westlichen Teil der südbayerischen Dreieckskette in den Jahren 1888 bis 1894 ausgeführten Azimutmessungen mit den im Jahre 1904 vorgenommenen Dreieckswinkelmessungen in Einklang zu bringen,

ergaben sich gewisse Widersprüche, welche begründete Zweifel an der Identität der durch nachträgliche Versicherung festgelegten Hauptdreieckspunkte Aenger und Grünten in Schwaben mit den gleichnamigen Punkten der Landesvermessung erweckten.

Dadurch wurde eine Neuberechnung der Koordinaten des ursprünglichen Ortes der beiden genannten Punkte veranlaßt, wobei die Voraussetzung gemacht wurde, daß die als Ausgangspunkte für die Berechnung gewählten benachbarten Turmpunkte Roggenburg, Kirchheim, Peißenberg und Waldburg seit der Landesvermessung unverändert geblieben seien.

Bei dieser Berechnung kamen sowohl die an den eben genannten Hauptnetzpunkten, als auch die in den zu bestimmenden beiden Punkten neu gemessenen Winkel zur Verwertung.

Da der gegenseitige Abstand der Punkte Aenger und Grünten im Vergleich mit ihrer Entfernung von den genannten Ausgangspunkten wesentlich geringer ist, schien es vorteilhaft, ihre Lage gemeinsam nach dem Verfahren der Doppelpunkteinschaltung zu berechnen und sowohl die in den neu zu bestimmenden Punkten, als auch die in den Turmpunkten beobachteten Winkel zu verwerten; dabei wurden die von letzteren Punkten auslaufenden äußeren Richtungen mit dem Gewicht $^3/_4$, die auf den neu zu bestimmenden Punkten selbst beobachteten inneren Richtungen mit dem Gewicht 1 in die Ausgleichung eingeführt, welche mit insgesamt 14 Richtungen zur Durchführung gelangte.

Die Berechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate lieferte den mittleren Richtungsfehler $m = \pm 0.''77$ und die wahrscheinlichsten Koordinatenwerte der neu versicherten Stationspunkte nebst den zugehörigen mittleren Fehlern

$$\text{Aenger} \begin{cases} x = - \ 45909{,}41 \pm 0{,}14 \text{ m} \\ y = + \ 106022{,}01 \pm 0{,}08 \ \text{„} \end{cases}$$

$$\text{Grünten} \begin{cases} x = - \ 64146{,}21 \pm 0{,}18 \ \text{„} \\ y = + \ 94296{,}02 \pm 0{,}17 \ \text{„} \end{cases}$$

Berechnet man mit diesen verbesserten Koordinaten die in meiner Abhandlung in den Sitzungsberichten vom Jahre 1910

durchgeführte Netzeinpassung nach dem Verfahren von Helmert aufs neue, so ändern sich die dort in Tabelle III angegebenen Zahlenwerte und man erhält die in nachstehender Tabelle II gegebene Fehlerzusammenstellung, in welcher die früher angewendeten allgemeinen Bezeichnungen beibehalten sind.

Wie zu erwarten war, haben sich durch Einführung der neuen Koordinatenwerte für die Punkte Aenger und Grünten nicht nur deren Koordinatenunterschiede dx und dy und zwar besonders in dy von + 87 cm in + 58 cm bei Aenger und von + 84 cm in + 43 cm bei Grünten, sondern auch die Ordinatenverbesserungen r_y nicht unbeträchtlich vermindert und zwar für Aenger von + 47 cm auf + 33 cm und für Grünten von + 41 cm auf + 15 cm.

Auch die mittleren Netzfehler sind im allgemeinen kleiner geworden. Die scheinbare Verschiebung des Punktes München in der Ordinatenrichtung ist jedoch nur von - - 33 cm auf — 30 cm zurückgegangen und kann im Zusammenhalt mit den früheren Ausführungen dieser Abhandlung nicht als die Folge einer im Laufe des letzten Jahrhunderts eingetretenen Neigungsänderung der Turmachse betrachtet werden, sondern ist nur durch Identitätsfehler in der Lage benachbarter Hauptdreieckspunkte zu erklären, deren Einfluß sich bei der Netzberechnung in der Ordinatenrichtung in ungünstiger Weise angehäuft hat. Hierauf deutet auch die ungleichmäßige Verteilung der Vorzeichen der Ordinatenverbesserungen hin. Die größten Ordinatenverbesserungen von + 59 und + 65 cm zeigen die Punkte Hochgern und Asten, von welchen der erstere bei der Landesvermessung mit einem Pyramidensignal bebaut war,[1]) während der Turm der Kirche in Asten ein Kuppeldach mit Holzstuhl von 17,4 m Höhe trägt, welches nach einer Bemerkung in der bei den Akten des Kgl. Landesvermessungsamtes befindlichen alten Stationsbeschreibung beträchtliche Seitenschwankungen aufweist, so daß die bei den älteren Winkelmessungen als Zielpunkt benützte Helmstangenspitze nicht als unveränderlich gelten kann.

[1]) Vgl. A. G. A., Heft 2, S. 10.

Tabelle

Fehlerzusammenstellung

Nr.	Stationen	dx	dy	1. Neuberechnung			
				v_x	v_y	r_x	r_y
		cm	cm	cm	cm	cm	cm
1	Aenger Pyr.	+1	+58	+17	+25	−16	+33
2	Roggenburg Turm . .	+15	+35	+11	+20	+4	+15
3	Peißenburg Turm . .	−25	+33	+10	+30	−35	+3
4	Stauffersberg Pyr. . .	+27	+2	+6	+21	+21	−19
5	Altomünster Turm . .	+16	+9	+3	+25	+13	−16
6	München n. Fr.-Turm .	0	0	+2	+30	−2	−30
7	Aufkirchen Turm . .	0	0	−1	+30	+1	−30
8	Mitbach Turm . . .	+7	+8	−1	+32	+8	−24
9	Wendelstein Pyr. . .	+33	+48	+4	+37	+29	+11
10	Hochgern Pyr. . . .	+10	+100	−1	+41	+11	+59
11	Asten Turm	+4	+93	−5	+28	+9	+65
12	Schweitenkirchen Turm	+12	+4	−1	+26	+13	−22
13	Kirchheim Turm . . .	−4	+7	+10	+22	−14	−15
14	Grünten Pyr.	−16	+43	+18	+28	−34	+15
15	München, Sternwarte .	−7	−2	+2	+30	−9	−32
		$\lvert dx\rvert = 73$ $+ dx_0 = +5$	$\lvert dy\rvert = 438$ $+ dy_0 = +29$	$\delta = +0.20''$ $\mu = +8.8 \cdot 10^{-7}$		$m_x = \pm 18$ cm	$m_y = \pm 31$ cm

II.

der Netzeinpassung.

2. Neuberechnung				3. Neuberechnung				Restfehler	
v_x cm	v_y cm	r_x cm	r_y cm	v_x cm	v_y cm	r_x cm	r_y cm	R_x cm	R_y cm
+ 3	+ 37	− 2	+ 21	− 3	+ 43	+ 4	+ 15	− 3	+ 43
+ 15	+ 30	0	+ 5	+ 15	+ 33	0	+ 2	+ 15	+ 33
− 1	+ 24	− 24	+ 9	− 8	+ 22	− 17	+ 11	− 8	+ 22
− 14	+ 21	+ 13	− 19	+ 16	+ 20	+ 11	− 18	+ 16	+ 20
+ 9	+ 13	+ 7	− 4	+ 9	+ 8	+ 7	+ 1	+ 9	+ 8
+ 2	+ 13	− 2	− 13	− 3	+ 4	+ 3	− 4	− 3	+ 4
+ 3	+ 7	− 3	− 7	0	− 4	0	+ 4	0	− 4
− 1	+ 5	+ 8	+ 3	− 6	− 6	+ 13	+ 14	− 6	− 6
− 11	+ 11	+ 44	+ 37	− 17	+ 12	+ 50	+ 36	− 17	+ 12
.	.	.	.	− 20	− 1	+ 30	+ 101	− 20	− 1
.	.	.	.	− 10	− 11	+ 14	+ 104	− 10	− 11
+ 10	+ 8	+ 2	− 4	+ 9	− 1	+ 3	+ 5	+ 9	− 1
+ 11	+ 28	− 15	− 21	+ 9	+ 29	− 13	− 22	+ 9	+ 29
− 2	+ 37	− 14	− 6	− 11	+ 42	− 5	+ 1	− 11	+ 42
+ 2	+ 12	− 9	− 14	− 3	+ 4	− 4	− 6	− 3	+ 4
$\delta = +0.20''$ $\mu = -19.2 \cdot 10^{-7}$		$m_x = \pm 16$ cm	$m_y = +16$ cm	$\delta = +0.26''$ $\mu = -31.08 \cdot 10^{-7}$		$m_x = +8.5$ cm	$m_y = +11$ cm	$M_x = +10.8$ cm	$M_y = +21.3$ cm

In Anbetracht der für die örtliche Lage der Punkte Hochgern und Asten bestehenden Unsicherheit sind bei einer weiteren Netzeinpassungsberechnung diese beiden Punkte ganz außer Betracht geblieben, mit dem aus der vorstehenden Fehlerzusammenstellung ersichtlichen Ergebnis, daß die Maximalverbesserung mit $r_x = +44$ cm und $r_y = +37$ cm jetzt der Hauptdreieckspunkt auf dem 1838 m hohen Gipfel des Wendelstein zeigt, woselbst ursprünglich die alte Kapelle als Ganzes, später eine daneben errichtete Holzpyramide und nach deren Verfall ein an ihrer Stelle errichtetes und wiederholt erneuertes Holzkreuz zur Bezeichnung des Dreieckspunktes gedient hat.

Im Jahre 1899 ist dieser Punkt durch Beamte des K. Landesvermessungsamtes mit einem Granitstein neu versichert und über diesem im Jahre 1904 für die Winkelmessungen in der südbayerischen Dreieckskette ein Betonpfeiler mit zentrisch eingesetztem Messingbolzen erbaut worden, welcher nunmehr den Hauptdreieckspunkt Wendelstein bezeichnet.

Bei den vielfachen Veränderungen, welche dieser Punkt seit der Zeit der Landesvermessung erfahren hat, darf man sich nicht wundern, wenn derselbe jetzt nicht unbeträchtliche Koordinatenabweichungen zeigt.

Bei der zweiten Netzeinpassung haben nunmehr die mittleren Koordinatenfehler für beide Achsrichtungen die gleiche Größe erhalten:

$$m_x = m_y = \pm 16 \text{ cm}.$$

Der Richtungsfehler δ ist unverändert geblieben. Der Maßstabfehler $\mu = -19{,}2 \cdot 10^{-7}$ hat dagegen sein Vorzeichen gewechselt und ist etwas größer als bisher geworden. Für den Normalpunkt München endlich bleibt die ohnehin sehr geringe Abszissenverbesserung dem Wert nach ungeändert, die Ordinatenverbesserung dagegen erhält den wesentlich verminderten Betrag $r_y = -13$ cm, der den mittleren Koordinatenfehler nicht erreicht.

Die große nunmehr auf den Punkt Wendelstein treffende Koordinatenverbesserung, die Unsicherheit der ursprünglichen Punktfestlegung und die mit derselben im Laufe der Zeit mehr-

fach vorgenommenen Veränderungen ließen es indessen angebracht erscheinen, auch diesen Punkt bei der Netzeinpassung als unzuverlässig auszuschalten und eine dritte Neuberechnung ohne den genannten Punkt auszuführen, bei welcher nunmehr die scheinbare Verschiebung des Normalpunktes München in der Abszissen- bzw. Ordinatenrichtung auf + 3 cm und — 4 cm zurückgegangen ist. Der mittlere Koordinatenfehler nahm dabei die Werte $m_x = \pm 8{,}5$ cm und $m_y = \pm 11$ cm an, die Orientierungsverbesserung ist $\delta = + 0''.26$ und die Maßstabverbesserung $\mu = -31 \cdot 10^{-7}$.

Eine Veränderung in der Lage der als Normalpunkt der Landesvermessung dienenden Spitze des Nordturmes der Frauenkirche in München ist somit aus den Ergebnissen der im letzten Jahrzehnt ausgeführten Winkelmessungen und Koordinatenberechnungen nicht nachweisbar.

Die aus der Fehlerausgleichung hervorgehenden Größen r_x und r_y stellen die Verschiebungen der Punkte der Landesvermessung in der Richtung der beiden Koordinatenachsen in der Form von Koordinatenverbesserungen dar, welche nach Beseitigung der systematischen Orientierungs- und Maßstabfehler noch nötig werden, um diese Punkte mit den entsprechenden Punkten der südbayerischen Dreieckskette möglichst gut in Deckung zu bringen. Für die durch Türme festgelegten Punkte überschreiten diese Verbesserungen nur wenig die mittleren Koordinatenfehler.

Weit größere Verbesserungen und zwar im Betrag bis zu 1 m treffen dagegen auf die Ordinaten der am Nordrand des Gebirges und in dessen Vorland gelegenen Punkte, die bei der Landesvermessung mit Pyramidensignalen bebaut waren, und erst nachträglich nach Ablauf mehrerer Jahrzehnte mit Steinen dauernd versichert worden sind, deren Standort nur nach den im Boden noch vorhandenen spärlichen Signalresten bestimmt werden konnte. Die Vorzeichen der Ordinatenverbesserungen dieser Punkte sind überwiegend positiv, was einer regionalen Punktverschiebung gegen Westen entspricht. Doch dürfte es

gewagt erscheinen, hieraus auf eine tektonische Ursache der Lageänderung dieser Punkte zu schließen.

Weit wahrscheinlicher rührt diese scheinbare Punktverschiebung von Beobachtungsfehlern und von der Art der Fehlerausgleichung bei der Berechnung des Dreiecksnetzes der Landesaufnahme her, welche nicht einheitlich für das ganze Netz, sondern in einzelnen zu Polygonen zusammengefaßten Gruppen von Dreiecken erfolgte, die zum Teil eine recht ungünstige Form besitzen und nicht ohne Anschlußzwang zu verbinden waren. Die zur Zeit in Vorbereitung stehende Neutriangulierung von Bayern wird über diese Punktverschiebungen nähere Aufschlüsse bringen.

Berechnet man schließlich mit Hilfe der Werte r_x, r_y die verbesserten Koordinatenwerte der Landestriangulierung für die Punkte der südbayerischen Dreieckskette und vergleicht sie mit den durch die Neumessung erhaltenen Werten durch Bildung ihrer Unterschiede, so erhält man den Charakter unregelmäßiger Fehler tragende Restfehler, welchen die Mittelwerte $m'_x = \pm 11$ cm und $m'_y = \pm 21$ cm entsprechen. Die größten Einzelfehler im Betrag von $+ 0{,}43$ m und $+ 0{,}42$ m in der Ordinatenrichtung zeigen die nach dem Verfahren der Doppelpunkteinschaltung neu bestimmten Punkte Aenger und Grünten, welche wegen ihrer Lage in der südwestlichen Ecke des bayerischen Netzes mit diesem nur durch nach einer Seite gerichtete Strahlen verbunden sind und deshalb gegen einseitige Verschiebung durch Beobachtungsfehler nicht gut gesichert erscheinen. Bei den übrigen, zuverlässig identischen Punkten ist jedoch die gute Übereinstimmung der älteren und neuen Lagebestimmung, welche in der geringen Größe der Restfehler zum Ausdruck gelangt, als eine ganz befriedigende zu bezeichnen.

Frauenkirche von Westen.

Die Gezeiten, Seiches und Strömungen des Meeres bei Aristoteles.

Von **A. Endrös.**

Vorgelegt von S. Günther in der Sitzung am 6. November 1915.

Einleitung.

Bei der Bearbeitung des über zwei Jahrtausende alten Euripusproblems war ich veranlaßt, die Literatur der Alten zu durchsuchen. Während ich nun in den vielen bekannteren Literaturstellen nur nebensächliche Punkte der Frage berührt fand, konnte ich in den Schriften des Aristoteles ganz staunenswerte Kenntnisse entdecken.[1]) So kannte der Stagirite bereits die Seiches der Meere und deren Ursachen und die Entstehung der Meereswogen durch Wind und Erdbeben. Ferner war ihm die Lösung des Euripusproblems ebenso weit bekannt, wie F. A. Forel sie wieder finden konnte. Es können somit nicht die Euripusströmungen es gewesen sein, die Aristoteles nicht ergründen konnte, sondern nur die rätselhaften Gezeitenanomalien bei Chalkis. In diesen ist auch der Grund dafür zu suchen, daß er, wie aus seinen Schriften zu ersehen ist, über die Vorstellung der Ebbe und Flut als eine Art Ein- und Aus-

[1]) Die Durcharbeitung der Schriften im Urtext bot an der Hand der lateinischen Übersetzung keine besonderen Schwierigkeiten, nachdem ich an meinem verehrten Freund und Kollegen Herrn Professor Dr. F. Schühlein, der als Posidoniusforscher mit der einschlägigen Literatur vertraut war, einen erfahrenen Berater zur Seite hatte und mir in der Bibliothek des hiesigen Lyzeums alle Hifsmittel zur Verfügung standen.

atmen der Erde nicht hinausgekommen ist entgegen einer Stelle bei den Doxographen, nach welcher er die Gezeiten als Schwankungen angesehen haben soll. Dort können nämlich nur meteorologische Fluten gemeint sein. Da nun der große Philosoph gerade auf diesem Gebiete bis heute so verkannt worden ist, möchte ich es nicht unterlassen, die Ergebnisse zu veröffentlichen; dabei darf ich nicht übergehen, daß ich die Anregung dazu Herrn Geheimrat Professor Dr. Sigmund Günther in München verdanke, der ebenso wie meiner Arbeit über das Euripusproblem auch dieser sein besonderes Interesse schenkte.

Die Stelle bei Aristoteles über die Gezeiten.

In den Meteorologika des Aristoteles Buch II, Kapitel 8 findet sich eine Stelle, welche für unsere Frage von größter Bedeutung ist, die aber merkwürdiger Weise bis heute fast ganz unbeachtet geblieben ist. Und doch enthält sie den Beweis dafür, daß Aristoteles die Erscheinung der Ebbe und Flut wohl gekannt, von dem Bewegungsvorgang aber eine ganz andere Vorstellung sich gemacht hat, als man auf Grund der Stelle bei den Doxographen[1]) annehmen mußte. Weiterhin ersieht man aus der Stelle, daß Aristoteles den Strömungsvorgang des Euripus näher gekannt hat.

Das Kapitel 8 behandelt die Theorie der Erdbeben, die sich Aristoteles ausschließlich durch die in die Poren und Hohlräume der Erde eingeschlossenen Pneumata entstehend denkt. Letztere selbst entstehen durch die fortgesetzt vor sich gehende Ausdünstung trockener und feuchter Dünste innerhalb und außerhalb der Erde und bewegen sich bald einwärts, bald auswärts und manchmal auch teils ein- teils auswärts. Fließen die Pneumata vollständig einwärts, so ist Windstille. Bei Windstille nun entstehen die meisten und größten Erdbeben. „Und nachts entstehen mehr und größere Erdbeben, diejenigen bei Tag aber um die Mittagszeit. Am ruhigsten ist gewöhnlich die Mittagszeit — denn die Sonne beendigt, wenn sie die meiste Kraft hat, die in die Erde hinein gerichtete Ausdünstung; sie hat aber die größte Kraft um die Mittagszeit —." Hier folgt die Stelle:[2])

[1]) Diels Dox. Graeci, S. 382.

[2]) Ed. acad. reg. boruss., Berol. 1831, Bd. I, Meteor. II. 8, S. 366, 1. — Lateinische Übersetzung ebenda, Bd. III, S. 191, 2.

„καὶ αἱ νύκτες δὲ τῶν ἡμερῶν νηνεμώτεραι διὰ τὴν ἀπουσίαν τὴν τοῦ ἡλίου· ὥστ' εἴσω γίγνεται πάλιν ἡ ῥύσις, ὥσπερ ἄμπωτις εἰς τοὐνάντιον τῆς ἔξωθεν πλημμυρίδος, καὶ περὶ ὄρθρον μάλιστα· τηνικαῦτα γὰρ καὶ τὰ πνεύματα πέφυκεν ἄρχεσθαι πνεῖν. ἐὰν οὖν εἴσω τύχῃ μεταβάλλουσα ἡ ἀρχὴ αὐτῶν ὥσπερ Εὔριπος, διὰ τὸ πλῆθος ἰσχυρότερον ποιεῖ τὸν σεισμόν." Was ich übersetze: „Und die Nächte sind ruhiger als die Tage wegen der Abwesenheit der Sonne; deshalb geschieht das Fließen wieder einwärts, wie die Ebbe in entgegengesetzter Richtung der auswärts gerichteten Flut, und bei Tagesanbruch am stärksten;[1]) in diese Zeit fällt auch der Beginn des Wehens der Winde. Wenn nun gerade damit zusammentrifft, daß die Winde in ihrem Beginnen nach innen sich richten wie der Euripus, so macht es das Erdbeben wegen der Menge stärker."

Die Stelle enthält zunächst einen bei klarem Himmel täglich sich abspielenden Strömungsvorgang der Pneumata. Dieselben fließen in der einen Hälfte des Tages einwärts, in der anderen auswärts. Die Sonne beendigt das Einwärtsfließen um die Mittagszeit, worauf das Auswärtsfließen beginnt, das nachts wieder in ein Einwärtsfließen übergeht. Letzteres erreicht gegen Tagesanbruch sein Maximum um dann wieder abzunehmen bis Mittag. Unschwer ist hierin eine bei klarem Himmel sich wirklich abspielende periodische Änderung der Lufttemperatur zu erkennen. Mit zunehmendem Sonnenstand erwärmt sich bekanntlich die Luft und steigt in die Höhe, am stärksten nachmittags. Nach Sonnenuntergang kühlt sich die Luft ab und des Nachts tritt ein Senken der Luftschichten ein und die kalte Luft dringt in Hohlräume, Keller etc. ein, am stärksten vor Sonnenaufgang, weil die Lufttemperatur am niedrigsten ist. Eine Beobachtung dieses Vorganges scheint obigem Strömungsvorgange zugrunde zu liegen.

Diesen unsichtbaren Vorgang sucht nun Aristoteles seinen Lesern klar zu machen, indem er einen sichtbaren Vorgang, den der Ebbe und Flut, zum Vergleiche heranzieht. Wir können umgekehrt aus dieser Stelle schließen, daß Aristoteles sich das Ebben als Einwärtsfließen des Wassers in die Erde und das Fluten als ein Auswärtsfließen in entgegengesetzter

[1]) F. Vatablus übersetzt μάλιστα mit creberrime, was dem Sinne nach nicht möglich ist.

Richtung vorgestellt hat. Der Umstand ferner, daß er die Gezeitenbewegung überhaupt zur Veranschaulichung heranzieht, läßt auch den Schluß zu, daß man allgemein den Vorgang der Gezeitenbewegung sich als eine Art Ein- und Ausatmen gedacht hat. Aristoteles hat also keine eigene neue Theorie der Gezeiten aufgestellt; denn die Meteorologika gelten als das zuletzt geschriebene naturwissenschaftliche Werk des Philosophen.

Daß man auch schon zu den Zeiten des Aristoteles in Griechenland die Erscheinung der Ebbe und Flut wohl gekannt haben muß, läßt sich auf Grund der neuen Ergebnisse der Gezeitenforschung annehmen. Es zeigen sich nämlich die Gezeiten an einigen Punkten Griechenlands entgegen der früheren Annahme sehr augenfällig, wie im Golfe von Euboea[1]) und im korinthischen Meerbusen,[2]) wo überall die Hubhöhen den für das Mittelmeer großen Betrag von 1 Meter erreichen. Daß Aristoteles selbst die Erscheinung in ihrem Verlaufe näher kannte, dürften wir wohl schon deshalb annehmen, weil er sich häufig in Chalkis aufgehalten hat,[3]) wo die Gezeiten noch dazu sich in den Euripusströmungen zeigen. Nun finden wir in unserer Stelle sogar die Bestätigung dieser Annahme. Er zieht nämlich bei einem weiteren Vergleich die Euripusströmungen selbst heran.

Bei Tagesanbruch ist nach dem oben besprochenen Vorgange das Einwärtsfließen der Pneumata am stärksten. Wenn dann noch die Winde, die um diese Zeit im Entstehen begriffen sind, dazu einwärts sich wenden, wie der Euripus, so wird das Erdbeben wegen der Menge der Pneumata stärker. Man beachte zunächst die ganz kurze Erwähnung des Meeresarmes, der in seinen Strömungsvorgängen ein so kompliziertes Problem von jeher bildete. Jedenfalls ist unsere Stelle des-

[1]) O. Krümmel, Zum Problem des Euripus, Pet. Mitt. 1888, S. 332.

[2]) G. Wegemann, Beiträge zu den Gezeiten des Mittelländischen Meeres. Ann. d. Hydr. u. Marit. Met., 1907.

[3]) Pauly, Realenzyklopädie d. klass. Alt., VI. Bd. Stuttgart 1909, S. 1021.

halb nicht beachtet und gewürdigt worden, weil die so kurze Erwähnung des Euripus nicht verstanden worden ist, und man muß das Euripusproblem schon näher kennen um einzusehen, daß die zum Vergleich herangezogenen Wasserbewegungen mit denjenigen der Pneumata sehr gut übereinstimmen. Um dies zu erläutern müssen wir auf die Gezeitenbewegungen der bei Chalkis zusammenstoßenden Meeresteile kurz eingehen.

Im Nordhafen von Chalkis finden sich ausgesprochene halbtägige Gezeiten, welche Hubhöhen bis zu 1 Meter erreichen können, während im Südhafen die Halbtagstiden nie 15 Zentimeter Höhe erreichen, und so unter den sonstigen Niveauänderungen ganz verborgen bleiben. Der Euripus beginnt also nach Norden zu strömen, somit einwärts, wenn der Wasserstand im Nordhafen beim Ebben unter das südliche Niveau hinabgeht, das ungefähr mit Mittelwasser übereinstimmt. In gleicher Weise beginnt der Strom sich südwärts zu wenden, wenn beim Steigen des Wasserstandes im Nordhafen infolge der Flut das nördliche Niveau über das südliche sich erhebt. Die nordwärts gerichtete Strömung entspricht dem einwärts gerichteten Winde im obigen Vergleiche, der gerade dann sich nach innen richtet, wenn das Einwärtsströmen am stärksten ist, das ist gegen Tagesanbruch. Auch der Euripus beginnt eben dann einwärts zu fließen, wenn das Fallen des Wassers im Nordhafen am raschesten erfolgt; das ist der Fall beim Passieren des Mittelwassers. Der Vergleich der Ebbe und Flut mit dem Ein- und Auswärtsströmen der Pneumata stimmt nämlich auch darin überein, daß beide sogenannte periodische Bewegungen sind. Ist der höchste Wasserstand erreicht, so beginnt das Wasser erst allmählich zu fallen und fällt dann immer rascher, bis es das Mittelniveau passiert und das Maximum der Geschwindigkeit hat, von wo ab das Sinken wieder langsamer und langsamer erfolgt, bis zum niedrigsten Wasserstand. In gleicher Weise geht das Steigen vor sich. So ist auch das Ein- und Auswärtsfließen der Pneumata nach der Darstellung des Aristoteles zu denken.

Wir können also aus obiger Stelle bei Aristoteles den Nachweis liefern, daß er die Gezeiten selbst und die periodische Änderung des Wasserstandes wohl gekannt hat, ebenso daß er von den mit den Gezeiten zusammenhängenden Strömungen des Euripus eine genaue Kenntnis besaß. Auch müssen wir, wie oben schon, auch hier wieder annehmen, daß er auch bei seinen Lesern eine genaue Bekanntschaft mit den Euripusströmungen voraussetzt, wenn er überhaupt annehmen konnte,

daß er mit dieser kurzen Andeutung verstanden werde. Es sind nun in unserer Stelle nur die sogenannten regelmäßigen Euripusströmungen gemeint, weil für sie nur der Vergleich stimmt und sie nur durch die Gezeitenbewegung in der erwähnten Weise verursacht werden. Die Gezeiten des Nordhafens werden aber mit der Annäherung an die Zeiten der Quadraturen des Mondes, das ist des ersten und letzten Viertels, wie überall im Meere, immer kleiner und im Golf von Euboea haben sie die Eigentümlichkeit, daß sie in einem großen Teile des Jahres um diese Zeit ganz verschwinden. Dann treten die von alters her bekannten unregelmäßigen Strömungen auf, welche dem Euripus eine solche Berühmtheit verschafft haben. Daß nun Aristoteles auch diese kannte und sogar richtig erklärte, können wir aus einer weiteren Stelle ersehen.

Zuvor ist noch eine Unklarheit im Texte unserer obigen Stelle zu erwähnen, wo ἡ ἔξωθεν πλήμμυρις steht, während dem Sinne nach nur ἔξω erwartet werden kann, wenn anders der Vergleich mit den Pneumata stimmen soll. Einige Ausgaben haben auch ἔξω, wie in den Fußnoten erwähnt ist. Auch F. Vatablus[1]) übersetzt die Stelle im Sinne von ἔξω: „quomodo aquarum influxus in contrariam atque effluxus partem fit." Ich halte es nicht für unmöglich, daß hier eine Änderung eines Abschreibers vorliegt. Die von außen her gerichtete Flut entsprach nämlich der Vorstellung vom Bewegungsvorgang der Ebbe und Flut einzig und allein, weil an allen Küstenpunkten die Flut von außen her kommt. Nur bei Chalkis haben wir diese Unregelmäßigkeit, auf die J. P. Babin[2]) zuerst aufmerksam gemacht hat. Der Grund für diese Anomalie ist darin zu suchen, daß, wie wir oben schon gesehen haben, der vom Aegäischen Meere viel mehr abgeschlossene Golf von Euboea so starke Gezeiten aufweist, aber der mit dem Meere unmittelbar zusammenhängende südliche Golf von Petali so viel wie keine halbtägigen Gezeiten zeigt. Deshalb geht die Flutströmung nicht von außen herein, sondern auswärts, der Ebbestrom aber einwärts, nicht umgekehrt, wie es an allen anderen Buchten und Küstenpunkten der Fall ist.

[1]) Übers. d. Meteor., zit. S. 356, p. 191, 2.
[2]) Vgl. Pet. Mitt. 1888, S. 331.

Die Seichesbewegungen des Meeres bei Aristoteles.

Eine zweite ozeanographisch sehr wichtige Stelle findet sich im 1. Kapitel des II. Buches der Meteorologika, wo vom Meere und seiner Entstehung die Rede ist. Dieselbe enthält die merkwürdige Tatsache, daß Aristoteles die Seiches der Meere wohl gekannt hat. Die Stelle in Meteor. II, 1[1]) lautet:

„. . . *ῥέουσα δ' ἡ θάλαττα φαίνεται κατὰ τὰς στενότητας, εἴ που διὰ τὴν περιέχουσαν γῆν εἰς μικρὸν ἐκ μεγάλου συνάγεται πελάγους, διὰ τὸ ταλαντεύεσθαι δεῦρο κ' ἀκεῖσε πολλάκις. τοῦτο δ' ἐν μὲν πολλῷ πλήθει θαλάττης ἄδηλον· ἡ δὲ διὰ τὴν στενότητα τῆς γῆς ὀλίγον ἐπέχει τόπον, ἀναγκαῖον τὴν ἐν τῷ πελάγει μικρὰν ταλάντωσιν ἐκεῖ φαίνεσθαι μεγάλην.*"

„Flutend aber sieht man das Meer längs der eingeengten Stellen, wenn irgendwo es sich infolge der Umschließung durch das Land aus der weiten Meeresfläche in einen kleinen Raum zusammenzieht, weil das Meer häufig her und hin schwankt. Diese Erscheinung bleibt auf offenem Meere unbemerkt; wo es aber infolge der Einengung durch das Land wenig Platz hat, dort muß die auf dem weiten Meere kleine Schwankung notwendig vergrößert sich zeigen."

Diese ganze Stelle könnte ungeändert in ein modernes Lehrbuch der Ozeanographie aufgenommen werden. Dabei ist aber zu beachten, daß erst nach den Forschungen der beiden letzten Jahrzehnte unser Wissenstand so weit ist um das vorliegende Gesetz aufstellen zu können. Im Jahre 1869 nämlich hatte F. A. Forel[2]) an dem Eingang des Hafens von Morges am Genfersee, also auch an einer Einengung, ein solches Hin- und Herfließen beobachtet und war dann auf Grund mehrjähriger Untersuchungen mit Registrierapparaten zu dem Ergebnis gekommen, daß diese lokale Erscheinung nur eine Folge der periodischen Schwankungen des ganzen Sees ist, welche dann nach einer Lokalbezeichnung am Genfersee in der Wissenschaft allgemein Seiches genannt wurden. Forel hat dann die Untersuchung der gleichen Bewegungen der Meere angeregt und erst in den letzten 20 Jahren konnten diese Erscheinungen in den Meeren soweit erforscht werden, daß man die

[1]) Ed. ac. Bor., zit. S. 356, p. 354, 1.

[2]) F. A. Forel, Le Léman II. Lausanne 1895, S. 53.

längst bekannten Schwankungen in den Buchten als eine Folgeerscheinung von Schwankungen des offenen Meeres ansehen muß, welche von Forel als Vibrationen des Meeres bezeichnet wurden. Speziell haben die Japaner[1]) nachgewiesen, daß die Schwankungen auch außerhalb der Buchten mit gleicher Periodendauer zu beobachten sind, aber so kleine Amplituden haben, daß sie unter den anderen Niveauänderungen ganz verborgen bleiben. Die moderne Seichesforschung hat also erst in den letzten Jahren nachweisen können, was Aristoteles 2200 Jahre früher als Gesetz ausgesprochen hat.

Zu beachten ist, daß die griechische Bezeichnung von Seiche mit *ταλάντωσις* den Bewegungsvorgang auch wirklich ausdrückt, was von keiner anderen lokalen Bezeichnung dieser Naturerscheinung in den verschiedenen Sprachen und Gegenden gesagt werden kann. Dieselbe ist jedenfalls von den Schwankungen des Wagebalkens genommen. Ob Aristoteles auch den Isochronismus der Schwingungen gekannt hat, wie er bei den Schwingungen an der Wage zu beobachten ist, ist nicht wahrscheinlich. Wenigstens sind die Seichesbewegungen ganz selten so regelmäßig, daß man isochrone Bewegungen beobachten kann, weil immer mehrere Schwingungen von verschiedener Periodendauer sich überlagern. Diesen Bewegungsvorgang des Meerwassers bezeichnet Aristoteles auch bloß mit *ῥεῖν*, wobei darunter ein Hin- und Herfließen zu verstehen ist, wie in unserer Stelle bei dem Fluten der Meerengen. Ein Fließen im Sinne eines Flusses, also eine fortschreitende Bewegung in derselben Richtung, kann nach Aristoteles das Meerwasser nicht haben.[2])

Aristoteles spricht an unserer Stelle nur von einer hin- und hergehenden Bewegung des Wassers bei den Seichesschwingungen, wohl weil diese nach seiner Ansicht die Strömungen in den Meerengen nur verursachen. Nun ist aber damit ein Heben und Senken des Niveaus verbunden. Obwohl davon nicht die Rede ist, glaube ich doch, daß Aristoteles diese Bewegung gekannt hat, schon weil das Heben eine notwendige Folge des Herfließens, das Senken des Wegfließens ist. Außerdem fällt das periodische Heben und Senken des Niveaus dem Beobachter am Ufer zunächst in die Augen. Ich selbst

[1]) K. Honda, An investigation of the secondary undulations of oceanic tides. Journ. Coll. Science, Bd. 24. Tokyo 1908.

[2]) Vgl. Ed. ac. Bor., zit. S. 356, p. 354, 1.

konnte an allen Seen erfahren, daß einzelne aufmerksame Beobachter diese viel kleineren Schwankungen wohl kannten. Daß auch die Alten diese „beständig rückkehrende Bewegung aus sich heraus und in sich zurück" wohl gekannt haben, sehen wir aus einer Stelle bei Strabo[1]), der anschaulich schildert, wie dem am Ufer stehenden die Füße bespült und wieder entblößt und wieder bespült werden und das in einem fort, und zutreffend bemerkt, dies geschehe zwar häufiger bei Wind, aber auch bei ruhiger See und bei vom Lande weg wehendem Winde. Diese Bewegungen zeigen sich viel augenfälliger in Buchten und müssen in den vielen Buchten der reich gegliederten griechischen Küste auch von jeher beobachtet worden sein. Besonders starke Schwankungen zeigen sich im Südhafen von Chalkis, wo sie eine Hubhöhe von 30 Zentimeter erreichen können und ständig vorhanden sind, wie Miaulis beobachtet hat.[2]) Diese verursachen auch hauptsächlich die unregelmäßigen und rasch wechselnden Euripusströmungen um die Zeit der Quadraturen des Mondes. Es ist auch sehr wahrscheinlich, daß sie Aristoteles gerade von dort her aus eigener Beobachtung kannte. Die Gezeitenbewegung bleibt nämlich dort unter den ständigen Seichesbewegungen fast ganz verborgen. Weitere Beobachtungen von sehr deutlichen Seiches liegen vor von Posidonia am Ende des korinthischen Meerbusens, von Isthmia am Ende des Saronischen Golfes und von Poros an der gleichnamigen Bucht, welche Beobachtungen mit Registrierapparaten von Makaroff gemacht und von G. Wegemann bearbeitet sind,[3]) wobei Hubhöhen von bis 40 Zentimeter gefunden wurden. Da gerade an den beiden letzten Punkten die Gezeitenbewegungen nur klein sind und diese Schwankungen zum Teil in wenigen Minuten sich wiederholen, so können sie den Anwohnern nicht entgangen sein.

Warum Aristoteles die Mechanik dieser Wasserbewegungen

[1]) Strabo, I, 53.

[2]) Krümmel, Pet. Mit. 1888, p. 135.

[3]) G. Wegemann, Beiträge zu den Gezeiten des Mittelländischen Meeres. Ann. d. Hydr., August 1907.

in ihrem wahren Vorgange weit seiner Zeit vorauseilend klar erkannt hat, läßt sich wohl daraus erklären, daß an den zahlreichen Einengungen des Meeres der griechischen Küsten die horizontale Wasserbewegung leichter beobachtet werden konnte. „Überall da, wo das Meer infolge der Umschließung durch das Land in einen kleinen Raum sich zusammenzieht, muß die auf dem weiten Meere kleine hin- und hergehende Wasserbewegung notwendig vergrößert sich zeigen" sagt deutlich, daß Aristoteles nicht nur die allbekannten Meerengen damit gemeint hat, sondern auch jeden verengten Eingang in eine Bucht oder einen Hafen. Besonders stark sind diese Strömungen in dem schmalen Kanal, der die fast kreisrunde Bucht im Süden von Chalkis mit dem Eretrischen Euripus verbindet, so daß von jeher für die Durchfahrt der Schiffe eigene Anweisungen galten. Auch der Eingang in die südliche Bucht der Insel Lesbos und die Meerenge von Knidos müssen wegen solcher periodischen Strömungen besonders bekannt gewesen sein, da sie als Euripos bezeichnet wurden. Alle diese Strömungen will jedenfalls Aristoteles mit den häufigen Schwankungen des Meeres begründen und er hat darin die vollständig richtige Begründung gefunden, wie man nach dem heutigen Wissensstand sagen kann.

Man muß sich wundern, daß gerade diese Stelle bei Aristoteles so wenig beachtet und gar nicht gewürdigt worden ist. Einen Grund hiefür können wir wohl darin suchen, daß die Stelle über die Seiches im Zusammenhange mit den Strömungen in den Meerengen steht und diese von jeher zu den ungelösten Problemen gehörten. In neuerer Zeit finde ich sie nur von H. Berger erwähnt.[1]) Er sucht aber in den geschilderten Schwankungen Gezeitenbewegungen. Aber schon der Umstand, daß Aristoteles diese Schwankungen „häufig" auftreten läßt, spricht gegen die Annahme von Gezeiten, da dieselben ja regelmäßig und ununterbrochen wiederkehren, was Aristoteles be-

[1]) H. Berger, Geschichte der wiss. Erdkunde der Griechen. Leipzig 1889, II, S. 114, Fußnote 4.

kannt war. Eine solche Deutung der Stelle ist aber nun ganz ausgeschlossen, nachdem wir aus unserer ersten Stelle wissen, daß Aristoteles die Gezeiten allgemein nicht als ein Hin- und Herschwanken des Meeres angesehen hat, sondern als eine Art Ein- und Ausatmen der Erde und nur weil Berger sich auf die Stelle bei den Doxographen stützte, die Aristoteles die Gezeiten des Atlantischen Ozeans als Schwankungen des Meeres auffassen ließen, konnte er zu dieser Deutung kommen.

Nun ist aber immer noch sehr auffällig, daß Aristoteles allgemein ausspricht: „Flutend erscheint das Meer durch die Schwankungen", während doch allbekannt war, daß die deutlichsten und stärksten Strömungen an einigen Meerengen gerade die Gezeiten verursachen. Man hätte eine eigene Erwähnung dieser Strömungen erwarten müssen. Hiefür kann man, wie ich glaube, eine vollständige Aufklärung in unserer ersten Stelle über die Gezeiten und die Euripusströmungen finden, wo er diese Strömungen mit als Ebbe und Flut ansieht, derart, daß der Euripus bei Chalkis an dem Ein- und Auswärtsfließen des Euboeischen Meeres direkt teilnimmt, das Einwärtsfließen, also die Nordströmung, eben die ἄμπωτις und das Auswärtsfließen, die Südströmung, die πλήμμυρις ist. Die Behandlung dieser Strömungen gehörte also in eine Abhandlung über die Gezeiten, die wir allerdings bei Aristoteles nirgends finden, worauf ich später zurückkommen werde. Die Gezeitenströmungen an solchen eingeengten Stellen sind außerdem überall im Mittelmeer, ausgenommen bei Chalkis und bei Messina, so schwach, daß sie neben den Strömungen infolge der Seiches nicht beobachtet werden können.

Hier sei noch eine weitere Stelle aus den Schriften des Aristoteles besprochen, welcher aber nicht die Bedeutung der obigen Stelle zukommt. Es ist nämlich nicht sicher, ob sie von Aristoteles selbst stammt, weil sie in den Problemata enthalten ist, von denen erwiesen zu sein scheint, daß sie erst von späteren Peripatetikern gesammelt worden sind, wobei die fehlenden Lücken aus anderen Werken, besonders aus denjenigen von Theophrast ergänzt worden sind.[1] Auch sind diese kurzen Be-

[1] W. v. Christ, Geschichte der griech. Literatur, I, 6. Aufl., p. 737.

merkungen über die schwierigsten schwebenden Fragen, soweit sie wirklich von Aristoteles herrühren, jedenfalls nicht auf Grund systematischer Verarbeitung des betreffenden Stoffes entstanden, sondern mehr als gelegentliche, bei der Lektüre oder bei der Bearbeitung anderer Gebiete sich aufdrängende Fragen aufzufassen, die später gelegentlich vielleicht auch weiter verfolgt werden sollten. Die Stelle ist aber dennoch für unsere Frage der Seiches und Strömungen von Interesse, weil sie wenigstens aus jener Zeit stammt und auf eine diesbezügliche Äußerung des Aristoteles vielleicht zurückzuführen ist. Die Stelle in Aristoteles Problemata XXVI, 4 lautet:[1])

Διὰ τί αἱ τροπαὶ πνέουσιν; ἢ διὰ τὸ αὐτὸ ὃ καὶ οἱ εὔριποι ῥέουσιν; μεχρὶ γὰρ τοῦ ῥεῖν καὶ ἡ θάλασσα φέρεται καὶ ὁ ἀήρ· εἶθ' ὅταν ἀντιπέσῃ καὶ μηκέτι δύνηται τὰ ἀπόγεια προάγειν διὰ μὴ ἰσχυρὰν ἔχειν τὴν ἀρχὴν τῆς κινήσεως καὶ φορᾶς πάλιν ἀνταποδίδωσιν.

„Warum wehen die Wechselwinde? Etwa aus demselben Grunde, aus welchem auch die Euripus genannten Meerengen hin und her strömen? Bis zum Fließen wird nämlich sowohl das Meerwasser als auch die Luft gebracht. Wenn es (das Wasser bzw. die Luft) sich dann entgegenstellt und nicht mehr im stande ist, das vom Lande her kommende weiter zu bewegen, weil der Antrieb zur Bewegung und zum Fortbewegen nicht stark ist, wirft es (dasselbe) wieder zurück."

Was diese Stelle zur Frage enthält, ist vor allem die Vorstellung, wie aus einer fortschreitenden Bewegung des Wassers wieder eine in derselben Richtung zurückkehrende wird. Zum Fließen wird das Meerwasser wie auch die Luft gebracht; durch welche Ursachen, erfahren wir von Aristoteles an anderen Stellen, worauf ich zurückkommen werde. Aber das Wasser des Meeres kann nicht in fortgesetzt fließender Bewegung bleiben, wie ein Fluß, sondern es stellt sich das Wasser selbst entgegen, d. h. es bildet sich ein Wellenberg. Wenn dann die kinetische Energie des bewegten Wassers aufgebraucht ist, weil sie sich in Energie der Lage umgewandelt hat, so wird das Wasser wieder nach derselben Richtung zurückbewegt. Man sieht, es beruht diese Schilderung auf einer guten Beobachtung, wie man Wasserwogen und Seiches durch Bewegen des Wassers auslösen kann. Besonders ist darin auch enthalten, daß die Größe des Weges, den die Wassermasse bei der hin- und hergehenden Bewegung zurücklegt, nicht nur von der Geschwindigkeit, sondern auch von der Masse des bewegten Wassers abhängt. Inhaltlich steht also die Stelle vollständig im Einklang mit unserer Hauptstelle über die Seiches und kann daher wohl von Aristoteles herrühren.

[1]) Ed. ac. Bor., Bd. II, a. a. O., p. 940.

Ursachen der Seiches bei Aristoteles.

Nachdem wir nun wissen, daß Aristoteles so klar ausgesprochen hat: „Das Meer schwankt häufig hin und her", darf man wohl in Anbetracht der Gründlichkeit, mit der er allen Problemen und besonders deren Ursachen nachgegangen ist, sofort annehmen, daß er auch die Frage nach dem Woher dieser Schwankungen sich gestellt hat. Eben diese Überlegung veranlaßte mich, die Schriften des Aristoteles nach solchen Seichesursachen zu durchsuchen. Es finden sich auch wirklich Stellen, welche die auch heute bekannten Hauptursachen der Seiches enthalten.

Besonders klar spricht Aristoteles aus, daß die gleiche Ursache, welche auf dem Lande Erdbeben erzeugt, auf dem Meere Schwankungen auslöst. In dem gleichen Buche II, Kapitel 8 der Meteor. heißt es am Schlusse:[1])

„ἔτι δὲ ῥεῖ (ἡ θάλαττα) καὶ οὐ σείεται κρατουμένη ὑπὸ τῶν πνευμάτων."

„Außerdem flutet das Meer und wird nicht erschüttert, wenn es der Kraft der Pneumata ausgesetzt ist."

Da wir aus der Stelle S. 361 wissen, daß er unter ῥεῖν beim Meere die Schwankungen versteht, ist hier sehr klar enthalten, daß bei Seebeben solche Schwankungen entstehen. Zu bemerken ist nur noch, daß unter Pneumata hier nicht ausschließlich die oberirdische Luftbewegung der Winde, sondern die hochgespannten unterirdischen Gase zu verstehen sind, wie der Zusammenhang an dieser Stelle ersehen läßt. Nach den heutigen Forschungsergebnissen wissen wir auch, daß bei allen Seebeben Wellen großer Länge entstehen, die sich an den Küsten als Seiches zeigen. Besonders bekannt sind die Wellen, welche beim Ausbruch des Krakatau an fast allen Küstenpunkten des Weltmeeres auftraten, ebenso die ungewöhnlich großen Seichesschwingungen in den Buchten Japans infolge von Seebeben, die oft viele Menschenleben vernichtet haben.[2])

[1]) Ed. ac. Bor., a. a. O., p. 362, 2.

[2]) Vgl. O. Krümmel, Handbuch der Ozeanographie, II. Stuttgart 1911, p. 134 ff.

Während an der obigen Stelle zunächst die Wirkung derjenigen Pneumata gemeint ist, welche die Erdbeben erzeugen, also mehr der von unten her wirkenden Winde, findet sich an einer weiteren Stelle ausdrücklich die Einwirkung der oberirdischen Winde erwähnt. Die Stelle lautet:[1])

„ὅτον δ' ἅμα κῦμα σεισμῷ γέγονεν, αἴτιον, ὅταν ἐναντία γίγνηται τὰ πνεύματα. τοῦτο γίγνεται, ὅταν τὸ σεῖον τὴν γῆν πνεῦμα φερομένην ὑπ' ἄλλου πνεύματος τὴν θάλασσαν ἀπῶσαι μὲν ὅλως μὴ δύνηται, προωθοῦν δὲ καὶ συστέλλον εἰς ταὐτὸν συναθροίσῃ πολλήν· τότε γὰρ ἀναγκαῖον ἡττηθέντος τούτου τοῦ πνεύματος ἀθρόαν ὠθουμένην ὑπὸ τοῦ ἐναντίου πνεύματος ἐκρήγνυσθαι καὶ ποιεῖν τὸν κατακλυσμόν.“

„Wo aber gleichzeitig mit einem Erdbeben eine Woge entstand, war daran schuld, daß entgegengesetzt gerichtete Winde entstanden. Solches ereignet sich, wenn das Pneuma, welches die Erde erschüttert, das von einem anderen Winde bewegte Meer nicht vollständig zurückdrängen kann, seinerseits aber das Meer vorwärts treibt und zusammenschiebt und dadurch eine große Wassermenge anhäuft. Dann muß nach Überwindung des ersteren die gesamte Wassermenge von dem entgegengesetzten Winde getrieben hervorbrechen und die Überschwemmung verursachen.“

Was in der Stelle für uns zunächst wichtig ist, ist die klare Erkenntnis der Wirkung des Windes auf das Meer, der nach Aristoteles das Meerwasser in seiner Richtung in Bewegung versetzt und dadurch Wogen erzeugt. Das *προωθεῖν τὴν θάλατταν* entspricht auch unserer heutigen Vorstellung der wogenerregenden Wirkung des Windes. Dabei ist es aber nach den neuesten Ergebnissen nicht der fortgesetzt gleichmäßig wehende Wind, sondern der stoßweise auftretende, der besonders Wellen großer Länge erzeugt,[2]) wie das besonders bei böigem Wetter in den Fallwinden zu beobachten ist, worauf zuerst S. Günther aufmerksam gemacht hat.[3])

Von besonderem Interesse ist ferner noch, daß Aristoteles das Auftreten besonders großer Wogen infolge raschen Um-

[1]) Ed. ac. Bor., a. a. O., p. 362, 2.

[2]) In Probl. 23, 11 findet sich auch diese Beobachtung ausgesprochen: *„Προωθεῖ δὲ οὐ συνεχές πω ὂν τὸ πνεῦμα, ἀλλὰ ἀρχόμενον.“*

[3]) S. Günther, Von den rythmischen Schwankungen des Spiegels geschlossener Meeresbecken. Mitt. d. Geog. Ges. Wien 1888, 31, p. 510.

schlagens des Windes in die entgegengesetzte Richtung bekannt war, wie unsere Stelle ersehen läßt. Die Beobachtungen an Seen und die Berichte über große Wasserwogen an den Meeresküsten enthalten häufig solche meteorologische Verhältnisse, bei denen ein rasches Umschlagen des Windes angenommen werden muß. Wenn auch viele Berichte besonders über das Auftreten von sogenannten Seebären Windstille am Beobachtungsorte konstatieren, so ist die Auslösung der Woge eben nur in weiterer Entfernung zu suchen. Die Art und Weise, wie die Woge entsteht, denkt sich Aristoteles dabei allerdings sehr einfach als eine Überlagerung der von den sich begegnenden Winden erzeugten Wogen. Der Vorgang ist natürlich ein viel verwickelterer, wie wir heute wissen. Vor allem wirkt dabei eine plötzliche Änderung des Luftdruckes mit, ferner hängt die Höhe der Woge mit dem Zeitintervall zwischen dem Nachlassen des einen und dem Auftreten des entgegengesetzten Windes zusammen in Verbindung mit der Tiefe des Meeres und der Gebietsausdehnung, welche dieser Störung ausgesetzt ist, und anderen Faktoren; eine Analyse des einzelnen Vorgangs ist aber schon deshalb nicht möglich, weil die Störungsstelle immer auf dem Meere draußen liegt und eine Beobachtung dieser Faktoren unmöglich ist.

Daß gleichzeitig mit dem Erdbeben eine solche durch meteorologische Ursachen erzeugte Woge auftritt, wie sie Aristoteles erwähnt, ist wohl möglich. Doch wird gewöhnlich die Wirkung des Erdbebens selbst, eines sogenannten Dislokationsbebens, die großen Wasserfluten erzeugen. Was für unsere Frage von Interesse ist, ist die Tatsache, daß Aristoteles sogar in Erdbebenwogen meteorologische Ursachen suchte, während man später bis auf unsere Zeit umgekehrt als Ursachen aller großen Wasserwogen immer ferne Erd- und Seebeben betrachtete und erst in neuester Zeit als gewöhnliche Ursachen derselben meteorologische Vorgänge wieder erkannt hat. Wenn auch dieser wiederum mit den modernsten Ansichten übereinstimmende Standpunkt des Aristoteles sich einfach aus seiner Theorie der alles vermögenden Pneumata ergibt,

so ist doch die klare Erkenntnis solcher Vorgänge und die einfache Erklärung derselben für die damalige Zeit sehr staunenswert.

Daß auch das Vorauseilen dieser Wogen vor dem Winde Aristoteles bekannt war, folgt aus einer Stelle im gleichen Kapitel 8 der Meteor.:[1])

„ἠχοῦσιν γὰρ οἱ τόποι, —, διὰ τὸ τὴν θαλάτταν μὲν προωθεῖσθαι ἤδη πόρρωθεν, —." „Wenn der Südwind zu wehen im Begriffe ist, zeigt er sich vorher an. Es geben die Gegenden ein Geräusch, weil das Meer schon von der Ferne her vorwärts getrieben wird. . . ."

Die Frage, warum die Wogen dem Winde vorauseilen, ist auch in den Problemata dreimal besprochen, nämlich in Buch XXIII, 2, 11 und 12. In No. 2 und 11 finden wir übereinstimmend die gleiche Begründung wie oben, daß der Wind das Meer vorwärts stoße von der Ferne, ein *προωθεῖν τὴν θάλατταν*. Während aber bei den vorausgehenden Stellen nach dem Zusammenhang nur Wellen großer Länge gemeint sein können, kann man an diesen Stellen unter *κύματα* ebenso die Oberflächenwellen des Windes wie die langen Wellen verstehen. Beide Wellenarten werden vom fernen Winde erregt und gelangen, wie richtig geschildert ist, dadurch, daß das vom Winde angestoßene Meer das daran angrenzende seinerseits in Wellenbewegung versetzt, vor dem Winde oder auch, ohne daß der Wind das Ufer selbst erreicht, an die Küste. Die Stellen selbst scheinen auch von Aristoteles wirklich herzurühren; aus dem erwähnten Grunde aber können wir sie doch nicht für unsere Frage direkt verwenden.

Aus den obigen Ausführungen geht also zur Genüge hervor, daß Aristoteles außer den Erdbeben als Hauptursache der Seiches die Einwirkung der Pneumata auf die Wasseroberfläche angenommen hat. Die Winde läßt er dabei ausschließlich durch ihren Stoß auf das Wasser wirken. Vergleicht man diese seine Ansicht mit dem jetzigen Wissensstand in dieser Frage, so ersieht man, daß Aristoteles zwei von den 3 Hauptursachen der Seiches der Meere damit richtig erkannt hat.

[1]) Ed. ac. Bor., zit. S. 356, p. 367, 1.

Nur die weitere häufige Ursache der Luftdruckschwankungen ohne Mitwirkung des Windes war ihm unbekannt, wenn wir nicht in dieser Wirkung der Pneumata auch den Luftdruck einschließen dürfen. Bedenkt man aber, daß auch heutzutage die Ursachen der Seiches der Meere nicht durch Beobachtungen gefunden wurden, sondern nur durch Analogieschluß von den kleinen Wasserbecken auf das große Meer abgeleitet sind, so müssen wir auch hierin die Kenntnisse der alten Griechen, speziell des großen Stagiriten bewundern.

Die Gezeiten des Atlantischen Ozeans bei Aristoteles.

Von jeher hatte man gerade bei Aristoteles nach einer Ansicht über Ebbe und Flut gesucht, weil man wußte, daß er alle Gebiete des menschlichen Wissens seiner Zeit beherrscht hatte. Während man nun auffälliger Weise die einzige in seinen Schriften wirklich enthaltene und uns überkommene Stelle nicht beachtete, hielt man sich an zwei andere Stellen, die über die Gezeiten des Atlantischen Ozeans handeln, die aber sich nicht in den uns überkommenen Schriften finden. Die eine Stelle überliefert uns Strabo, die andere findet sich bei den Doxographen und in beiden Stellen ist Aristoteles mißverstanden worden, wie ich im folgenden zeigen werde.

In der Erdbeschreibung des Strabo findet sich in Buch III, c. 153 das bekannte Fragment von Posidonius:

„ἦ δὴ καὶ τὸν Ἀριστοτέλη φησὶν Ποσειδώνιος οὐκ ὀρθῶς αἰτιᾶσθαι τὴν παραλίαν τῶν πλημμυρίδων καὶ τῶν ἀμπώτεων· παλιρροεῖν γὰρ φάναι τὴν θάλατταν διὰ τὸ τὰς ἀκτὰς ὑψηλάς τε καὶ ταχείας εἶναι δεχομένας τε τὸ κῦμα σκληρῶς καὶ ἀνταποδιδούσας. τ' ἀνάντια γὰρ τῇ Ἰβηρίᾳ θινώδεις εἶναι καὶ ταπεινὰς τὰς πλείστας, ὀρθῶς λέγων."

„Weshalb denn auch Posidonius bemerkt, daß Aristoteles mit Unrecht die Küste als Ursache der Fluten und Ebben angebe; er behaupte nämlich, das Meer flute abwechselnd hin und her, weil die Ufer steil und felsig wären, welche so der Woge widerstünden und sie zurückwerfen in entgegengesetzter Richtung. Im Gegenteil nämlich habe Iberien größtenteils sandige und niedrige Ufer, fügt Posidonius mit Recht an."

An der Stelle ist ohne Zweifel zu ergänzen „als Ursache der dortigen Fluten und Ebben", wie Schühlein auch betont

hat,[1]) womit natürlich die im Verhältnis zum Mittelländischen Meere großen Gezeiten nur gemeint sein können, welche durch die seefahrenden Phönizier auch in Griechenland schon bekannt waren. Wir müssen diese Ergänzung jetzt notwendig anbringen, weil wir die Ansicht des Aristoteles über die Gezeiten ja kennen. Auch Posidonius hat jedenfalls in diesem Sinne Aristoteles erwidert und Strabo hat eben auch an dieser Stelle ungenau zitiert, wie ihm Schühlein so oft nachweisen konnte. Wenn Aristoteles wirklich die astronomischen Gezeiten hiemit gemeint hat, was mir nicht wahrscheinlich ist, so war das Heranziehen der Reflexion zur Erklärung großer Fluthöhen ganz im Sinne der modernen Forschungsergebnisse. Stoßt die Flutwelle senkrecht auf die entgegenstehende Küste auf, so wird sie in der gleichen Richtung wieder zurückgeworfen und durch Überlagerung der ankommenden und der reflektierten Welle erlangt die Fluthöhe den doppelten Betrag. Schon Börgen hat die Reflexion gerade zur Erklärung der ungewöhnlichen Fluthöhen an der englischen Küste herangezogen[2]) und R. A. Harris hat in seiner neuen Theorie der Gezeiten[3]) den gleichen Vorgang an vielen Küstenpunkten mit Recht angenommen. Wir sehen daraus, daß Aristoteles den Vorgang der Reflexion der Wellen gekannt und, wie es scheint, an der Reflexion der Oberflächenwellen des Meeres an steilen Küsten beobachtet hat. Bei den kurzen Wellen nämlich ist ein steiles Ufer notwendig, damit nicht die Welle brandet und sich überschlägt; daß aber die Wogen von bedeutender Länge auch an flachen Küsten ebenso reflektiert werden wie an Steilküsten, hat Aristoteles nicht gewußt, wie wir aus dieser Stelle ersehen können.

Es ist aber auch die Möglichkeit nicht auszuschließen, daß Aristoteles und auch Posidonius an dieser von Strabo aus dem Text herausgerissenen Stelle die astronomischen Gezeiten gar nicht gemeint hat und die Stelle von Strabo wieder mißverstanden

[1]) F. Schühlein, Untersuchungen über des Posidonius Schrift: περὶ ὠκεανοῦ. Programm des hum. Gymn. Freising, 1901, S. 93.

[2]) Ann. d. Hydrographie, 1908, S. 410.

[3]) R. A. Harris, Manual of Tides IV A und IV B.

verstanden worden ist. Posidonius selbst spricht nach Strabo[1]) von „manchmal eintretenden gesteigerten Fluten", für welche er die doppelte Fluthöhe derjenigen bei Springflut ansetzt und von denen er sagt, daß „sie ein gemeinsames Vorkommnis an der ganzen Küste des Ozeans rund herum sein sollen." Es können darin nur die durch meteorologische Ursachen erzeugten Fluten gesucht werden, wie sie an vielen Küsten des Meeres auftreten und die von Alters her bekannt waren. Aristoteles selbst kannte auch die Nachrichten von großen Fluten im Atlantischen Ozean und erwähnt sie sogar zweimal in seinen Schriften, so in Eth. Eud. III. 1, wo er von der bekannten Sage spricht, daß die Cimbern um sich in der Unerschrockenheit zu üben die Waffen gegen die Fluten ergreifen, ferner in Eth. Nik. III, 10, wo er von den Kelten spricht, welche weder die Erdbeben noch die Fluten fürchteten. An beiden Stellen steht nun für Fluten *κύματα*, wie auch in unserem obigen Fragment die Flut, welche reflektiert wird, mit *κῦμα* bezeichnet ist. Strabo hat auch gerade da, wo er die auch von Aristoteles erwähnten Flutsagen der Cimbern bespricht, dieselben mit *πλημμυρίδες καὶ ἀμπώτεις* im Texte gegeben und wirklich für astronomische Gezeiten angesehen, wie aus der Polemik hervorgeht.[2]) Diese Verwechslung der meteorologischen und astronomischen Fluten ist von Herodots Zeiten bis in unsere Zeit vorgekommen und hat viel zu der Verwirrung in diesen Fragen von jeher beigetragen. Es ist demnach sehr wahrscheinlich, daß Aristoteles nur die einzeln manchmal auftretenden großen Fluten und Ebben gemeint hat, die er ja, wie wir aus dem Vorausgehenden wissen, durch Erdbeben oder Winde entstanden denkt und welche durch die Reflexion an den Küsten zu solcher Höhe gesteigert werden können.

Die zweite Stelle, welche bis jetzt als einzige überlieferte Ansicht des Aristoteles über die Gezeiten gegolten hat, findet sich bei den Doxographen und fast gleichlautend bei Plutarch, Stobaeus und auch bei Galenus. Vgl. Diels Dox. Gr. S. 382:

---

[1]) Strabo, III, 175. [2]) Strabo, VII, 293.

„*Ἀριστοτέλης*[1] *Ἡρακλείδης ὑπὸ τοῦ ἡλίου τὰ πλεῖστα τῶν πνευμάτων κινοῦντος καὶ συμπεριφέροντος*[2] *ὑφ' ὧν ἐμβαλλόντων μὲν προωθουμένην ἀνοιδεῖν τὴν Ἀτλαντικὴν θάλασσαν καὶ κατασκευάζειν τὴν πλήμμυραν, καταλειπόντων δ' ἀντιπεριεσπωμένην ὑποβαίνειν, ὅπερ εἶναι τὴν ἄμπωτιν.*"

„Aristoteles und Heraklides lassen die Gezeiten durch die Sonne entstehen, welche die meisten Pneumata in Bewegung bringt und mit sich herumführt; diese Pneumata fallen auf das Atlantische Meer und dadurch werde dasselbe vorwärts gestoßen und schwelle an und bilde so die Flut; wenn sie aber nachlassen, ziehe sich das Meer rings herum in entgegengesetzter Richtung zurück und nehme dadurch ab, was die Ebbe sei."

Nachdem wir die Ansicht des Aristoteles über den Bewegungsvorgang bei den Gezeiten kennen, dürfen wir mit ziemlicher Sicherheit behaupten, daß obige Darstellung nicht authentisch sein kann. Daß man den Doxographen in diesen kurz zusammengefaßten Ansichten der Gelehrten über die wichtigsten Probleme kein besonderes Vertrauen entgegen bringen kann, zeigen mir schon die Artikel über die Erdbeben und Winde bei Aristoteles, welche nur die Unmöglichkeit beweisen, die Theorien des Aristoteles, die wir ja glücklicher Weise noch besitzen, in kurzen Sätzen zusammenzufassen. Wie irreführend gerade die Angaben über die Gezeitentheorien bei den Doxographen sind, sieht man vor allem bei der kurzen Bemerkung über Pytheas Ansicht, wo nur eine Stelle aus seinen verdienstvollen Gezeitenbeobachtungen herausgerissen und entstellt ist. Er hatte dort, woran kein Zweifel sein kann, nur betont, daß bei zunehmendem Mond die größeren Fluten und bei abnehmendem die größeren Ebben entstehen, während er nach den Doxographen die Fluten bei zunehmendem und die Ebben bei abnehmendem Monde entstehen läßt. Auch ist sehr unwahrscheinlich, daß Posidonius, der beste Kenner der Gezeiten, diese durch die Winde entstehen läßt, welche vom Monde bewegt werden sollen. Es ist doch ganz unmöglich, daß Posidonius dem Monde eine so regelmäßige Einwirkung auf die Winde zuschreiben konnte, wo man bis heute vom Monde

[1]) Stobaeus hat *καὶ* und Galenus erwähnt nur den Aristoteles.

[2]) Stobaeus hat nur *περιφέροντος*, ebenso Galenus.

keinen merkbaren Einfluß auf die Atmosphäre beobachten konnte. Es scheint eben hier wieder vermengt zu sein die Entstehung der astronomischen Gezeiten, deren Abhängigkeit vom Monde ja speziell Posidonius zuerst klar erkannt und ausgesprochen hat, und diejenige der zeitweilig auftretenden großen Fluten, welche durch Winde erzeugt werden können.

Bei unserer obigen Stelle sind wir nun in der Lage, mit noch größerer Wahrscheinlichkeit ein Mißverständnis des betreffenden Berichterstatters zu erkennen. Wissen wir ja doch, daß Aristoteles die astronomische Ebbe durch ein Zurückziehen des Wassers in die Erde und die Flut durch ein Herausströmen entstanden gedacht hat. Warum sollte Aristoteles bei den Atlantischen Gezeiten eine neue, ganz verschiedene Theorie aufgestellt haben? Und wenn wir noch die Möglichkeit in Betracht ziehen, daß an einer uns verloren gegangenen Stelle Aristoteles vielleicht die Pneumata als wirkende Kräfte bei diesem Ein- und Ausatmen angenommen hat, so müßte beim Herabfallen der Winde auf das Meer das Wasser zurückgedrängt werden in die Erde und die Ebbe entstehen und beim Nachlassen des Druckes die Flut, nicht umgekehrt, wie obige Stelle klar angibt. Unsere Stelle kann daher nur einer verloren gegangenen Aufzeichnung über die zeitweise auftretenden meteorologischen Fluten entnommen sein, die Aristoteles, wie wir oben gesehen haben, wohl gekannt hat und welche ihn jedenfalls wie alle merkwürdigen Erscheinungen zu einer Erklärung und Begründung herausgefordert haben. Wir haben im vorausgehenden außerdem gesehen, daß Aristoteles die zeitweilig auftretenden Wogen (*κύματα*) durch den Stoß der von der Ferne her wirkenden Winde und auch die Erdbebenwogen durch die von oben oder unten her wirkenden Pneumata entstanden denkt. Und in dieser Schilderung der Doxographen finden wir dieselbe Entstehung der Wogen genau wieder. Auch hier ist vom *προωθεῖν* des Meeres die Rede wie oben.

Die anschauliche Darstellung der Auslösung der Fluten und Ebben stimmt ja merkwürdig damit überein, wie wir uns heutzutage die Entstehung der Seiches durch Wind und Luftdruck

denken. Durch die Drucksteigerung der Luft auf einem Teile einer Wasserfläche oder durch den Stoß des Windes wird die Wasserfläche niedergedrückt und gegen das Ufer vorwärts getrieben und schwillt dort an. Allerdings ist für die Entstehung der Ebbe kein Nachlassen des Druckes notwendig, sondern durch die Gleichgewichtsstörung sind nun die periodischen Schwankungen schon erzeugt, da das Wasser durch seinen Überdruck selbst wieder zurückfließt und sich ebenso weit unter das Gleichgewichtsniveau senkt, als es sich vorher über dasselbe erhoben hatte. Wenn aber das Nachlassen im Takte der ausgelösten Schwingung erfolgt, wie man bei den besonders großen Schwankungen annehmen muß und es auch nachgewiesen hat, dann wird die Schwankung um denselben Betrag erhöht. In obiger Schilderung ist also die Auslösung der Schwingungen statisch aufgefaßt, wie man das auch anfangs bei den Seiches und Gezeiten noch getan hat.

Vergleichen wir die Stelle bei den Doxographen mit derjenigen bei Strabo, so finden wir eine große Ähnlichkeit beider, ja man ist versucht, die beiden Stellen auf die gleiche Quelle zurückzuführen. Daß in der Strabostelle die Flut als κῦμα angesprochen ist, habe ich schon betont und die Reflexion dieser Woge an den steilen Küsten paßt vorzüglich zu der Doxographenstelle, da wirklich die Reflexion die Hubhöhe noch vergrößert. Darnach hätte Strabo bei Benützung dieser Posidoniusstelle wieder eine Nebensache herausgegriffen, weil sie eben zur Schilderung Iberiens gerade paßte, die Hauptsache aber, wie die Fluten selbst entstehen, weggelassen. Das Fragment von Aristoteles hätte demnach bei Posidonius gelautet: Die Winde fallen auf das Atlantische Meer und dadurch wird dasselbe vorwärts gestoßen und schwillt an und bildet so eine Woge. Die steilen Ufer an der iberischen Küste widerstehen der Woge und werfen sie in entgegengesetzter Richtung zurück, wodurch die bekannten Fluten an dieser Küste sich erklären. Lassen die Pneumata in ihrem Drucke nach, so strömt das Wasser von allen Seiten wieder zurück und es entstehen die bekannten Ebben dieser Gegenden.

Die Stelle bei den Doxographen enthält aber noch die als wesentlich zu bezeichnende Bemerkung „*ὑπὸ τοῦ ἡλίου τὰ πλεῖστα τῶν πνευμάτων κινοῦντος καὶ συμπεριφέροντος*, worin als Ansicht des Aristoteles hingestellt ist, daß die Gezeiten von der Sonnenwirkung herrühren. Hierin ist aber, woran ich nicht zweifle, nur eine Bemerkung des Berichterstatters zu erblicken, der in den Schriften des Aristoteles nach einer Erklärung gesucht hat, daß diese Pneumata eine so regelmäßig wiederkehrende tägliche Erscheinung hervorbringen. Es ist nämlich weder an einer uns erhaltenen Stelle von einer derartigen Einwirkung der Sonne auf die Pneumata die Rede noch ist die Bemerkung überhaupt in Einklang zu bringen mit der Ansicht des Aristoteles über die Bewegung der Pneumata, die ja in den Meteorologika so eingehend behandelt und zerstreut in allen 4 Büchern immer wieder mit der Theorie übereinstimmend dargelegt ist. Die Sonne erzeugt wohl Pneumata, indem sie durch ihre Wärme die Ausdünstung fördert und nur insofern ist die Entstehung derselben „*ὑπὸ τοῦ ἡλίου κύκλῳ φερομένου*“ [1]) abhängig. Aristoteles war aber doch sehr gut bekannt, daß die Richtung der Winde, überhaupt die Bewegung der Pneumata eine Unregelmäßigkeit, ja Regellosigkeit zeigt, die nicht mit dem Gange der Sonne in Übereinstimmung zu bringen war. Noch viel weniger konnte ein Aristoteles eine so regelmäßige Einwirkung der Sonne auf die Pneumata annehmen, daß die täglich so regelmäßig wiederkehrende Erscheinung der Ebbe und Flut dadurch verursacht sein konnte. Und daß Plutarch noch ein *συμπεριφέροντος* daraus macht, deutet erst recht darauf hin, daß man bei Aristoteles eben eine Einwirkung der Gestirne gesucht und eine solche von der Sonne hineinkonstruiert hat, ähnlich wie auch bei Posidonius die Winde vom Monde bewegt werden sollten. Daß aber die zeitweise auftretenden großen Fluten und Ebben durch die Pneumata erzeugt werden, die ihrerseits von der Sonne beeinflußt werden, das liegt ganz im Gedankenkreise des Aristoteles und im Sinne seiner Lehre.

[1]) Ed. ac. Bor., a. a. O., Met. II, 4, S. 359, 2.

Aristoteles und die Euripusfrage.

Im vorausgehenden konnte ich nachweisen, daß Aristoteles die Gezeitenbewegung des Nordhafens von Chalkis und die damit zusammenhängenden Strömungen wohl gekannt hat. Im besonderen wußte er, daß der Strom zur Zeit des raschesten Fallens und Steigens infolge der Gezeiten kentert und die Stromgeschwindigkeit periodisch zu- und abnimmt. Er kannte also damit die sogenannten regelmäßigen Strömungen des Euripus und ihre Ursache. In gleicher Weise kannte er die Seiches des Meeres und wußte, daß die rasch wechselnden Strömungen in den Meerengen durch diese Schwankungen verursacht werden. Er kannte also auch die unregelmäßigen Euripusströmungen und deren Ursachen. Es ist daher sehr merkwürdig, daß man schon bald nach Aristoteles die Lösung des Problems nicht mehr verstanden hat, obwohl sie in den Schriften desselben direkt enthalten ist. Es erklärt sich das wohl daraus, daß man das Problem selbst nicht mehr gekannt hat, wie die irreführenden Einzelheiten an den uns überkommenen Stellen zeigen.

So weiß Strabo von Eratosthenes,[1]) daß der Chalkidische Euripus siebenmal an jedem Tage seine Richtung ändere, und dieses Fragment des Eratosthenes enthält die erste Erwähnung des 7 maligen Wechsels; Plinius ferner, der sich wohl auf dieselbe Quelle stützt, berichtet etwas genauer, daß in der Meerenge bei Euboea siebenmal in einem Tage und einer Nacht die Ebbe und Flut wechsle und daß daselbst die Flut 3 Tage lang stehen bleibe, nämlich am 7., 8. und 9. Tage nach dem Neumonde.[2]) Wir sehen, von der ganzen komplizierten Erscheinung ist nur herausgegriffen, daß ein 7 maliger Wechsel der Strömung bei Tag und ebenso bei Nacht vorkommt. Nun zeigt sich dieser Wechsel nur zur Zeit der Quadraturen und da nicht etwa in gleichen Intervallen, wie die Stellen annehmen, und auch nicht 7 mal, sondern, wenn überhaupt ein häufiger Wechsel vorkommt, kann man bis 7 und auch mehr solche zählen.[3]) Und nur Plinius erwähnt, daß 3 Tage lang keine Fluterscheinung sich zeige; aber auch diese Bemerkung ist irreführend, weil nicht diese unregelmäßigen Fluten stehen bleiben, sondern die regelmäßigen Gezeiten. Man sieht, wie herausgerissen und falsch die Darstellung ist.

[1]) Strabo, II, 55. [2]) Plinius, II, 100.

[3]) Vgl. Zum Problem des Euripus, diese Sitzungsberichte 1914, p. 131

Auf diese stützen sich auch die späteren Schriftsteller. Manche Stellen erwähnen nur die große Unregelmäßigkeit der Strömungen, nicht aber, daß diese nur an den 3 Tagen zur Zeit der Quadraturen anzutreffen ist. Hierher gehört auch Livius,[1]) der aber als erster sehr nachdrücklich einen regelmäßigen, siebenmaligen Wechsel bestreitet und die Regellosigkeit der Strömungen in Stärke und Richtung sehr anschaulich und richtig schildert. Man sieht aber aus dieser Stelle, daß wieder die regelmäßigen Strömungen nicht bekannt waren, sonst wäre nach Livius nicht die Flotte des Sulpicius, die an den kritischen 3 Tagen im Nordhafen gelegen hatte, ohne die regelmäßigen Fluten abzuwarten, wieder abgesegelt.

Einen eingehenderen Bericht über das Problem verdanken wir erst wieder dem Jesuitenpater J. P. Babin, der sich von 1667 bis 1669 in Chalkis aufgehalten hatte. Der Bericht findet sich mehrfach in älteren Geographien und Reisebeschreibungen Griechenlands[2]) und auf Grund dieses Berichtes hat F. A. Forel im Jahre 1879 eine Erklärung der regelmäßigen Strömungen als verursacht durch die Gezeiten und eine solche der unregelmäßigen als veranlaßt durch die von ihm erstmals wieder entdeckten Seiches gegeben[3]) und das Euripusproblem galt als von Forel gelöst. Eigentümlich mutet es uns aber an, wenn man liest, wie in der ersten Begeisterung über die Forel gelungene Lösung ein französischer Schriftsteller H. von Parville[4]) bedauern zu müssen glaubte, daß der große Stagirite kein Zeitgenosse Forels gewesen sei, der ihn hätte aufklären können, nachdem wir nun wissen, daß Aristoteles die Lösung des Euripusproblems ebensoweit gekannt hatte, als sie Forel 2200 Jahre später gefunden hat. Forels Theorie blieb nicht unwidersprochen. Der griechische Seeoffizier A. Miaulis veröffentlichte nämlich im Jahre 1882 seine sehr eingehenden und verdienstvollen Beobachtungen,[4]) welche außer anderem in halb-

[1]) Livius, Lib. 28, 6. — Nebenbei kann man aus dieser Stelle angeben, daß das betreffende geschichtliche Ereignis in der Zeit des 1. oder letzten Viertel des Mondes war.

[2]) Der erste Bericht findet sich bei Spon und Wheeler: Voyage d'Italie, de Dalmatie, de Grèce etc. fait 1675 et 76. Amsterdam 1679, vol. II, p. 252.

[3]) F. A. Forel, Comptes rendus 1879, p. 861.

[4]) Ἀντ. Μιαούλης, Περὶ τῆς παλιρροίας τοῦ Εὐρίπου, Athen 1882.

stündlichen Ablesungen des Wasserstandes im Nord- und Südhafen von Chalkis aus den Jahren 1871 und 72 bestehen, und bezweckte damit nachzuweisen, daß Forel das Euripusproblem nicht gelöst habe, weil er es nicht gekannt habe. Die Hauptfrage bestehe nicht in den unregelmäßigen Strömungen, sondern in einer anormalen Gezeitenperiode und besonders in einem ganz merkwürdigen Ausfallen eines Niedrigwassers am 11. und 26. Mondtage, wofür er selbst auch keine Lösung finden könne. Im Jahre 1888 trat Prof. O. Krümmel[1]) in diesem Streite für Forel auf, indem er die genannten Gezeitenanomalien für unwahrscheinlich und durch Miaulis Beobachtungen nicht für erwiesen erklärte, während er Forels Theorie gerade durch Miaulis Ergebnisse im einzelnen begründen konnte.[2]) Auf Grund einer Durcharbeitung der Miaulischen Beobachtungen konnte ich dann im Jahre 1914 nachweisen,[3]) daß diese Anomalien entgegen der Annahme Krümmels wirklich vorhanden sind und sich durch ein merkwürdiges Zusammentreffen von Gezeitenkomponenten vollauf begründen lassen.

Man hatte nun von jeher angenommen, daß die unregelmäßigen, rasch wechselnden Euripusströmungen es waren, die Aristoteles vergeblich zu ergründen suchte. Eine Sage ging sogar soweit, daß sie ihn aus Verzweiflung darüber den Tod in den Euripusfluten suchen ließ, in die er sich gestürzt haben soll mit den Worten: „Fasse mich, weil ich dich nicht erfassen kann".[4]) Nachdem wir aber wissen, daß Aristoteles gerade diese weit seiner Zeit vorauseilend mit dem Auftreten von Seiches richtig begründet hat, so können es nur die Gezeitenanomalien gewesen sein, die, wie wir sehen werden, auch ganz

[1]) O. Krümmel, Zum Problem des Euripus, Pet. Mitt. 1888, p. 331.

[2]) Ein sehr klarer und erschöpfender Bericht über die Forel-Krümmelsche Lösung des Problems findet sich in Pauly, Real-Enzykl. d. klass. Alt., VI. Stuttgart 1909 unter Euripos mit vollständiger Literaturangabe von A. Philippson.

[3]) Zum Problem des Euripus, diese Sitzungsberichte 1914, p. 99 ff.

[4]) Die erste Erwähnung der Sage findet sich bei Justin. Cohort. ad Graec., p. 34.

dazu geeignet waren, die Aufmerksamkeit eines Aristoteles immer wieder auf sich zu lenken und mit ihrer Rätselhaftigkeit den Sinn eines so großen Forschers zu verwirren. Man wußte auch von jeher, daß Aristoteles sich häufig in Chalkis selbst aufgehalten hat, wo er ein Haus besaß, und daß er das letzte Jahr seines Lebens ganz dort verbracht hat.[1]) Um so mehr muß man annehmen, daß ihn diese Erscheinungen dort sehr viel beschäftigt haben. Auch muß es seiner Umgebung und seinen Schülern bekannt gewesen sein, wie sehr die Euripusfragen den Meister beschäftigten. Dazu kommt noch, daß Aristoteles die Frage der Ebbe und Flut und die Euripusfrage so wenig in seinen Schriften berührt, und wie man annehmen darf, auch keine eigene Schrift über die alle größeren Gelehrten des Altertums so sehr beschäftigenden Fragen hinterlassen hat. Wenn man alle diese Momente berücksichtigt, so kann man die Entstehung eines solchen Gerüchtes begreiflich finden.

Eine erste große Merkwürdigkeit der Gezeitenerscheinungen bei Chalkis, die oben schon erwähnt worden ist, besteht darin, daß der vom Meere durch den langgestreckten Oreoskanal abgeschlossene Talantische Euripus eine so starke Gezeitenbewegung hat, im Südhafen von Chalkis aber, der durch den Golf von Petalia unmittelbar mit dem Meere zusammenhängt, der Gezeitenhub so klein ist, daß dieser neben den Seichesschwankungen ganz verborgen bleibt. In diesem Umstande darf man, wie ich glaube, den Grund dafür suchen, daß Aristoteles und vielleicht die Griechen überhaupt sich die Ebbe und Flut als eine Art Ein- und Ausatmen der Erde vorgestellt haben. Eine derartige Bewegung ist nämlich nur möglich, wenn man sich den Untergrund des Meeres von Poren und Hohlräumen durchsetzt denkt. Aristoteles macht auch ausdrücklich auf diese Beschaffenheit der Gegenden des Euböischen Meeres aufmerksam und bringt damit auch in Zusammenhang das häufige Auf-

[1]) Real-Enzykl. d. kl. Alt., Bd. II. Lebensbeschreibung des Aristoteles, S. 1021.

treten von Erd- und Seebeben in diesen Gegenden, wie auch das Vorkommen heißer Quellen, das sich an den Ufern dieses Golfes so häuft.[1]) Dazu kommt dann noch die besondere Eigentümlichkeit, daß beim Ebben Wasser vom weiten Meere durch den Euripus nach dem inneren Meere hineinfließt und bei der Flut wieder heraus. Gerade diese Erscheinung mußte die Vorstellung wecken und immer wieder stützen, daß infolge der schwammartigen Beschaffenheit des Untergrundes dieses Ein- und Auswärtsfließen in und aus der Erde ein viel stärkeres ist als anderswo. Aristoteles speziell hat die Gezeitenbewegung nur in Chalkis kennen gelernt und eingehend studiert. Er konnte daher zu keiner anderen Vorstellung über den Bewegungsvorgang der Gezeiten kommen, als wir ihn schon vor seiner Zeit und besonders bei seinem Lehrer Plato finden, obwohl gerade Aristoteles durch die Auffindung der Seichesschwingungen als horizontale periodische Wasserschwankungen dem wahren Vorgange der Gezeitenschwingungen so nahe gekommen war.

Diese Vorstellung der Gezeitenbewegung blieb dann die herrschende für lange Zeit und wurde besonders von den Stoikern in ihrer Art weiter ausgebildet, indem sie die Erde als eine Art tierischen Organismus ansahen und in den Gezeiten einen regelmäßigen Atmungsprozeß erblickten. Auch in späteren Zeiten bis auf Newton kehrte man immer wieder zu dieser Vorstellung zurück, nur die Ansicht über die diese Bewegung auslösenden Kräfte wechselte immer wieder.[2])

In einem weiteren anormalen Verhalten der Gezeiten im Nordhafen von Chalkis kann man, wie ich glaube, einen Grund dafür suchen, daß Aristoteles und auch die Griechen keinen Zusammenhang zwischen dem Gezeitenverlauf und dem Gang der Sonne und des Mondes aufgefunden haben, der überall da bekannt war, wo so große Gezeiten mit Hubhöhen bis zu

[1]) Met. II, 8. Ed. ac. Bor., S. 366, 1.

[2]) Vgl. die verdienstvolle Darstellung der „Gezeitentheorien in ihrer historischen Entwicklung" von S. Günther in seinem Handbuch der Geophysik. II. Band. Stuttgart 1899, p. 468 und 469.

1 Meter sich zeigen wie bei Chalkis. Dieselben richten sich nämlich dort weder nach dem Monde noch nach der Sonne. Die vom Monde herrührende Gezeitenwelle erreicht nämlich während eines großen Teiles des Jahres dieselbe Hubhöhe wie die von der Sonne erzeugte Tide.[1]) Dadurch erhält die durch beide Komponenten gebildete halbtägige Gezeitenwelle nicht die normale Periodendauer von 12 Stunden 24 Minuten, sondern nur von 12 Stunden 12 Minuten, das ist das arithmetische Mittel zwischen der Periode der Sonnentide und der Mondtide. Die Flutwelle richtet sich daher weder nach Mondzeit noch nach Sonnenzeit, sondern bleibt zwischen beiden. Zur Zeit der Aequinoktien ist die Hochwasserzeit fast genau in der Mitte zwischen dem Mond- und Sonnenhochwasser, bleibt aber nicht fest an dieser Stelle, sondern nähert sich zur Zeit der Solstitien mehr der Zeit des Mondhochwassers. An diesen abweichenden Gang gegenüber den ozeanischen Gezeiten müssen wir wohl denken, wenn wir bei einigen Schriftstellern solche Andeutungen über den Gang der Gezeiten lesen.[2]) Dieses eigentümliche Verhalten der dortigen Tiden mußte jede Beobachtung eines Zusammenhanges mit dem Laufe von Mond und Sonne unmöglich machen.

Eine weitere Folge der anormalen Gezeitenperiode ist, daß zur Zeit der beiden Mondviertel gar keine Tidenbewegung sich zeigt.[3]) In dieser Zeit kommen dann die Seiches zur Geltung und erzeugen jene kurz dauernden Stromwechsel, welche den Euripus so bekannt gemacht haben. Nach den Quadraturen tritt mit dem Wiedererscheinen der Gezeiten eine noch merkwürdigere und bis jetzt nirgends sonst beobachtete Erscheinung ein, die sogenannte Vertauschung der Flut- und

[1]) Das Gleiche ist auch der Fall bei den Gezeiten des Korinthischen Golfes und denjenigen in Isthmia, die sich also auch weder nach dem Monde noch nach der Sonne richten.

[2]) Strabo, I, 54; Mela, III, c. 1; Pseudo-Aristoteles, De Mundo 4, 32.

[3]) Plinius, II, 100 erwähnt, „am 7., 8. und 9. Mondtag stehe die Flut still".

Ebbezeit, die Miaulis zuerst wieder beobachtete.[1]) Die Hochwasserzeiten folgen wie überall immer in gleicher Periode, hier nach 12 Stunden 12 Minuten aufeinander; gerade am Euripus kann man das Intervall in den Stromwechseln deutlich beobachten. Rechnet man nun mittels dieser Periodendauer das Erscheinen des ersten Hochwassers nach den Quadraturen aus, so stimmt das nicht mehr mit der Beobachtung, sondern genau um diese Zeit tritt Niedrigwasser auf. Es verschiebt sich also die ganze Bewegung um 6 Stunden 6 Minuten. Gerade dieses Verhalten mußte auf jeden Beobachter besonders verwirrend wirken und war auch für Miaulis das Rätselhafteste am ganzen Problem und Krümmel konnte das Vorhandensein einer solchen Anomalie überhaupt nicht glauben.

Beachten wir alle diese großen, dort merkwürdig so zusammentreffenden Unregelmäßigkeiten der Gezeitenerscheinungen, die in ihrem normalen Typus schon ein schwieriges Problem zu allen Zeiten gebildet haben, so kann man so recht verstehen, daß nur diese es waren, die ein Aristoteles sein Leben lang vergeblich zu ergründen suchte, und daß darin wieder der Grund dafür zu erblicken ist, daß und warum er über die Gezeiten- und Euripusfrage nichts Näheres hinterlassen hat und die Fragen so selten berührt, daß in seinen vielen Schriften das Wort Ebbe und Flut nur ein einziges Mal vorkommt. Wir wissen aber auch heute, daß dieses Unvermögen die Größe des Stagiriten in nichts beeinträchtigen kann; denn eine Erklärung eines so anormalen Gezeitenverlaufes war bis in die neueste Zeit überhaupt unmöglich. Erst die Entwicklung der modernen Gezeitentheorie gibt uns in der sogenannten harmonischen Analyse ein Mittel an die Hand, auch einen so merkwürdigen Verlauf genau zu ergründen. Es ist hier nicht der Ort, auf dieses für den Nichtmathematiker schwierige Kapitel einzugehen; es sei nur erwähnt, daß in unserem Falle der Umstand, daß die Mondtide und die Sonnentide nahezu

[1]) Miaulis, a. a. O., S. 379. p. 17; Krümmel hatte das Auftreten derselben bestritten. Vgl. Pet. Mitt. 1888, S. 337.

gleich groß sind, die ganze Erscheinung mit Notwendigkeit ergibt. Dabei ist aber heute noch nicht erwiesen, warum gerade dort diese Anomalien auftreten, wenn auch durch G. H. Darwin,[1]) R. A. Harris[2]) und andere der Weg zur Lösung der Mittelmeergezeitenfrage gezeigt ist und in neuester Zeit G. Grablovitz, G. Wegemann[3]) und R. von Sterneck[4]) auf dem richtigen Wege vorgearbeitet haben.

[1]) G. H. Darwin, Ebbe und Flut. Leipzig 1911, S. 180.

[2]) R. A. Harris, Manual of Tides, IV. B., 1904, Taf. 19.

[3]) G. Wegemann, a. a. O., zit. S. 363.

[4]) R. von Sterneck jun., Zur Theorie der Gezeiten des Mittelmeeres, Sitzungsber. d. K. K. Akad. d. Wiss., math.-nat. Kl., Bd. 122, IIa, Wien 1913, und Über die Gezeiten des Ägäischen Meeres, ebenda Sitzung vom 10. Dezember 1914, Ak. Anz. Nr. 26.

Über die Weierstrass'sche Produktdarstellung ganzer transzendenter Funktionen und über bedingt konvergente unendliche Produkte.

Von **Alfred Pringsheim.**

Vorgetragen in der Sitzung am 6. November 1915.

Der bekannte Satz über die Darstellung einer ganzen transzendenten Funktion mit unendlich vielen vorgeschriebenen Nullstellen durch ein beständig und unbedingt konvergierendes unendliches Produkt ist von seinem Entdecker Weierstraß mit ausschließlicher Benützung von Hilfsmitteln, welche der Theorie der eindeutigen analytischen Funktionen angehören, völlig einwandfrei begründet worden.[1]) Immerhin mag vielleicht gesagt werden, daß der von Weierstraß benützte Gedankengang schon eine merkliche Vertrautheit mit seinen funktionentheoretischen Methoden voraussetzt und namentlich dem Auffassungsvermögen der Anfänger einige Schwierigkeit zu bereiten pflegt. Für die Richtigkeit dieser Ansicht dürfte wohl die Tatsache sprechen, daß unter der großen Anzahl mir bekannter Lehrbücher ein einziges (dasjenige von Vivanti-Gutzmer) den Weierstraßschen Beweis ohne wesentliche Veränderung wiedergibt.[2]) Die große Mehrzahl der übrigen (mehr als ein Dutzend) versucht mit mehr oder weniger Glück, jenen

[1]) Abhandlungen aus der Funktionenlehre (1886), p. 16 = Mathematische Werke 2, p. 92.

[2]) A. a. O., Nr. 208 (p. 154—157).

Beweis unter Beibehaltung des Hauptgedankens etwas zu vereinfachen, wobei als gemeinsames Merkmal die Benützung des (von Weierstraß geflissentlich vermiedenen) komplexen Logarithmus und der logarithmischen Reihe sich ergibt. Mir persönlich will es nicht recht angemessen erscheinen, beim Beweise eines grundlegenden und verhältnismäßig einfachen Satzes aus der Theorie der eindeutigen Funktionen die Eigenschaften einer unendlich vieldeutigen Funktion, also einer wesentlich komplizierteren Gattung in Anspruch zu nehmen. Doch mag diese Auffassung anderen einseitig und pedantisch erscheinen, zumal wenn man dem Aufbau der Funktionentheorie den Cauchyschen Integralsatz zu Grunde legt und in diesem Falle die Theorie des komplexen Logarithmus als eine der ersten und einfachsten Anwendungen jener Methode gewinnt. Wenn nun aber einige Lehrbücher sich so weit von der Weierstraßschen Methode entfernen, daß sie den fraglichen Satz als Folgerung (!) aus dem Mittag-Lefflerschen Satze durch logarithmische Integration herleiten (und zwar dieses Verfahren nicht etwa nur in Form einer gelegentlichen, ja sehr nahe liegenden Bemerkung, sondern als einzigen und maßgebenden Beweis mitteilen), so dürfte diese Art, die Dinge auf den Kopf zu stellen, wohl von niemandem gebilligt werden, der in der Mathematik etwas anderes sieht, als eine regellose Anhäufung mathematischer Resultate.

Bei dieser Sachlage erscheint es vielleicht nicht überflüssig, wenn ich im folgenden einen Beweis des fraglichen Satzes mitteile, der an Einfachheit alle bisherigen wesentlich übertreffen dürfte. Derselbe beansprucht überhaupt keinerlei im üblichen Sinne funktionentheoretische Hilfsmittel, nicht einmal den Begriff der gleichmäßigen Konvergenz, sondern liefert auf rein formal reihentheoretischem Wege ganz direkt die Konvergenz des bekannten Weierstraßschen Produktausdrucks und die Möglichkeit, denselben in eine beständig konvergierende Potenzreihe umzuformen.

Ich möchte zugleich diese Gelegenheit benützen, um zur Ergänzung früher von mir veröffentlichter Bemerkungen über

bedingt konvergierende unendliche Produkte[1]) zu zeigen, wie die Weierstraßsche Methode, ein an sich divergentes Produkt durch Zusatzfaktoren unbedingt konvergent zu machen, auch dazu dienen kann, ein Kriterium für bedingte Konvergenz unendlicher Produkte abzuleiten und die etwaige Wertveränderung, die durch Umordnung der Faktoren erzeugt wird, zu bestimmen.

§ 1.

Der Weierstrass'sche Hauptsatz.

1. Versteht man unter $\mathfrak{P}_\nu(x)$ für $\nu = 0, 1, 2 \ldots$ eine unbegrenzte Folge beständig konvergierender Potenzreihen und setzt:

$$(1) \qquad \mathfrak{L}_n(x) = \prod_0^n{}_\nu (1 + \mathfrak{P}_\nu(x)) \quad (n = 0, 1, 2 \ldots),$$

so heißt das unendliche Produkt $\prod_0^\infty{}_\nu (1 + \mathfrak{P}_\nu(x))$ an der Stelle x' konvergent und $\mathfrak{L}(x')$ sein Wert, wenn sämtliche $\mathfrak{P}_\nu(x')$ von -1 verschieden sind und $\mathfrak{L}_n(x')$ für $n = \infty$ den endlichen, von Null verschiedenen Grenzwert $\mathfrak{L}(x')$ besitzt. Hierzu ist bekanntlich hinreichend, daß die Reihe $\sum_0^\infty{}_\nu \mathfrak{P}_\nu(x')$ konvergiert und zwar konvergiert das betreffende Produkt dann auch unbedingt. Wird jetzt zugelassen, daß für eine endliche Anzahl von Indices ν die Bezeichnung $1 + \mathfrak{P}_\nu(x') = 0$ besteht, so soll das betreffende unendliche Produkt noch konvergent und Null sein Wert heißen, wenn dasselbe nach Ausschluß jener für $x = x'$ verschwindenden Faktoren in dem oben bezeichneten Sinne konvergiert. Unter der weiteren Annahme, daß die Reihe $\sum_0^\infty{}_\nu \mathfrak{P}_\nu(x)$ beständig konvergiert,[2])

[1]) Math. Annalen 22 (1883), p. 475 ff. Ebendaselbst 33 (1889), p. 149 ff.; 44 (1894), p. 413 ff.

[2]) Man bemerke, daß auf Grund dieser letzteren Annahme für keine Stelle x' mehr als eine endliche Anzahl von $\mathfrak{P}_\nu(x')$ den Wert -1 haben kann.

ist sodann auch das Produkt $\prod_0^\infty{}_\nu (1 + \mathfrak{P}_\nu(x))$ ein beständig und unbedingt konvergentes.

Man hat nun für $\nu > 1$:

$$\mathfrak{L}_\nu(x) = \mathfrak{L}_{\nu-1}(x)\,(1 + \mathfrak{P}_\nu(x))$$

und speziell:

$$\mathfrak{L}_0(x) = 1 + \mathfrak{P}_0(x),$$

so daß aus der für jedes $n \geq 1$ geltenden Identität

$$\mathfrak{L}_n(x) = \mathfrak{L}_0(x) + \sum_1^n{}_\nu (\mathfrak{L}_\nu(x) - \mathfrak{L}_{\nu-1}(x))$$

sich ergibt:

$$(2) \qquad \mathfrak{L}_n(x) = 1 + \mathfrak{P}_0(x) + \sum_1^n{}_\nu \mathfrak{L}_{\nu-1}(x) \cdot \mathfrak{P}_\nu(x)$$

und schließlich:

$$(3) \qquad \prod_0^\infty{}_\nu (1 + \mathfrak{P}_\nu(x)) = 1 + \mathfrak{P}_0(x) + \sum_1^\infty{}_\nu \mathfrak{L}_{\nu-1}(x) \cdot \mathfrak{P}_\nu(x).$$

Da jedes der Produkte $\mathfrak{L}_{\nu-1}(x) \cdot \mathfrak{P}_\nu(x)$ nach der Cauchyschen Multiplikationsregel durch eine einfache Potenzreihe ersetzt werden kann, so folgt also zunächst, daß das unter den gemachten Voraussetzungen beständig konvergierende Produkt in eine beständig konvergierende Reihe von Potenzreihen transformierbar ist. Diese letztere kann aber wiederum noch in eine einfache, gleichfalls beständig konvergierende Potenzreihe umgeformt werden, wenn man die Voraussetzung dahin verschärft, daß die (aus lauter positiven Gliedern bestehende) Reihe $\sum_0^\infty{}_\nu \mathfrak{P}_\nu(x)$ beständig konvergieren soll, unter $\overline{\mathfrak{P}_\nu(x)}$ diejenige Reihe verstanden, welche aus $\mathfrak{P}_\nu(x)$ durch Umwandlung sämtlicher Koeffizienten in ihre absoluten Beträge entsteht. Denn unter dieser Voraussetzung (welche offenbar die ursprünglich gemachte der beständigen Konvergenz von $\sum_0^\infty{}_\nu \mathfrak{P}_\nu(x)$ nach sich zieht, aber nicht umgekehrt) besteht,

wenn noch gesetzt wird: $\mathfrak{L}_n(x) = \prod_0^n{}_\nu(1 + \mathfrak{P}_\nu(x))$, nach Analogie der Beziehung (3) die folgende:

$$(4)\quad \prod_0^\infty{}_\nu(1 + \mathfrak{P}_\nu(x)) = 1 + \mathfrak{P}_0(x) + \sum_0^\infty{}_\nu \mathfrak{L}_{\nu-1}(x) \cdot \mathfrak{P}_\nu(x),$$

in dem Sinne, daß zunächst das links stehende unendliche Produkt und infolgedessen auch die rechts stehende Reihe beständig konvergiert. Dies besagt, daß unter der jetzt gemachten Voraussetzung die in Gl. (3) auftretende Reihe konvergent bleibt, wenn man jeden einzelnen Bestandteil durch seinen absoluten Betrag ersetzt. Alsdann ist es aber auf Grund des sogenannten Cauchyschen Doppelreihen-Satzes[1]) auch ohne weiteres gestattet, jene Reihe nach Potenzen von x zu ordnen. Hiernach ergibt sich der folgende, die eigentliche Grundlage unseres Hauptbeweises bildende Hilfssatz:

Versteht man unter $\mathfrak{P}_\nu(x)$ für $\nu = 0, 1, 2 \ldots$ eine unbegrenzte Folge beständig konvergierender Potenzreihen, unter $\mathfrak{P}_\nu(x)$ diejenige Reihe, welche aus $\mathfrak{P}_\nu(x)$ durch Verwandlung aller Koeffizienten in ihre absoluten Beträge entsteht, ist sodann auch die Reihe $\sum_0^\infty{}_\nu \mathfrak{P}_\nu(x)$ beständig konvergent, so gilt das Gleiche von dem unendlichen Produkte

$$\prod_0^\infty{}_\nu(1 + \mathfrak{P}_\nu(x)),$$

und zwar läßt sich dasselbe in eine beständig konvergierende Potenzreihe umformen, stellt also eine **ganze transzendente Funktion von x dar.**

2. Reduziert sich jedes $\mathfrak{P}_\nu(x)$ auf das eine Glied $-\frac{x}{a_\nu}$ (wo $a_\nu \neq 0$, $\lim a_\nu = \infty$) und ist sodann $\sum_0^\infty{}_\nu \left|\frac{x}{a_\nu}\right|$ beständig,

[1]) Cauchy, Analyse algébrique, 1821, p. 540 = Oeuvres (2), T. III, p. 444.

d. h. $\sum_0^\infty \left|\frac{1}{a_\nu}\right|$ überhaupt konvergent, so liefert das unendliche Produkt $\prod_0^\infty \left(1-\frac{x}{a_\nu}\right)$, wie aus dem bisher gesagten folgt, übrigens auch unmittelbar zu ersehen ist, eine ganze transzendente Funktion mit den Nullstellen a_ν. Dieser Fall scheidet für die weiteren Betrachtungen aus. Ist also jetzt $\sum_0^\infty \left|\frac{1}{a_\nu}\right|$ divergent, so kann man bekanntlich eine unbegrenzte Folge mit wachsendem ν niemals abnehmender natürlicher Zahlen p_ν so bestimmen, daß die Reihe $\sum_0^\infty \left|\frac{x}{a_\nu}\right|^{p_\nu+1}$ beständig konvergiert.[1]) Dies vorausgeschickt beweisen wir jetzt den folgenden

Hauptsatz: Legt man den Zahlen a_ν, p_ν die soeben angegebene Bedeutung bei und setzt:

$$(5)\quad \begin{cases} E_\nu(x) = \left(1-\frac{x}{a_\nu}\right)\cdot e^{g_\nu(x)}, \\ \text{wo:}\quad g_\nu(x) = \frac{x}{a_\nu} + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{a_\nu}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{p_\nu}\left(\frac{x}{a_\nu}\right)^{p_\nu}, \end{cases}$$

[1]) Gibt es Exponenten p (die natürlich >1 sein müssen), derart, daß die Reihe $\sum \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^{p+1}$, also auch für jedes endliche x die Reihe $\sum \left|\frac{x}{a_\nu}\right|^{p+1}$ konvergiert, so setze man $p_\nu = p+1$, wobei man unter p etwa die kleinste, der fraglichen Bedingung genügende ganze Zahl zu verstehen hat. Gibt es kein solches p, so wird durch die Annahme $p_\nu = \nu - 1$ oder besser (weil wesentlich kleinere p_ν liefernd) durch die folgende:

$p_\nu = [\lg \nu]$ (d. h. gleich der größten in $\lg \nu$ enthaltenen ganzen Zahl) das Verlangte geleistet. Wird nämlich $R>0$ beliebig groß angenommen, darauf n so fixiert, daß:

$$\left|\frac{R}{a_\nu}\right| < \frac{1}{e^2} \text{ für } \nu \geq n,$$

so hat man, wegen: $p_\nu + 1 > \lg \nu$, für $|x| \leq R$:

$$\sum_n^\infty \left|\frac{x}{a_\nu}\right|^{p+1} < \sum_n^\infty \frac{1}{\nu^2},$$

so daß die fragliche Reihe in der Tat beständig konvergiert.

so ist das unendliche Produkt $\prod_0^\infty {}_\nu E_\nu(x)$ beständig und unbedingt konvergent und läßt sich in eine beständig konvergierende Potenzreihe umformen, stellt also eine ganze transzendente Funktion mit den Nullstellen a_ν vor.

Beweis. Um die Faktoren $E_\nu(x)$ auf die im vorigen Hilfssatze betrachtete Form zu bringen, hat man lediglich $E_\nu(x)$ nach Potenzen von x zu entwickeln. Diese Entwickelung läßt sich wesentlich einfacher bewerkstelligen, wenn man dieselbe zunächst nicht an $E_\nu(x)$ selbst, sondern an der Derivierten $E_\nu'(x)$ vornimmt. Man findet zunächst:

$$E_\nu'(x) = \left(-\frac{1}{a_\nu} + \left(1 - \frac{x}{a_\nu}\right) g_\nu'(x)\right) \cdot e^{g_\nu(x)}. \tag{6}$$

Andererseits ergibt sich:

$$\left(1 - \frac{x}{a_\nu}\right) g_\nu'(x) = \left(1 - \frac{x}{a_\nu}\right)\left(\frac{1}{a_\nu} + \frac{x}{a_\nu^2} + \cdots + \frac{x^{p_\nu - 1}}{a_\nu^{p_\nu}}\right)$$

$$= \frac{1}{a_\nu} - \frac{x^{p_\nu}}{a_\nu^{p_\nu + 1}}$$

und daher:

$$E_\nu'(x) = -\frac{x^{p_\nu}}{a_\nu^{p_\nu + 1}} \cdot e^{g_\nu(x)}. \tag{7}$$

Um jetzt noch $e^{g_\nu(x)}$ nach Potenzen von x zu entwickeln, hat man:

$$e^{g_\nu(x)} = 1 + \sum_1^\infty {}_\varkappa \frac{1}{\varkappa!}\left(\frac{x}{a_\nu} + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{a_\nu}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{p_\nu}\left(\frac{x}{a_\nu}\right)^{p_\nu}\right)^\varkappa$$

$$= \sum_0^\infty {}_\varkappa c_\varkappa^{(\nu)} \left(\frac{x}{a_\nu}\right)^\varkappa, \tag{8}$$

wo die $c_\varkappa^{(\nu)}$ durchweg positive (rationale) Zahlen sind (speziell: $c_0^{(\nu)} = c_1^{(\nu)} = 1$) und die betreffende Reihe beständig konvergiert.

Hiernach geht die Gleichung (7) in die folgende über:

$$E_\nu'(x) = -\frac{1}{a_\nu^{p_\nu+1}} \cdot \sum_0^\infty{}_\varkappa \, c_\varkappa^{(\nu)} \frac{x^{p_\nu+\varkappa}}{a_\nu^\varkappa}. \tag{9}$$

Mit Berücksichtigung des Umstandes, daß nach Gl. (5) $E_\nu(0) = 1$ ist, folgt hieraus weiter:

$$\begin{aligned} E_\nu(x) &= 1 - \frac{1}{a_\nu^{p_\nu+1}} \sum_0^\infty{}_\varkappa \frac{c_\varkappa^{(\nu)}}{p_\nu+\varkappa+1} \cdot \frac{x^{p_\nu+\varkappa+1}}{a_\nu^\varkappa} \\ &= 1 - \left(\frac{x}{a_\nu}\right)^{p_\nu+1} \cdot \mathfrak{P}_\nu\left(\frac{x}{a_\nu}\right), \end{aligned} \tag{10}$$

wo

$$\mathfrak{P}_\nu\left(\frac{x}{a_\nu}\right) = \sum_0^\infty{}_\varkappa \frac{c_\varkappa^{(\nu)}}{p_\nu+\varkappa+1} \left(\frac{x}{a_\nu}\right)^\varkappa \tag{11}$$

eine beständig konvergierende Potenzreihe mit lauter positiven Koeffizienten.

Nachdem jetzt $E_\nu(x)$ auf die für die Anwendung des vorigen Hilfssatzes erforderliche Form gebracht ist (wobei offenbar $\left|\frac{x}{a_\nu}\right|^{p_\nu+1} \cdot \mathfrak{P}_\nu\left(\left|\frac{x}{a_\nu}\right|\right)$ die Rolle der dort mit $\mathfrak{P}_\nu(|x|)$ bezeichneten Reihe spielt), bleibt nur noch nachzuweisen, daß die Reihe

$$\sum_0^\infty{}_\nu \left|\frac{x}{a_\nu}\right|^{p_\nu+1} \cdot \mathfrak{P}_\nu\left(\frac{x}{a_\nu}\right)$$

für jedes endliche x konvergiert. Da aber diese Eigenschaft vermöge der getroffenen Auswahl der Zahlen p_ν bereits der Reihe

$$\sum_0^\infty{}_\nu \left|\frac{x}{a_\nu}\right|^{p_\nu+1}$$

zukommt und andererseits die Potenzreihen

$$\mathfrak{P}_\nu\left(\frac{x}{a_\nu}\right) \quad (\nu = 0, 1, 2 \ldots)$$

für jeden einzelnen Wert des Index ν beständig konvergieren, so ist nur noch zu zeigen, daß nach Annahme einer beliebig großen oberen Schranke für x ihre Summen auch für unbegrenzt wachsende ν unter einer endlichen Schranke bleiben.

Mit Benützung der Gleichungen (11), (8) und (5) findet man zunächst:

$$\mathfrak{P}_\nu\left(\begin{matrix} x \\ a_\nu \end{matrix}\right) < \sum_0^\infty{}_\varkappa\, c_\varkappa^{(\nu)} \left|\begin{matrix} x \\ a_\nu \end{matrix}\right|^\varkappa = c^{\left|\begin{matrix} x \\ a_\nu \end{matrix}\right| + \frac{1}{2}\left|\begin{matrix} x \\ a_\nu \end{matrix}\right|^2 + \cdots + \frac{1}{p_\nu}\left|\begin{matrix} x \\ a_\nu \end{matrix}\right|^{p_\nu}} \tag{12}$$

$$< c^{\left|\begin{matrix} x \\ a_\nu \end{matrix}\right| + \left|\begin{matrix} x \\ a_\nu \end{matrix}\right|^2 + \cdots + \left|\begin{matrix} x \\ a_\nu \end{matrix}\right|^{p_\nu}}.$$

Wird also jetzt $R > 0$ beliebig groß angenommen, sodann n so definiert, daß $\left|\frac{R}{a_\nu}\right| \leqq \frac{1}{2}$ für $\nu \geqq n$, so folgt weiter, daß:

$$\mathfrak{P}_\nu\left(\left|\frac{x}{a_\nu}\right|\right) < e \text{ für: } |x| \leqq R,\ \nu \geqq n, \tag{13}$$

womit die einzige noch offen gebliebene Frage erledigt und somit der ausgesprochene Satz vollständig bewiesen ist.

§ 2.

Über bedingt konvergente unendliche Produkte.

1. Setzt man in dem zuvor bewiesenen Hauptsatze:

$$\frac{x}{a_\nu} = -u_\nu,$$

so daß also die u_ν ($\nu = 0, 1, 2 \ldots$) eine Folge irgend welcher komplexer Zahlen von der Beschaffenheit bedeuten, daß $\lim_{\nu=\infty} u_\nu = 0$ und die Reihe $\sum_0^\infty{}_\nu\, u_\nu$ divergent ist, so folgt zunächst:

Werden natürliche Zahlen p_ν ($\nu = 0, 1, 2 \ldots$) so bestimmt, daß die Reihe $\sum_0^\infty{}_\nu\, u_\nu^{p_\nu+1}$ konvergiert (was stets auf unendliche viele Weisen ausführbar ist), so ist das unendliche Produkt

$$(1)\quad \begin{cases} \mathfrak{P} = \prod_0^\infty{}_\nu\, ((1+u_\nu)\cdot e^{-U_\nu}), \\ \text{wo: } U_\nu = u_\nu - \frac{1}{2}u_\nu^2 + \frac{1}{3}u_\nu^3 - \cdots + (-1)^{p_\nu-1}\cdot\frac{1}{p_\nu}u_\nu^{p_\nu} \end{cases}$$

unbedingt konvergent.

Um dieses Ergebnis zur Aufstellung eines Kriteriums für bedingte Konvergenz des (infolge der vorausgesetzten Divergenz von Σu_ν sicher nicht unbedingt konvergierenden) Produktes $\prod_0^\infty{}_\nu (1 + u_\nu)$ zu benützen (wobei wir die u_ν durchweg als von -1 verschieden annehmen wollen), werde gesetzt:

$$(2) \qquad \mathfrak{P}_n = \prod_0^n{}_\nu (1 + u_\nu) \cdot e^{-U_\nu}, \quad \mathfrak{U}_n = \prod_0^n{}_\nu (1 + u_\nu),$$

so daß also zwischen $\mathfrak{P}_n$ und $\mathfrak{U}_n$ die Beziehung besteht:

$$(3) \qquad \mathfrak{U}_n = \mathfrak{P}_n \cdot e^{\sum_0^n U_\nu}.$$

Alsdann ergibt sich, falls die Reihe $\sum_0^\infty{}_\nu U_\nu$ konvergiert:

$$(4) \qquad \lim_{n=\infty} \mathfrak{U}_n = \mathfrak{P} \cdot e^{\sum_0^\infty{}_\nu U_\nu},$$

und umgekehrt muß offenbar jene Reihe konvergieren, wenn ein endlicher, von Null verschiedener Grenzwert $\lim_{n=\infty} \mathfrak{U}_n$ existieren soll. Somit finden wir:

Das unendliche Produkt $\prod_0^\infty{}_\nu (1 + u_\nu)$ konvergiert in der durch die Indices vorgeschriebenen Anordnung dann und nur dann, wenn die Reihe $\sum_0^\infty{}_\nu U_\nu$ konvergiert, und zwar hat dasselbe, wenn gesetzt wird:

$$(5) \qquad \sum_0^\infty{}_\nu U_\nu = U$$

den Wert $e^U \cdot \mathfrak{P}$, stimmt daher mit dem unbedingt konvergierenden Produkt (1) nur dann überein, wenn $U = 0$ ist.[1])

[1]) Man bemerke noch, daß das Produkt $\prod_0^\infty{}_\nu (1 + u_\nu)$ offenbar nach 0 divergiert, wenn der reelle Teil von $\sum_0^\infty{}_\nu U_\nu$ nach $-\infty$ divergiert.

2. Die soeben hergestellte Beziehung zwischen einem bedingt und einem ihm gewissermaßen zugeordneten unbedingt konvergierenden Produkte kann dazu dienen, um die etwaige Wertveränderung zu bestimmen, welche das bedingt konvergierende Produkt bei irgend einer Umordnung der Faktoren erleidet.

Bezeichnet man etwa mit

$$v_0, v_1, \ldots v_\nu, \ldots$$

irgend eine Umordnung der Zahlen

$$u_0, u_1, \ldots u_\nu, \ldots$$

mit

$$q_0, q_1, \ldots q_\nu, \ldots$$

die entsprechende Umordnung der Zahlen

$$p_0, p_1, \ldots p_\nu, \ldots,$$

so daß also die Reihe $\sum_0^\infty{}_\nu v_{q_\nu+1}$ lediglich eine Umordnung der Reihe $\sum_0^\infty{}_\nu u_{p_\nu+1}$ vorstellt und, wie diese, konvergiert, setzt man ferner:

$$\mathfrak{Q}_n = \prod_1^n{}_\nu ((1+v_\nu)e^{-V_\nu}), \tag{6}$$

wo: $V_\nu = v_\nu - \frac{1}{2}v_\nu^2 + \frac{1}{3}v_\nu^3 + \cdots + (-1)^{q_\nu-1}\cdot\frac{1}{q_\nu}v_\nu^{q_\nu}$,

so wird das mit $\mathfrak{Q}_n$ bezeichnete Produkt bei unbedingt wachsendem n von dem unbedingt konvergierenden Produkte $\mathfrak{P}$ sich lediglich durch die Anordnung der Faktoren unterscheiden, und da diese auf den Wert des betreffenden unendlichen Produktes hier ohne Einfluß ist, so hat man:

$$\lim_{n=\infty} \mathfrak{Q}_n = \mathfrak{P}. \tag{7}$$

Bildet man ferner:

$$\mathfrak{V}_n = \prod_0^n{}_\nu (1+v_\nu) = \mathfrak{Q}_n \cdot e^{\sum_0^n{}_\nu v_\nu}, \tag{8}$$

so folgt, wenn man diese Gleichung durch die Gleichung (3) dividiert:

$$\frac{\mathfrak{T}_n}{\mathfrak{U}_n} = \frac{\mathfrak{S}_n}{\mathfrak{L}_n}\, e^{\sum_0^n{}_\nu (V_\nu - U_\nu)}, \tag{9}$$

und daher unter der Voraussetzung, daß die Reihe $\sum_0^\infty{}_\nu V_\nu$ konvergiert und daß

$$\sum_0^\infty{}_\nu V_\nu = V, \quad \lim_{n=\infty} \mathfrak{U}_n = \mathfrak{U}, \quad \lim_{n=\infty} \mathfrak{T}_n = \mathfrak{T} \tag{10}$$

gesetzt wird, schließlich:

$$\frac{\mathfrak{T}}{\mathfrak{U}} = e^{V-U}, \tag{11}$$

d. h. der Wert des umgeordneten Produkts unterscheidet sich von demjenigen des ursprünglichen um den Exponentialfaktor e^{V-U}.

3. Die vorstehenden Ergebnisse nehmen noch eine etwas durchsichtigere Form an, wenn wir den Spezialfall $p_\nu = q_\nu = p$ (d. h. konstant) etwas näher ins Auge fassen, wenn also angenommen wird, daß die Reihe $\sum u_\nu{}^{p+1}$ für irgend ein ganzzahliges $p \geq 1$ konvergiert (wobei dann unter p die kleinste ganze Zahl dieser Art verstanden werden soll). In diesem Falle wird zunächst:

$$u_\nu = u_\nu - \tfrac{1}{2} u_\nu^2 + \tfrac{1}{3} u_\nu^3 - \cdots + (-1)^{p-1} \cdot \frac{1}{p}\, u_\nu^p. \tag{12}$$

Wenn dann jede der Reihen

$$\sum_0^\infty{}_\nu u_\nu, \quad \sum_0^\infty{}_\nu u_\nu^2, \quad \ldots \sum_0^\infty{}_\nu u_\nu^p$$

zum mindesten in der durch die Indices vorgeschriebenen Anordnung konvergiert, so ergibt sich:

$$\sum_0^\infty{}_\nu U_\nu = \sum_0^\infty{}_\nu u_\nu - \tfrac{1}{2} \sum_0^\infty{}_\nu u_\nu^2 + \cdots + (-1)^{p-1} \cdot \frac{1}{p} \sum_0^\infty{}_\nu u_\nu^p, \tag{13}$$

so daß also $\sum_0^\infty{}_\nu U_\nu$ gleichfalls konvergiert.

Man erhält daher in diesem Falle aus dem Satze von Nr. 1 den folgenden:[1])

Ist $\sum_0^\infty{}_\nu\, u_\nu$ divergent, dagegen $\sum_0^\infty{}_\nu\, u_\nu{}^{p+1}$ für irgend ein ganzzahliges $p>1$ konvergent, so besteht die *notwendige und hinreichende* Bedingung für die bedingte Konvergenz des unendlichen Produktes $\sum_0^\infty{}_\nu(1+u_\nu)$ bei der durch die Indices vorgeschriebenen Anordnung in der (bedingten) Konvergenz der Reihe:

$$\sum_0^\infty{}_\nu\left(\frac{u_\nu}{1}-\frac{u_\nu^2}{2}+\cdots+(-1)^{p-1}\frac{u_\nu^p}{p}\right).$$

Hierzu ist *hinreichend* die (bedingte) Konvergenz der Reihen:

$$\sum_0^\infty{}_\nu u_\nu,\quad \sum_0^\infty{}_\nu u_\nu^2,\quad \ldots\ \sum_0^\infty{}_\nu u_\nu^p.^{2})$$

Zugleich ergibt sich, daß (unter Beibehaltung der in Nr. 2 benützten Bezeichnungen) die Wertveränderung $\frac{\mathfrak{V}}{\mathfrak{U}}=e^{V-U}$, falls die letztgenannte Konvergenz-Bedingung erfüllt ist und die entsprechende auch nach der Umordnung besteht, lediglich abhängt von den Differenzen $\sum_0^\infty{}_\nu u_\nu^\lambda-\sum_0^\infty{}_\nu v_\nu^\lambda$ $(\lambda=1,2,\ldots p)$, also von den einzelnen Wertveränderungen, welche die Reihen $\sum_0^\infty{}_\nu u_\nu^\lambda$ $(\lambda=1,2,\ldots p)$ durch die betreffende Umordnung erleiden.

Sind die u_ν (zum mindesten von irgend einem bestimmten Index ν ab sämtlich reell, so kann offenbar die Reihe $\sum_0^\infty{}_\nu u_\nu^2$,

[1]) Vgl. Stolz-Gmeiner, Einleitung in die Funktionentheorie (1905), p. 436.

[2]) Beispiel: $u_\nu=\frac{i^\nu}{\sqrt[3]{\nu+1}}$ (also: $p=3$).

wenn sie überhaupt konvergiert, nicht anders als absolut konvergieren. Ist dies der Fall, also $p = 1$ zu setzen, so ergibt sich als notwendig und hinreichend für die bedingte Konvergenz des Produktes $\prod_0^\infty{}_\nu (1 + u_\nu)$ die (gleichfalls nur bedingte) Konvergenz der Reihe $\sum_0^\infty{}_\nu u_\nu$.[1]) Ist dagegen zwar diese letztere konvergent, die Reihe $\sum_0^\infty{}_\nu u_\nu^2$ jedoch divergent, so divergiert offenbar (s. die Fußnote auf S. 396) jenes unendliche Produkt nach Null.[1])

Ersetzt man wieder u_ν durch $-\frac{x}{a_\nu}$, so lassen sich die obigen Ergebnisse auch unmittelbar auf unendliche Produkte von der Form $\prod_0^\infty{}_\nu \left(1 - \frac{x}{a_\nu}\right)$ übertragen.[2])

---

[1]) Satz von Cauchy: Analyse algébrique, p. 563 = Oeuvres (2), T. III, p. 460.

[2]) Beispiel: Das unbedingt konvergente Produkt:

$$\frac{\sin \pi x}{\pi x} = \prod_1^\infty{}_\nu \left(\left(1 - \frac{x}{\nu}\right) \cdot e^{\frac{x}{\nu}}\right) \left(\left(1 + \frac{x}{\nu}\right) \cdot e^{-\frac{x}{\nu}}\right)$$

kann ohne weiteres durch das folgende bedingt konvergente:

$$\prod_1^\infty{}_\nu \left(1 - \frac{x}{\nu}\right)\left(1 + \frac{x}{\nu}\right) \text{ d. h. } \lim_{n=\infty} \prod_1^\infty{}_\nu \left(1 - \frac{x}{\nu}\right) \cdot \prod_1^n{}_\nu \left(1 + \right)$$

ersetzt werden, da hier: $\sum_0^\infty U_\nu = \sum_1^\infty \left(\frac{x}{\nu} - \frac{x}{\nu}\right) = 0.$

Ordnet man dagegen p Gliedern von der Form $\left(1 - \frac{x}{\nu}\right)$ immer q solche von der Form $\left(1 + \frac{x}{\nu}\right)$ zu, so liefert die Gleichung (11) mit Benützung der bekannten Beziehung: $\lim_{m=\infty} \sum_{pm+1}^{qm} \frac{1}{\nu} = \lg \frac{q}{p}$ die Wertveränderung: $\lim_{m=\infty} \prod_1^{pm}{}_\nu \left(1 - \frac{x}{\nu}\right) \cdot \prod_1^{qm}{}_\nu \left(1 + \frac{x}{\nu}\right) = e^{x \cdot \lg \frac{q}{p}} \cdot \frac{\sin \pi x}{\pi x}$.

Über die Einwirkung von Brom auf einige Pyrrolderivate.

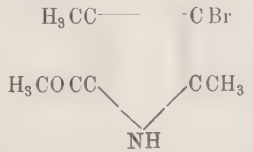
Von **Hans Fischer.**

Aus dem Physiologischen Institut der Universität München.

Vorgelegt von O. Frank in der Sitzung am 4. Dezember 1915.

Die Halogene wirken äußerst energisch auf Pyrrolkörper ein, so daß man leicht Harze erhält. In verdünnter Lösung läßt sich die Reaktion mäßigen und Ciamician,[1]) Silber, Dennstedt und Hepp[2]) haben ein Tetrachlorpyrrol, Tetrabrompyrrol und Tetrajodpyrrol beschrieben. Letzteres, unter dem Namen Jodol bekannt, wird technisch dargestellt und findet Anwendung in der Wundtherapie. Mit Bartholomäus[3]) habe ich schon vor längerer Zeit ein Bromderivat des 2-4-Dimethyl-3-Acetylpyrrols dargestellt. Wir wollten damals das Brom gegen Hydroxyl austauschen, um so zu Oxypyrrolen zu gelangen, jedoch schlugen diese Versuche fehl, da das Brom zu fest gebunden war.

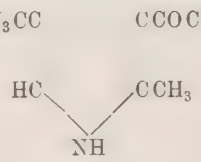
Neuerdings nahm ich nun diese Untersuchung wieder auf und konnte nur unsere damaligen Erfahrungen in dieser Richtung bestätigen. Neu dargestellt wurde das isomere 2-4-Dimethyl-5-Acetyl-3-Brompyrrol



[1]) Ber. 17, 1743; 18, 1763. [2]) Ber. 20, Referate S. 123.
[3]) Zeitschr. f. physiol. Chemie, 87, S. 255.

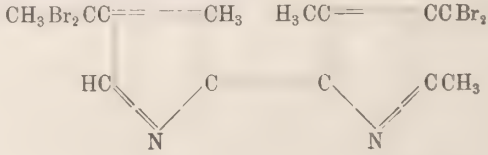
In diesem Pyrrol sitzt das Brom in der β Stellung womöglich noch fester wie in α Stellung; selbst durch Einwirkung von Natrium auf die siedende alkoholische Lösung des Pyrrols konnte ich das Brom nicht entfernen. Auffallend ist der Unterschied zwischen den Ketazinen der beiden isomeren Brompyrrole. Beide Brompyrrole reagieren nämlich mit Hydrazin unter Ketazinbildung, ohne daß das Brom irgendwie in Reaktion tritt, und unter den gleichen Bedingungen in Pyridinlösung untersucht, kristallisiert nur das in α Stellung bromierte Pyrrol mit zwei Molekülen Pyridin schön als Pyridindoppelverbindung. Es gelang nicht, aus dieser Verbindung das Pyridin abzuspalten.

Ich ließ nun weiterhin einen Überschuß von Brom auf substituierte Pyrrole einwirken und zwar zunächst auf das



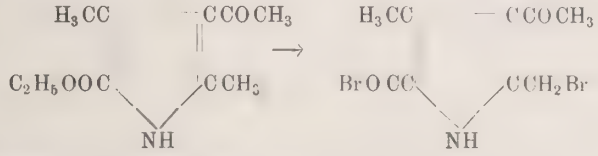
2-4-Dimethyl-3-Acetylpyrrol in der Hoffnung, auch in β Stellung in der Seitenkette den Eintritt von Brom erzwingen zu können, um so auf einem Umweg zu den β Aldehyden der Pyrrole zu gelangen oder indirekt auf diesem Wege eine Verlängerung der β Seitenkette zu ermöglichen.

Diese Hoffnung schlug fehl, dagegen erhielt ich bei der Einwirkung von überschüssigem Brom auf das genannte Pyrrol einen prachtvoll kristallisierenden Farbstoff, dem vielleicht folgende Konstitution zukommt.



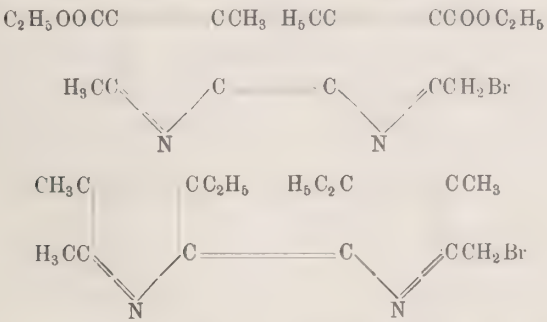
Höchst merkwürdig ist der Ersatz des Sauerstoffs durch Brom, der nach den Resultaten der Analysen erfolgt sein muß, ein Befund, für den schwer eine Erklärung zu geben ist.

In Analogie hiermit zu setzen ist die Einwirkung von Brom auf 2-4-Dimethyl-3-Acetyl-4-Carbäthoxypyrrol, das unter Abspaltung der Äthoxygruppe nach der Analyse in ein Säurebromid der folgenden Konstitution übergeht, wobei natürlich die Stellung des zweiten Bromatoms in α Stellung willkürlich angenommen ist.

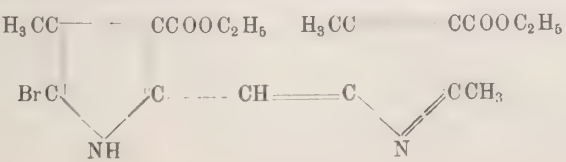


Ich habe diese Reaktion, so verlockend es auch vom chemischen Standpunkt aus erscheint, nicht weiter verfolgt, weil solche Versuche mich von meinem eigentlichen Thema, der Klarlegung der Konstitution des Blut- und Gallenfarbstoffs, zu weit abführen und habe die Reaktion nur weiter in der Richtung der Farbstoffbildung verfolgt.

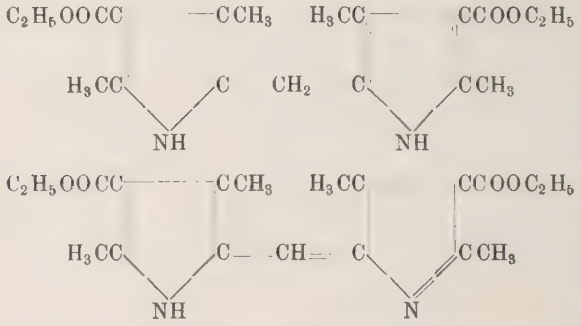
Ich ließ Brom weiterhin einwirken auf 2-4-Dimethyl-3-Carbäthoxypyrrol, und auf Hämopyrrol = 3-Äthyl-4-5-dimethylpyrrol und erhielt zwei Farbstoffe der folgenden Konstitution.



Für den zuerst angeführten Farbstoff käme auch die isomere Formel eines Dipyrrylmethens in Betracht.

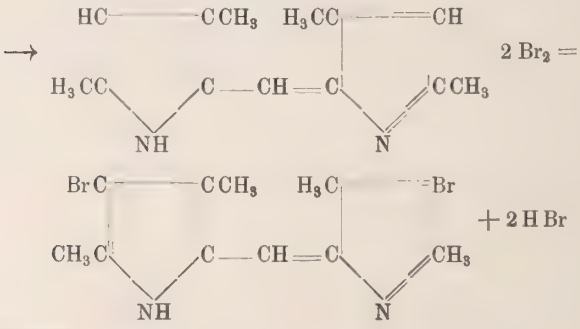


Letztere ist aber sehr unwahrscheinlich, weil die Bildung des Farbstoffs fast momentan vor sich geht, so daß eine intermediäre Aldehydbildung nicht annehmbar erscheint. Auch wäre dann zu erwarten, daß man durch Einwirkung von Brom auf Bis(2-4-Dimethyl-3-Carbäthoxypyrryl)methan eine analoge



Oxydation einer α ständigen Methylgruppe zu erwarten hätte, dies ist aber nicht der Fall, sondern das genannte Methan wird einfach zu dem zugehörigen entsprechenden Methenderivat (siehe die Formel) oxydiert.

In ganz analoger Weise wirkt Brom auf das Methenderivat des aus Glyoxal und 2-4-Dimethylpyrrol[1]) erhaltenen Farbstoffs ein, indem zwei Bromatome an den freien Methingruppen der Pyrrolkerne eintreten, aber eine Oxydation einer α ständigen Methylgruppe erfolgt nicht.



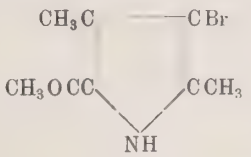
[1]) Ber. 47, S. 1820 und S. 3266.

Endlich erhielt ich durch Einwirkung von Brom auf 2-4-Dimethylpyrrol-3-Carbonsäure sowie auf 2-4-Dimethylpyrrol prächtig kristallisierende Farbstoffe, über deren Konstitution ich jedoch nichts Näheres sagen kann. Aus den oben angegebenen Gründen habe ich auch hier die Reaktion nicht weiter verfolgt.

Hervorzuheben ist das charakteristische spektroskopische Verhalten sämtlicher hier angeführten Farbstoffe. Sie absorbieren alle in Blauviolett geradeso wie „Urobilin“ und die von Piloty[1]) zuerst beschriebenen Dipyrrylmethenfarbstoffe und geben fluoreszierende Zinksalze. Es folgt hieraus wiederum, daß übereinstimmende spektroskopische Befunde keineswegs beweisend für die Konstitution sind.

Experimenteller Teil.

2-4-Dimethyl-5-Acetyl-3-Brompyrrol.



3,5 g 2-4-Dimethyl-5-Acetylpyrrol wurden in 40 ccm Eisessig gelöst und 4 g Brom in 30 ccm Eisessig zugegeben. Es tritt Bildung von Bromwasserstoff ein, Erwärmung und bald beginnt die Kristallisation des neuen Bromkörpers. Nach einer Stunde wurde abgesaugt, mit wenig Eisessig ausgewaschen.

Nach Umkristallisieren aus Essigsäure wurden 4 g analysenreines Material erhalten. F. P. 149–151°. Alkohol, Äther, Chloroform relativ leicht, Wasser, Petroläther schwer löslich.

Analyse: 0,2237 g Sbst.: 0,3673 g CO_2 + 0,0981 g H_2O; 0,2478 g Sbst.: 14,8 ccm N bei 18° und 719 mm Hg; 0,1965 g Sbst.: 0,1700 g Ag Br.

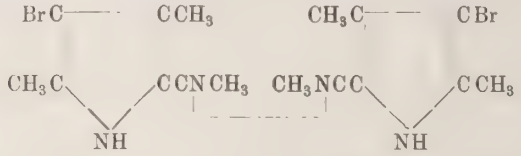
$C_8H_{10}NBrO$ (216,01). Ber.: 44,44% C; 4,67% H; 6,49% N; 37,00% Br.

Gef.: 44,78% C; 4,90% H; 6,55% N; 36,82% Br.

[1]) Ber. 47, S. 400; S. 1124 und 2531.

Einwirkung von Hydrazinhydrat auf 2-4-Dimethyl-5-Acetyl-3-Brompyrrol.

Ketazin des 2-4-Dimethyl-5-Acetyl-3-Brompyrrols.



1,1 g Bromkörper wurden in 5 ccm Pyridin gelöst, 0,25 g Hydrazinhydrat (= 1 Mol.) zugegeben und 2 Stunden im siedenden Wasserbad gelassen. Durch Zusatz von Essigsäure und Wasser wurde ein gelbes Öl erhalten, das beim Reiben kristallisierte.

Es wurde abgesaugt, mit Wasser ausgewaschen und zur Analyse aus Weingeist umkristallisiert. F. P. 204—205° unter Zersetzung. Bei Einwirkung von 2 Mol. Hydrazinhydrat wurde der gleiche Körper erhalten.

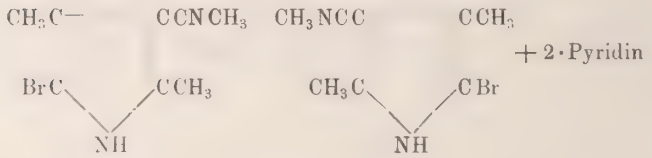
Analyse: 0,1809 g Sbst.: 0,2991 g CO_2 und 0,0792 g H_2O; 0,2053 g Sbst.: 25 ccm N 11° 717 mm Hg; 0,1550 g Sbst.: 0,1358 g Ag Br.

$C_{16}H_{20}N_4Br_2$ (424,04). Ber: 44,86% C; 4,71% H; 13,09% N; 37,34% Br.

Gef.: 45,09% C; 4,90% H; 13,50% N; 37,29% Br.

Einwirkung von Hydrazin auf 2-4-Dimethyl-3-Acetyl-5-Brompyrrol.

Ketazin-Pyridindoppelverbindung.



1.1 g des isomeren Brompyrrols wurden genau so angesetzt, wie eben beschrieben. Der Ansatz erstarrte nach 1 bis 2 Stunden zum Kristallbrei. Es wurde abgesaugt und der

intensiv gelb gefärbte Körper mit Alkohol ausgewaschen. Ausbeute 0,3 g. Durch längeres Erhitzen (5 Stunden) steigt die Ausbeute bis auf 0,5 g, durch Zusatz von mehr Hydrazinhydrat wurde kein anderes Resultat erhalten. Der Körper ist in Wasser spielend löslich, in Alkohol und Äther so gut wie unlöslich. F. P. 266° unter Zersetzung.

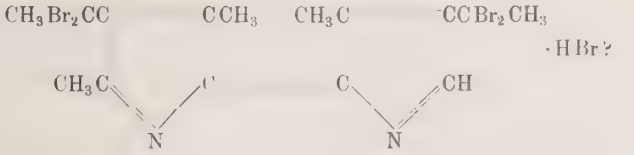
Analyse: 0,2009 g Sbst.: 0,3865 g CO_2 + 0,0974 g H_2O; 0,1608 g Sbst.: 0,1027 g Ag Br; 0,1871 g Sbst.: 23,9 ccm N 12° 715 mm Hg.

$C_{26}H_{30}N_6Br_2$ (586,14). Ber.: 53,23 % C; 5,16 % H; 14,34 % N; 27,27 % Br.

Gef.: 52,49 % C; 5,42 % H; 14,27 % N; 27,16 % Br.

Das Pyridin ist außerordentlich fest gebunden; es gelang nicht, das pyridinfreie Ketazin zu gewinnen.

Einwirkung eines Überschusses von Brom auf 2-4-Dimethyl-3-Acetylpyrrol.



Läßt man auf das genannte Pyrrol in Eisessig ein Molekül Brom einwirken, so erhält man in guter Ausbeute 2-4-Dimethyl-3-Acetyl-5-Brompyrrol. Bei Anwendung eines Überschusses von Brom erhält man einen prachtvoll kristallisierten Farbstoff von obiger Konstitution.

2,8 g 2-4-Dimethyl-3-Acetylpyrrol wurden in 50 ccm Eisessig gelöst und hierzu 10 g Brom (= 5 Mol.) in 15 ccm Eisessig gegeben. Alsbald entwickelt sich Bromwasserstoff und die Lösung färbt sich tief dunkelrot. Nach spätestens ½ Stunde beginnt die Kristallisation eines hellroten Farbstoffs, die nach mehreren Stunden beendigt ist. Es wird abgesaugt, mit Eisessig, Alkohol und Äther vollständig ausgewaschen. Ausbeute: 2 g. Zur Analyse wurde in Chloroform gelöst und mit Petroläther gefällt. Feine, verfilzte Nadeln.

Analyse: I. 0,1529 g Sbst.: 0,1582 g CO_2 und 0,0339 g H_2O; 0.2124 g Sbst.: 8,8 ccm N; 18° 719 mm Hg; 0,2064 g Sbst.: 0.3114 g HBr. II. 0,1454 g Sbst.: 0,1543 g CO_2 und 0,0377 g H_2O; 0,2124 g Sbst.: 8,8 ccm N; 18° 719 mm Hg; 0,2107 g Sbst.: 0,3147 g AgBr.

$C_{15}H_{17}N_2Br_5$ (624,76). Ber.: 28,81 % C; 2,74 % H; 4,48 % N; 63,96 % Br.

Gef.: I. 28.22 % C; 2,48 % H; 4,54 % N; 64,20 % Br
„ II. 28,94 „ ; 2,90 „ ; 4,54 „ ; 63,56 „

Auch bei Anwendung eines großen Überschusses von Brom erhält man den gleichen Körper. 6 und 9 Mol. Brom wurden genommen, die Ausbeute geht zurück, der Farbstoff hat aber den gleichen Bromgehalt.

6 Mol., Analyse: 0,1948 g Sbst.: 0,2928 g AgBr = 63,96 % Br.

9 Mol., Analyse: 0,2038 g Sbst.: 0,3072 g AgBr = 64,15 % Br.

Als Ausgangsmaterial zur Gewinnung des Farbstoffs braucht man nicht von dem 2-4-Dimethyl-3-Acetylpyrrol auszugehen, ebensogut kann man die Carbonsäure anwenden, aus der man durch Destillation das Pyrrol erhält:

18,1 g 2-4-Dimethyl-3-Acetyl-5-Carbonsäurepyrrol wurden in 200 ccm Eisessig aufgeschwemmt und nicht zu schnell 64 g Brom (4 Mol.) in 50 ccm Eisessig zugegeben. Unter Aufschäumen (CO_2 Entwicklung) tritt Lösung ein. Gleichzeitig erfolgt stark Bromwasserstoff-Entwicklung und Rotfärbung. Die Ausbeute an kristallisiertem Farbstoff beträgt 19 g.

Analyse: 0,2107 g Sbst.: 0,3134 g AgBr = 63,30 % Br.

Freier Farbstoff.

Das bromwasserstoffsaure Salz wurde in Chloroform gelöst, mit Natronlauge ausgeschüttelt, zuletzt mit Wasser. Die getrocknete Chloroformlösung hinterläßt beim Eindunken im Vakuum den gelbroten Farbstoff kristallisiert. Zur Analyse wurde aus Aceton umkristallisiert. Derbe Prismen. Der freie Farbstoff sintert bei 185° stark, schmilzt jedoch bis 300° nicht.

Er absorbiert, im Spektroskop in Chloroformlösung betrachtet, intensiv im Blauviolett. Zur Analyse und Molekulargewichtsbestimmung wurde bei Zimmertemperatur im Vakuum zur Gewichtskonstanz getrocknet.

Analyse: 0,1962 g Sbst.: 0,2268 g CO_2 und 0,0427 g H_2O; 0,2015 g Sbst.: 9,7 ccm N 14° 721 mm Hg; 0,2237 g Sbst.: 11,1 ccm N 13° 706 mm Hg; 0,1608 g Sbst.: 0,2221 g Ag Br. 0,9170 g Sbst. bewirkten in 34,55 g Chloroform eine Siedepunktserhöhung von 0,160°. K = 36,6.

$C_{15}H_{16}N_2Br_4$ (543,83). Ber.: 33,10% C; 2,97% H; 5,15% N; 58,78% Br.

Gef.: Mgw. = 607. Ber.: 33,01% C; 2,49% H; 5,35, 5,37% N; 58,78% Br.

Man sollte annehmen, daß bei der Einwirkung des überschüssigen Broms zunächst Dimethylacetylbrompyrrol entsteht; dies ist nicht der Fall, aus diesem Pyrrol erhält man den Farbstoff durch Brom nicht. Mehr Brom in den Farbstoff einzuführen gelang auch nicht.

Als ich obige Versuche nochmals der Nachprüfung unterwarf, konnte ich die obengenannten Resultate nicht wieder erhalten, und zwar erhielt ich bei den Kohlenwasserstoffbestimmungen sowohl des bromwasserstoffsauren Salzes wie des freien Farbstoffes ein Defizit von 2% im Kohlenstoff. Für den freien Farbstoff fand ich bei zahllosen Ansätzen konstant C = 30,96; H = 2,76; Br = 58,54; N = 5,20. Hieraus berechnet sich die Formel $C_{16,25}$ $H_{17,30}$ $Br_{4,6}$ $N_{2,3}$ O_1. Aus der Unstimmigkeit dieser Zahlen glaube ich schließen zu dürfen, daß ich bei den späteren Versuchen nicht mehr die richtigen Bedingungen getroffen habe und daß die Reaktion doch in obigem Sinne verläuft, aber jedenfalls muß die Reaktion vorläufig als eine unsichere bezeichnet werden.

Reduktion mit Eisessig-Jodwasserstoff.

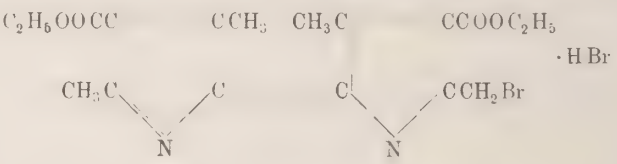
2,4 g des Farbstoffes wurden mit 60 ccm Eisessig-Jodwasserstoff 1½ Stunden lang im siedenden Wasserbad erhitzt. Nach dem Reduzieren des abgeschiedenen Jods mit Jodphos-

phonium wurde der Eisessig-Jodwasserstoff unter vermindertem Druck abdestilliert, der Rückstand mit Wasser und Soda behandelt und dann alkalisch mit Wasserdampf abgetrieben. Das Destillat wurde in der üblichen Weise auf Pyrrolpikrat verarbeitet. Erhalten wurde 0,4 g Dimethylpyrrolpikrat. F. P. 92—93°.

Analyse: 0,1590 g Sbst.: 25 ccm N bei 18° 712 mm Hg.
Gef.: 17,01. Ber.: 17,29.

Der mit Dampf behandelten Mutterlauge kann man durch Chloroform eine geringe Menge Substanz entziehen, die man beim Versetzen der konzentrierten Chloroformlösung mit Petroläther kristallisiert erhält. Wegen der geringen Ausbeute wurde sie nicht näher untersucht.

Einwirkung von Brom auf 2-4-Dimethyl-3-Carbäthoxypyrrol.



1,68 g 2-4-Dimethyl-3-Carbäthoxypyrrol wurde in 30 ccm Eisessig gelöst und hierzu 3,2 g Brom (2 Mol.) in Eisessig zugegeben. Tiefrote Färbung und unter Bromwasserstoff-Entwicklung fast plötzliche Kristallisation eines tiefrot gefärbten Farbstoffes. Derbe Prismen. Es wurde abgesaugt, mit Eisessig, Alkohol und Äther nachgewaschen. Ausbeute 1,5 g.

Zur Analyse wurde aus Chloroform-Petroläther umkristallisiert, und bei 100° im Vakuum bis zur Gewichtskonstanz getrocknet.

Analyse: 0,2324 g Sbst.: 11,4 ccm N bei 15° und 715 mm Hg; 0,1936 g Sbst.: 0,3112 g CO_2 und 0,0773 g H_2O; 0,2078 g Sbst.: 0,1562 g AgBr.

$C_{18}H_{22}N_2Br_2O_4$ (490,04). Ber.: 44,08 % C; 4,53 % H; 5,72 % N; 32,62 % Br.

Gef.: 43,84 % C; 4,47 % H; 5,41 % N; 31,99 % Br.

Freier Farbstoff.

In analoger Weise, wie beim bromwasserstoffsauren Salz des Farbstoffs aus Dimethylacetylpyrrol (S. 408) beschrieben, wurde auch hier das bromwasserstoffsaure Salz in den freien Farbstoff übergeführt. Der Chloroformrückstand kristallisiert sofort. Zur Analyse wurde aus Aceton-Wasser umkristallisiert. Nadeln, büschelförmig vereinigt. F. P. 154°. Zur Analyse I und II, ebenso zur Molekulargewichtsbestimmung wurde bei gewöhnlicher Temperatur, zur Analyse III bei 100° zur Gewichtskonstanz getrocknet.

I. 0,2116 g Sbst.: 0,4103 g CO_2 und 0,1006 g H_2O; 0,2255 g Sbst.: 14,2 ccm N bei 17° und 721 mm Hg; 0,1599 g Sbst.: 0,0752 g AgBr. 0,7414 g Sbst. in 29,10 Chloroform gelöst bewirkten eine Siedepunktserhöhung von 0,260°. K = 36,6.

II. 0,2219 g Sbst.: 0,4293 g CO_2 und 0,1048 g H_2O; 0,1904 g Sbst.: 11,8 ccm N bei 9° und 713 mm Hg: 0,1563 g Sbst.: 0,0731 g AgBr.

III. 0,2092 g Sbst.: 0,4054 g CO_2 und 0,0993 g H_2O; 0,2211 g Sbst.: 13,6 ccm N 9° 712 mm Hg: 0,1516 g Sbst.: 0,0704 g AgBr.

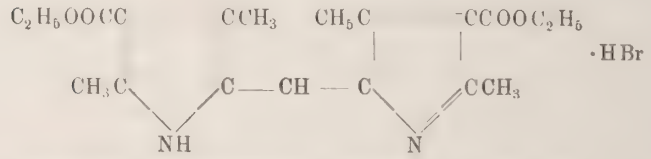
$C_{18}H_{21}N_2O_4Br$ (409,11). Ber.: 52,80 % C; 5,17 % H; 6,85 % N; 19,54 % Br.

Mgw.: Gef.: 359.

Gef.: I. 52,88 % C; 5,32 % H; 6,94 % N; 20,01 % Br.
„ II. 52,76 „ ; 5,28 „ ; 6,98 „ ; 19,90 „
„ III. 52,85 „ ; 5,31 „ ; 6,91 „ ; 19,81 „

Bei der Reduktion mit Eisessig-Jodwasserstoff gibt auch dieser Farbstoff 2-4-Dimethylpyrrol.

Einwirkung von Brom auf Di (2-4-Dimethyl-3-Carbäthoxypyrrol) methan.



1,2 g Di(2-4-Dimethyl-3-Carbäthoxypyrrol)-methan wurden in 30 ccm Eisessig mit 1,6 g Brom (3 Mol.) in Eisessig versetzt. Sofort kristallisiert ein roter Farbstoff heraus, der abgesaugt, mit Alkohol und Äther gewaschen wurde. Ausbeute 1,2 g.

Zur Analyse wurde aus Chloroform-Alkohol umkristallisiert und derbe metallisch glänzende Prismen erhalten. Im Kapillarrohr erhitzt, tritt bei 190° Dunkelfärbung, bei 227° Zersetzung.

Analyse: 0,1926 g Sbst.: 0,3781 g CO_2 und 0,0995 g H_2O; 0,2398 g Sbst.: 14,6 ccm N bei 17° und 718 mm Hg; 0,2185 g Sbst.: 0,0968 g Ag Br.

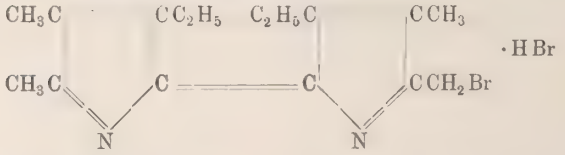
$C_{19}H_{25}N_2O_4Br$ (425,14). Ber: 53,63 % C; 5,92 % H; 6,59 % N; 18,80 % Br.

Gef.: 53,54 % C; 5,78 % H; 6,68 % N; 18,85 % Br.

Auch durch Einwirkung von 8 Mol. Brom und Erhitzen bis zum Sieden wurde kein wesentlich anderes Resultat erhalten. Die Ausbeute ging zurück auf 0,9 g, die Analyse ergab einen etwas höheren Bromgehalt und entsprechend weniger Kohlenstoff und Stickstoff.

Gef.: 53,04 % C; 6.00 % H; 6,56 % N; 20,19 % Br.

Einwirkung von Brom auf Hämopyrrol (4-5-Dimethyl-3-Äthylpyrrol).



2,2 g nahezu reines Hämopyrrol (Pikrat F. P. 122°) wurden in 15 ccm Eisessig gelöst und hierzu 3,2 g Brom (1 Mol.) in Eis-

essig auf einmal zugegeben. Sofort tiefe Dunkelfärbung, Bromwasserstoff-Entwicklung und Erwärmung. Es ist nun notwendig, möglichst schnell die Kristallisation zu erzielen, sonst tritt Verschmierung ein. Ist man im Besitz von Impfkristallen, erfolgt bei Zusatz die Kristallisation sofort. Die Impfkristalle erhält man durch Aufgießen einer Probe auf einen Objektträger und heftiges Reiben mit einem Glasstab über die ganze Fläche.

Die Ausbeute an reinem kristallisierten Material betrug im günstigsten Fall 0,8 g, einmal jedoch nur 0,1 g. Es wurde gewogen nach Absaugen, Auswaschen mit Eisessig, Alkohol und Äther und Trocknen im Vakuum.

Zur Analyse wurde aus Chloroform-Petroläther umkristallisiert und im Vakuum zur Gewichtskonstanz getrocknet.

I 4,217 mg Sbst.: 7,395 mg CO_2 + 2,08 mg H_2O; 5,184 mg Sbst.: 4,86 mg Ag Br; 4,780 mg Sbst.: 0,304 ccm N bei 17° und 723 mm Hg.

$C_{16}H_{22}N_2Br_2$ (402,04). Ber.: 47,76 % C; 5,52 % H; 6,97 % N; 39,76 % Br.

Gef.: 47,83 % C; 5,52 % H; 7,12 % N; 39,90 % Br.

Freier Farbstoff.

Durch Zerlegen mit Chloroform und Kalilauge in der oben beschriebenen Weise erhält man den Farbstoff in kristallisiertem Zustand. Zur Analyse wurde er aus Alkohol umkristallisiert und in derben Prismen erhalten. F. P. 119—120°. Äther und Petroläther leicht löslich, intensives „Urobilin"spektrum.

Analyse: 4,808 mg Sbst.: 10,63 mg CO_2 und 2,83 mg H_2O; 4,557 mg Sbst.: 10,08 mg CO_2 und 2,72 mg H_2O; 4,282 mg Sbst.: 0,334 ccm N bei 16,5° und 723 mm Hg; 4,922 mg Sbst.: 2,885 mg Ag Br.

$C_{16}H_{21}N_2Br$ (321,11). Ber.: 59,80 % C; 6,59 % H; 8,73 % N; 24,89 % Br.

Gef.: 60,30, 60,33 % C; 6,59, 6,68 % H; 8,75 % N; 24,94 % Br.

Aus der freien Base erhält man in üblicher Weise das Pikrat. Aus Alkohol stahlblau glänzende (im auffallenden Licht) makroskopische Prismen, im durchfallenden Licht rot. Pulver rot. Der Körper enthält 1 Mol. Pikrinsäure.

0,1396 g Sbst.: 16 ccm N bei 14° und 721 mm Hg.

$C_{22}H_{24}N_5O_7Br$ (550,16). Ber.: 12,73% N.

Gef.: 12,80% N.

Reduktion mit Eisessig-Jodwasserstoff.

Ein eigenartiges Verhalten zeigte der Hämopyrrolbromfarbstoff bei der Reduktion mit Eisessig-Jodwasserstoff in der beim Hämin üblichen Weise. Nach der oben angegebenen Konstitutionsformel sollte man erwarten, daß nur Hämopyrrol auftritt. Der Schmelzpunkt des Pikrates war jedoch von 108 bis 111° statt 120°, eine Erklärung für dieses Verhalten kann ich nicht geben.

1,5 g Hämopyrrolbromfarbstoff wurden in der üblichen Weise mit Eisessig-Jodwasserstoff reduziert und nach $1^1/_2$ Stunden mit Jodphosphonium entfärbt. Hiernach wurde der Eisessig-Jodwasserstoff im Vakuum abdestilliert und der Rückstand sodaalkalisch mit Dampf abgetrieben. Die Basen wurden auf Hämopyrrolpikrat verarbeitet, und 1,3 g Rohpikrat erhalten. Nach zweimaligem Umkristallisieren aus Benzol wurden 0.6 g erhalten vom Schmelzpunkt 108—111°. Das Kristallbenzol war vorher durch Trocknen im Vakuum entfernt worden. Die Ehrlichsche Probe fiel intensiv positiv aus.

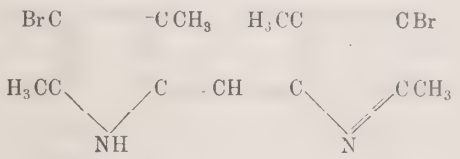
0,1699 g Sbst. gaben 0,2988 g Kohlensäure und 0,0792 g Wasser.

0,1375 g Sbst. gaben 21 ccm N bei 23° und 715 mm Hg.

$C_{14}H_{16}N_4O_7$. Ber.: C = 47,72; H = 4,55; N = 15,91.

Gef.: C = 47,96; H = 5,21; N = 16,27.

Einwirkung von Brom auf Bis(2-4-Dimethylpyrryl)methan.



1,6 g des obigen Körpers wurden in Eisessig gelöst und 3 Moleküle Brom in Eisessig eingerührt. Die Kristallisation erfolgt sofort, von der abgesaugt und die mit Eisessig ausgewaschen wurde. Nach dem Waschen mit Alkohol und Äther betrug die Ausbeute 2,3 g. Was hier vorlag, war das bromwasserstoffsaure Salz und dies wurde mit Hilfe von Chloroform und Natronlauge in die freie Base übergeführt, die zur Analyse zweimal aus Aceton umkristallisiert wurde. Erhalten 0,45 g, derbe Prismen. Schmelzpunkt 181°, nachdem bei 177° Sintern eingetreten war.

0,1881 g Sbst. gaben 0,3024 g Kohlensäure und 0,0733 g Wasser.

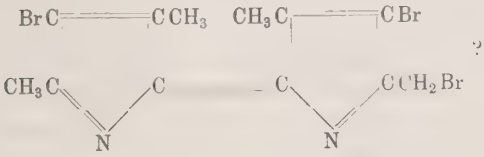
0,1401 g Sbst. gaben 10,2 ccm N bei 19° und 713 mm Hg.

0,1165 g Sbst. gaben 0,1220 g AgBr.

$C_{13}H_{14}N_2Br_2$; Mgw. 357,97. Ber.: C = 43,58; H = 3,94; N = 7,82; Br = 44,66.

Gef.: C = 43,84; H = 4,36; N = 7,88; Br = 44,56.

Einwirkung von Brom auf 2-4-Dimethylpyrrol.



Das 2-4-Dimethylpyrrol gewinnt man am besten nach dem Vorgang Knorrs aus 2-4-Dimethyl-3-5-Dicarbäthoxypyrrol durch Einwirkung von konzentrierter Schwefelsäure.

Hierbei entstehen verschiedene Nebenprodukte, deshalb genügt es nicht, aus der alkalisierten Lösung das Dimethylpyrrol abzutreiben, sondern das Destillat muß sorgfältig der fraktionierten Destillation unterworfen werden.

Bei der Einwirkung von Brom auf reines Dimethylpyrrol entstehen nun wahrscheinlich nebeneinander zwei verschiedene schön kristallisierende Körper. Verschiedentlich erhielt ich Analysenzahlen, die gut auf einen Körper obiger Konstitution stimmten, gelegentlich aber entstanden auch bromreichere Produkte. Beim Verwandeln in den freien Farbstoff wurde stets Brom gegen Hydroxyl partiell ausgetauscht. Da ich keine einwandfreien Resultate erhielt, verzichte ich auf die nähere Beschreibung der mühevollen Versuche und zahllosen Analysen.

Einwirkung von Brom auf 2-4-Dimethyl-3-Carbonsäurepyrrol.

Bei der Einwirkung von 2 Mol. Brom auf die Säure erfolgt eine Reaktion ganz anderer Art wie auf den zugehörigen Ester. Es entsteht ein roter Kristallbrei, unter dem Mikroskop braungelbe Nadeln, die abgesaugt, mit Alkohol, Äther nachgewaschen wurden. Eine Kohlensäure-Entwicklung war nicht zu erkennen. Ausbeute 1,7 g.

Da der Körper nicht umkristallisiert werden konnte, wurde das Rohprodukt analysiert. Bei gewöhnlicher Temperatur konnte keine Gewichtskonstanz erreicht werden, deshalb wurde bei 100° konstant getrocknet, wobei eine Gewichtsabnahme von nicht weniger als 3 % erfolgte. Die gefundenen Zahlen stimmten auf einen hochmolekularen Körper von der Formel $C_{78}H_{66}N_{10}O_6Br_{15}$. Es folgt hieraus, daß wahrscheinlich beim Trocknen noch sekundäre Einwirkungen erfolgt sind und deshalb wurde bei einer neuen Darstellung die erhaltene Kristallisation sofort mit 200 ccm 5%iger Natronlauge aufgeschlemmt und über Nacht geschüttelt. Am anderen Morgen wurde mit Wasser verdünnt und abgesaugt. Offenbar war also in dem Produkt keine Carboxylgruppe mehr vorhanden. Der Rückstand ließ sich nun sehr gut sowohl aus Pyridin wie alkoho-

lischem Ammoniak umkristallisieren. Aus letzterem kristallisiert er absolut einheitlich in langen gelbroten Prismen. Der Körper schmilzt bis 290° nicht. In den gebräuchlichen Lösungsmitteln außer Pyridin ist er sehr schwer löslich. Zur Analyse wurde bei 100° zur Gewichtskonstanz getrocknet.

0,1404 g Sbst. gaben 9 ccm N bei 24° und 718 mm Hg.

0,1677 g Sbst. gaben 0,2342 g Kohlensäure und 0,0476 g Wasser.

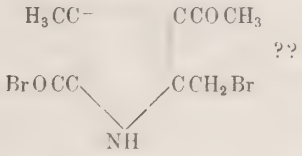
0,2227 g Sbst. gaben 0,2044 g AgBr.

$C_{20}H_{20}N_3Br_3O_5$; Mgw. 621,95. Ber.: C = 38,59; H = 3,24; N = 6,77; Br = 38,55.

Gef.: C = 38,09; H = 3,17; N = 6,82; Br = 39,06.

Was für ein Körper hier vorliegt, ist nicht ermittelt worden.

Einwirkung von Brom auf 2-4-Dimethyl-3-Acetyl-5-Carbonsäureäthylesterpyrrol.



Läßt man 1 Mol. Brom auf den oben angeführten Ester einwirken, so erhält man sofort einen schön kristallisierenden roten Körper, der seinen Eigenschaften nach ein Perbromid ist. Ich habe ihn nicht näher untersucht, sondern 4 Mol. Brom auf den Ester einwirken lassen.

2,1 g des Esters wurden in 30 ccm Eisessig gelöst und hierzu 6,4 g Brom zugegeben. Alsbald kristallisiert ein gelb gefärbter Körper aus, der abgesaugt, mit Eisessig, Alkohol und Äther angewaschen wurde. Hiernach war der Körper farblos und wog 1 g. F. P. 167—170°. Stark bromhaltig. Da das Brom leicht abgegeben wird, wurde direkt das Rohprodukt nach Trocknen über P_2O_5 analysiert: 0,1905 g Sbst.: 0,2336 g CO_2 und 0,0596 g H_2O; 0,2229 g Sbst.: 0,2557 g AgBr; 0,2028 g Sbst.: 8,1 ccm N 16° 715 mm Hg.

$C_9H_9NO_2Br_2$ (322,92). Ber.: 33,44 % C; 2,81 % H; 4,33 % N; 49,50 % Br.

Gef.: 33,46 % C; 3,50 % H; 4,39 % N; 48,82 % Br.

Durch Behandeln mit Wasser und Alkohol verliert der Körper sein Brom und geht in schön kristallisierende Substanzen über, die ich aus den oben angeführten Gründen nicht weiter untersucht habe.

Über einen Satz des Herrn Serge Bernstein.

Von **G. Mittag-Leffler.**

Vorgelegt von A. Pringsheim in der Sitzung am 4. Dezember 1915.

Herr Serge Bernstein hat einen wichtigen Satz ausgesprochen, der in engem Zusammenhange mit den Resultaten meiner früheren Arbeiten steht. Sein Satz lautet:

„Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß eine Funktion $F(z)$ der reellen Veränderlichen z auf einer Strecke AB analytisch ist, besteht darin, daß die Funktion in eine Reihe von Polynomen entwickelbar ist:

$$F(z) = P_0(z) + P_1(z) + \cdots + P_n(z) + \cdots, \tag{1}$$

worin $P_n(z)$ ein Polynom bedeutet, das höchstens vom Grade n ist und auf der Strecke AB gleichmäßig der Ungleichung genügt:

$$|P_n(z)| \leq M\varrho^n \ (\varrho < 1).\text{“}\ ^1) \tag{2}$$

[1]) Comptes Rendus de l'Académ. des Sciences de Paris, 27 Février 1911.

Herr Bernstein hat dem Beweise seines Satzes die folgenden Arbeiten gewidmet:

„Sur l'ordre de la meilleure approximation des fonctions continues par des polynomes de degré donné.“ Mémoire couronné par la classe des sciences de l'Acad. Royale de Belgique dans sa séance du 15 Décembre 1911. Bruxelles 1912.

„Sur une propriété des polynomes.“ Mitteilungen der math. Gesellschaft in Charkow.

„Über die beste Approximation der kontinuierlichen Funktionen durch Polynome gegebenen Grades.“ Mitteilungen der math. Gesellschaft in Charkow (2), 13, S. 49—194 (Russisch).

„Sur la définition et les propriétés des fonctions analytiques d'une variable réelle.“ Math. Ann., Bd. 75, S. 449—468.

Der erste Teil dieses Satzes, nämlich die Notwendigkeit der Bedingung, ist in den Formeln enthalten, die in den Noten 3[1]) und 4[2]) meiner Arbeit „Sur la représentation analytique d'une branche uniforme d'une fonction monogène" sowie in meinen früheren Veröffentlichungen"[3]) abgeleitet sind.

In der Tat habe ich gezeigt, daß es beliebig viele analytische Funktionen $f(u;\ \alpha)$ gibt, „erzeugende Funktionen", wie ich sie nannte (u bedeutet die Variable, α einen positiven Parameter), die folgende Eigenschaft besitzen:

„Die Funktion $v = f(u;\ \alpha)$ ist für $u < R$, wobei $R > 1$, aber hinreichend nahe an 1 ist, eine reguläre Funktion von u, für welche $f(0;\ \alpha) = 0$, $f(1;\ \alpha) = 1$. Durchläuft u die Peripherie des Kreises $u_1 = R$, so durchläuft v eine geschlossene Kurve — sie heiße V_α —, welche die Strecke (0, 1) umschließt und zu dieser Geraden symmetrisch ist. Diese Kurve umschmiegt die Strecke (0, 1) immer enger, wenn α nach Null strebt."

Eine solche Funktion ist[4])

$$(3) \qquad v = f(u;\ \alpha) = \frac{\alpha u}{(1-\beta u)^\alpha};\quad \beta = 1 - \alpha^{\frac{1}{\alpha}};\quad 0 < \alpha \leq 1.$$

Eine andere ist die des Herrn Fredholm[5])

$$(4) \qquad v = f(u;\ \alpha) = \frac{\log(1-\beta u)}{\log(1-\beta)};\quad \alpha = 1-\beta;\quad 0 \leq \beta < 1.$$

Ich habe früher auch noch andere Funktionen dieser Art untersucht.[6])

---

[1]) Acta Mathematica, Bd. 24, 1900.

[2]) Acta Mathematica, Bd. 26, 1902, S. 365, 366.

Siehe auch G. Mittag-Leffler, „Über die analytische Darstellung eines eindeutigen Zweiges einer monogenen Funktion." Münchener Berichte, 6. März 1915, S. 133—137.

[3]) Siehe z. B. „Om en generalisering af potensserien." Öfversigt af Kgl. Svenska Vet. Akad. Handl. 9 Mars 1898"; „Om den analytiska framställningen af en allmän monogen funktion, 3: dje meddel."; Öfversigt af Kgl. Svenska Vet. Akad. Handl. 14 Sept. 1898.

[4]) Note 4, S. 365. Münchener Berichte, l. c., S. 134—136.

[5]) Note 4, S. 366. Münchener Berichte, l. c., S. 137.

[6]) A. a. O.

Wählt man in (3) und (4) $R < \frac{1}{\beta}$, wobei α dem Wert Null beliebig nahe kommen kann, so bleibt die Funktion $f(u;\alpha)$, wie man sieht, für $|u| = R$ regulär.

Es werde nun vorausgesetzt, daß die Funktion $F(z-A)$, gleichviel, ob $z-A$ reell ist oder nicht, auf der von den Punkten A und B begrenzten Strecke mit Einschluß der Endpunkte regulär ist.

Bezeichnet x einen beliebigen Punkt der Strecke AB und setzt man $z-A=(x-A)f(u;\alpha)$, so wird $F(z)$ bei hinreichend kleiner Wahl von α für $|u<R$ eine reguläre Funktion von u sein. Als Funktion von z betrachtet ist die Funktion $F(z)$ im Inneren und auf der Begrenzung des Bereiches $(B-A)\cdot V_\alpha$ regulär.

Es ist folglich

$$(5)\qquad F((x-A)f(u;\alpha)) = F(0)+\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{\partial^\nu F((x-A)f(u;\alpha))}{\partial u^\nu}\right)_{u=0}\frac{u^\nu}{\nu!} = \mathfrak{P}(u),$$

wobei die Reihe $\mathfrak{P}(u)$ für $u<R$ konvergiert.

Andererseits ist in genügend kleiner Umgebung des Punktes A

$$(6)\qquad F(z-A)=\mathfrak{P}(z-A),$$

wo $\mathfrak{P}(z-A)$ eine nach positiven Potenzen von $(z-A)$ fortschreitende Reihe bedeutet. Hieraus folgt, wenn man $f(0;\alpha)=0$ berücksichtigt, für genügend kleines u die Gleichung

$$(7)\qquad \mathfrak{P}(u)=F((x-A)f(u;\alpha))=\mathfrak{P}((x-A)f(u;\alpha)).$$

Der Weierstraßsche Satz über iterierte Reihen[1]) liefert nun die Entwicklung

$$(8)\qquad \mathfrak{P}((x-A)f(u;\alpha)) = P_0(x)+P_1(x)u + \cdots + P_n(x)u^n+\cdots,$$

[1]) Werke, Bd. 2, S. 205—208.

in der $P_n(x)$ ein Polynom von höchstens n-tem Grade[1]) vorstellt und die in der Umgebung des Punktes $u = 0$ konvergent ist.

Die Gleichung (5) liefert also in der Umgebung des Punktes $u = 0$

$$F((x-A)f(u;\alpha)) = \mathfrak{P}(u) = P_0(x) + P_1(x)u + \cdots P_n(x)u^n + \cdots \tag{9}$$

Die Reihe $\mathfrak{P}(u)$ konvergiert, wie wir gesehen haben, für $u < R$. Dasselbe gilt also von der Reihe (8).

Verstehen wir nun unter g die Größe $\overline{\lim_{\substack{n=\infty \\ A<x<B}}} |\mathfrak{P}(u)|$, so ist nach dem Satz von Cauchy-Weierstraß

$$|P_n(x)| < g R^{-n} = g\varrho^n;\ \varrho < 1. \tag{10}$$

Andererseits ist wegen $f(1;\alpha) = 1$

$$F(x-A) = P_0(x) + P_1(x) + \cdots P_n(x) + \cdots \tag{11}$$

Durch die Aufstellung der Formeln (10) und (11) ist der Beweis für den ersten Teil des Bernsteinschen Satzes erbracht.

[1]) Im Falle der erzeugenden Funktion

$$f(u;\alpha) = \frac{\alpha u}{(1-\beta u)^\alpha};\ \beta = 1 - \alpha^{\frac{1}{\alpha}};\ 0 < \alpha < 1 \tag{3}$$

ist $P_n(x) = F^{(n)}(A)\frac{(\alpha(x-A))^n}{n!} + \frac{\alpha(n-1)}{1!}F^{(n-1)}(A)\beta\frac{(\alpha(x-A))^{n-1}}{(n-1)!} +$

$$+ \frac{\alpha(n-2)}{2!}\frac{(\alpha(n-2)+1)}{2!}F^{(n-2)}(A)\beta^2\frac{(\alpha(x-A))^{n-2}}{(n-2)!} + \cdots$$

$$+ \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-2)}{(n-1)!}F'(A)\beta^{n-1}\frac{\alpha(x-A)}{1!}.$$

Im Falle

$$f(u;\alpha) = \frac{\log(1-\beta u)}{\log(1-\beta)};\ \alpha = 1-\beta;\ 0 < \beta < 1 \tag{4}$$

erhält man dagegen

$$P_n(x) = \frac{\beta^n}{n!}\left[F^{(n)}(A)\left(\frac{x-A}{H}\right)^n + C_1^{(n)}F^{(n-1)}(A)\left(\frac{x-A}{H}\right)^{n-1} + \cdots + C_{n-1}^{(n)}F^{(1)}(A)\frac{x-A}{H}\right]$$

wobei $\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)\cdots(\lambda+n-1) = \lambda^n + C_1^{(n)}\lambda^{n-1} + \cdots + C_{n-1}^{(n)}\lambda$

$$H = \log\frac{1}{1-\beta}.$$

Um auch den zweiten Teil des Satzes zu beweisen, muß man Betrachtungen anderer Art zu Hilfe nehmen, die, wie mir scheint, mit ihrem eigentlichen Kerne einem elementaren, längst bekannten Teile der Theorie der analytischen Funktionen angehören.[1])

Es besteht nämlich folgender Satz:

„Es bezeichne

$$z = \xi + i\eta = a\cos\varphi + ib\sin\varphi \tag{12}$$

einen Punkt der Ellipse

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} = 1 \quad (a^2 - b^2 = 1) \tag{13}$$

mit den Brennpunkten $+1$ und -1. Dann ist der absolute Wert der Funktion

$$\psi(z) = z + \sqrt{z^2 - 1} \tag{14}$$

(die Wurzel sei so bestimmt, daß sie für reelle $z > 1$ positiv ist) konstant und gleich $a + b$, wenn z die Ellipse beschreibt. Auf der Strecke $(-1, +1)$ ist $|\psi(z)| = 1$."

Der Beweis dieses Satzes ergibt sich unmittelbar. Er ist in den folgenden Formeln enthalten:

$$\left\{\begin{aligned}
\psi(z) &= a\cos\varphi + ib\sin\varphi + \\
&\quad \sqrt{a^2\cos^2\varphi + 2iab\cos\varphi\sin\varphi - b^2\sin^2\varphi - 1} \\
&= a\cos\varphi + ib\sin\varphi + \\
&\quad \sqrt{a^2\cos^2\varphi + 2iab\cos\varphi\sin\varphi - b^2\sin^2\varphi - a^2 + b^2} \\
&= a\cos\varphi + ib\sin\varphi + \\
&\quad \sqrt{b^2\cos^2\varphi + 2iab\cos\varphi\sin\varphi - a^2\sin^2\varphi} \\
&= a\cos\varphi + ib\sin\varphi + b\cos\varphi + ia\sin\varphi \\
&= (a+b)e^{i\varphi} \\
|\psi(z)| &= a + b \\
\psi(z) &= z + \sqrt{z^2 - 1} = z + i\sqrt{1 - z^2} \\
|\psi(z)| &= 1; \quad -1 \leqq z \leqq +1.
\end{aligned}\right. \tag{15}$$

[1]) Siehe außer den Arbeiten des Herrn Bernstein die bemerkenswerte Vereinfachung, die Herr Marcel Riesz vor kurzem dem Beweis des Fundamentalsatzes gegeben hat, aus dem bei Herrn Bernstein der zweite Teil seines Satzes fließt (Acta Mathematica, Bd. 40).

Man setze nun zur größeren Einfachheit

$$A = -1;\ B = +1, \tag{16}$$

was der Allgemeinheit des Beweises keinen Eintrag tut, und betrachte die Funktion:

$$\frac{P_n(z)}{(\psi'(z))^n} = \varphi(z). \tag{17}$$

Sie ist in dem von der Doppellinie $(-1,\ +1)$ begrenzten Bereich regulär. Da nun $P_n(z)$ ein Polynom ist, $(\psi(z))^n$ dagegen nicht, so kann $\varphi(z)$ sich nicht auf eine Konstante reduzieren. Der größte Wert von $\varphi(z)$ befindet sich also auf der Linie $(-1,\ +1)$. Wie wir gesehen haben, ist $\psi(z)$ hier gleich 1.

Ferner setzten wir voraus

$$|P_n(z)| < M\varrho^n;\ -1 \leq z \leq +1;\ \varrho < 1. \tag{2}$$

Also ist

$$|\varphi(z)| \leq M\varrho^n;\ -1 \leq z \leq +1. \tag{18}$$

Es möge nun z die Ellipse (13) durchlaufen. Bekanntlich kommt $a + b$. das größer als 1 ist, dem Werte 1 beliebig nahe, wenn man die Ellipse hinreichend schmal wählt. Setzt man also

$$(a + b)\varrho < r < 1, \tag{19}$$

so erhält man

$$|P_n(z)| < Mr^n, \tag{20}$$

so lange z im Inneren oder auf der Ellipse bleibt.

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} P_n(z)$ ist folglich in diesem Bereich für z gleichmäßig konvergent. Die in dem Bereiche durch die Reihe dargestellte Funktion ist also hier analytisch und regulär, womit auch der zweite Teil des Bernsteinschen Satzes bewiesen ist.

Zur Theorie der Balmerschen Serie.

Von **A. Sommerfeld.**

Vorgetragen in der Sitzung am 6. Dezember 1915.

Die Theorie des Balmerschen Wasserstoffspektrums scheint auf den ersten Blick durch die wunderbaren Untersuchungen von N. Bohr zum Abschluß gebracht zu sein. Bohr konnte nicht nur die allgemeine Form des Seriengesetzes, sondern auch den Zahlenwert der darin eingehenden Konstanten und seine Verfeinerung unter Berücksichtigung der Kernbewegung erklären. Man darf sogar sagen, daß die Leistungsfähigkeit der Bohrschen Theorie vorläufig beschränkt ist auf diese Wasserstoffserie und auf die wasserstoff-ähnlichen Serien (ionisiertes Helium, Röntgenspektren, Serien-Enden sichtbarer Spektren). Trotzdem möchte ich zeigen, daß auch die Theorie der Balmerserie in gewissem Sinne eine Lücke aufweist, sobald man nämlich nichtkreisförmige (also im Falle des Wasserstoffatoms elliptische) Bahnen zuläßt. Ich werde diese Lücke ausfüllen durch eine Vertiefung des Quantenansatzes und dabei zugleich die Sonderstellung des Wasserstoffspektrums beleuchten: Während die anderen Elemente eine Reihe verschiedener Serien (Hauptserie, Nebenserien und ihre Kombinationen) und verschiedener Serientypen aufweisen (einfache Serien, Dublet-, Tripletserien), hat der Wasserstoff (von dem noch dunkeln Viellinienspektrum abgesehen) nur die einzige Balmersche Serie. Nach der hier vorzutragenden Auffassung erklärt sich dies daraus, daß in der Balmerschen Serie eine Reihe von Serien zusammenfallen, daß nämlich jede ihrer Linien auf eine gewisse Anzahl verschiedener

Arten entstehen kann, nicht nur durch Kreisbewegungen, sondern auch durch elliptische Bahnen von gewissen Exzentrizitäten. Diese eigenartige Linienkoinzidenz, die beim Wasserstoff nur durch die besondere Einfachheit der Keplerschen Bewegung oder, was dasselbe ist, durch die besondere Einfachheit der Konstitution des Wasserstoffatoms zustande kommt, kann, wie man leicht übersieht, bei anderen Elementen nicht mehr statt haben. Hier werden vielmehr die den verschiedenen Ellipsenbahnen analogen, aber entsprechend komplizierter gestalteten Bahntypen je zu verschiedenen Linien führen, die sich weiterhin in verschiedene Serientypen anordnen lassen werden. Das allgemeine Serienschema würde dann nicht mehr von zwei ganzen Zahlen n und m, sondern (vorbehaltlich weiterer Verallgemeinerung) von vier ganzen Zahlen n, n' und m, m' abhängen, in der Form

$$\frac{\nu}{N} = \varphi(n, n') - \varphi(m, m')$$

und die Besonderheit des Wasserstoffs würde darin bestehen, daß hier $\varphi(n, n') = \varphi(n + n') = (n + n')^{-2}$ wäre.

Ich habe diese Dinge bereits vor einem Jahr in einer Vorlesung vorgetragen, ihre Veröffentlichung aber zurückgestellt, da ich beabsichtigte, sie u. a. für die Auffassung des Starkeffektes fruchtbar zu machen. Diese Absicht scheiterte indessen vorläufig an der inzwischen auch von Bohr stark betonten Schwierigkeit, den Quantenansatz anzuwenden auf nicht-periodische Bahnen, in welche ja die Keplerschen Ellipsen durch ein elektrisches Feld auseinander gezogen werden. Auf diese und ähnliche Anwendungsmöglichkeiten werde ich am Schlusse hinweisen; in der Hauptsache beschränke ich mich hier auf die Darstellung der allgemeinen Überlegungen, die, wie ich glaube, bei der weiteren Ausgestaltung des Bohrschen Serienmodelles eine entscheidende Rolle spielen werden.

§ 1. Der Quantenansatz für periodische Bahnen.

Vor jeder Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung hat man sich die Frage nach den gleich-wahrscheinlichen Fällen (nach der Richtigkeit der zu benutzenden Würfel) vorzulegen. Auf dem Gebiete der statistischen Mechanik liefert hierfür den einzigen Anhaltspunkt der Liouvillesche Satz. Dieser sagt bekanntlich aus, daß gleichgroße Elemente des „Phasenraumes" (q, p) gleich wahrscheinlich sind, insofern und weil sie zeitlich ineinander übergeführt werden. q sind die Lagenkoordinaten, p die zugehörigen Impulskoordinaten

$$p = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}},$$

T ist die lebendige Kraft, und man hat soviel Koordinaten q und p, als man Freiheitsgrade des Systems hat. Indem man die Elemente $\Pi(dq\,dp)$ des Phasenraumes betrachtet, operiert man von Anfang an mit kontinuierlichen Wahrscheinlichkeiten. Die Quantentheorie ersetzt diese durch diskrete Wahrscheinlichkeiten und betrachtet statt des Phasenelementes $dq\,dp$ als Elementarbereich der Wahrscheinlichkeit das endliche Phasenintegral

$$\int dq\,dp = h.$$

Wir erinnern an eine berühmte, bei Planck nicht hingezeichnete Ellipsenfigur für den harmonischen linearen Resonator. In der Zustandsebene der q, p beschreibt der Resonator eine Ellipse, deren Hauptachsenverhältnis durch Trägheit m und Schwingungszahl ν des Resonators gegeben ist und längs der seine Energie konstant ist. Von dem hiernach bestimmten System ähnlicher Ellipsen werden in der ursprünglichen Fassung der Quantentheorie diejenigen Ellipsen als allein mögliche Zustandskurven hervorgehoben, die zwischen sich den Flächeninhalt h einschließen. Für die Energie W dieser ausgezeichneten Ellipsen gilt $W = nh\nu$, d. h. die Vorstellung der Energieelemente $h\nu$ folgt für den linearen Resonator aus der Forderung der endlichen Phasenelemente h.

Debye[1]) hat das Plancksche Verfahren auf eine beliebige periodische Bewegung von einem Freiheitsgrade ausgedehnt, und Ehrenfest[2]) hat dasselbe angewandt auf den Fall der einfachen Rotation. Handelt es sich um einen Massenpunkt m, der auf dem Kreise vom Radius a gleichförmig rotiert, so ist

$$q = \varphi, \quad T = \frac{m}{2} a^2 \dot{\varphi}^2, \quad p = m a^2 \dot{\varphi} = \text{konst.}$$

Die Zustände gleichförmiger Rotation werden in der q, p-Ebene durch Geraden parallel der q-Achse dargestellt; statt der Ellipsenringe beim Resonator ergeben sich hier Rechtecke von der Grundlinie 2π, dem Zustandsbereich der Variabeln $q = \varphi$, und der Höhe $\frac{h}{2\pi}$ derart, daß der Rechteckinhalt wie verlangt gleich h wird. Die aufeinander folgenden ausgezeichneten Zustände sind hier also bestimmt durch $p = \frac{nh}{2\pi}$; an die Stelle der diskreten Energieelemente beim schwingenden Massenpunkt tritt also beim rotierenden Massenpunkt der Bohrsche Ansatz der diskreten Impulselemente.

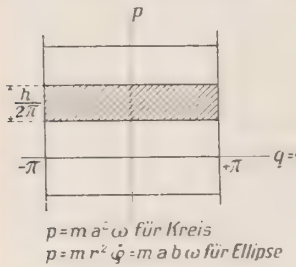


Fig. 1

Nach diesen vorbereitenden Beispielen wollen wir den Quantenansatz allgemein formulieren. Wir denken uns in der q, p-Ebene die Bildkurven einer einfach unendlichen Schar von Bahnkurven konstruiert und betrachten die Fläche zwischen irgend zweien der Bildkurven. Sind die Bildkurven geschlos-

[1]) Vorträge über die kinetische Theorie der Materie. 1913, p. 27.

[2]) Deutsche Physik. Ges., 1913, p. 451. Verf. beschreibt in den Gl. (7) und (8) die Figur so, als ob sie aus dem Nullpunkt und den Streckenpaaren $\pm \frac{nh}{2\pi}$ bestände, wobei der Nullpunkt der Rotation Null entsprechen würde. Es ist offenbar naturgemäßer, die Rotation Null ebenfalls durch die Strecke $-\pi$ bis $+\pi$ darzustellen, wie es in unserer Fig. 1 geschieht, da die Orientierung des Massenpunktes bei der Rotation Null beliebig ist.

sene, wie beim Resonator, so ist die Fläche direkt definiert. Andernfalls nehmen wir wie beim rotierenden Massenpunkt an, daß sie durch Hülfslinien (dort die Geraden $\varphi = \pm \pi$) zu geschlossenen ergänzt werden können, infolge irgend welcher Periodizitäts- oder Symmetrie-Eigenschaft der Bahnen. Innerhalb der unendlichen Schar unserer Bildkurven zeichnen wir nun eine diskrete Menge aus durch die Forderung, daß die Fläche zwischen der $n-1$ten und der $n$ten dieser Kurven gleich h sein soll. Bezeichnen wir die Ordinaten dieser Kurven der Reihe nach mit p_0, p_1, p_2, . . ., so schreibt sich unsere Forderung bei Ausführung der Integration nach p folgendermaßen:

$$\int\int dp\, dq = \int p_n\, dq - \int p_{n-1}\, dq = h.$$

Bezüglich des Vorzeichens möge festgesetzt werden, daß die Integration nach q im Sinne des Ablaufs der Bewegung (der fortschreitenden Zeit) genommen werde. Ferner wollen wir annehmen, daß die Kurve p_0 so gewählt werden kann, daß

$$\int p_0\, dq = 0$$

sei; diese Annahme ist in unseren beiden Beispielen erfüllt, indem die Bildkurve des ruhenden Resonators ein Punkt ist (der Mittelpunkt des Planckschen Ellipsensystems), die des ruhenden Rotators ein Stück der q-Achse selbst. Schreiben wir daraufhin unsere Quantenforderung der Reihe nach für $n = 1, 2, 3, \ldots$ hin, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} \int p_1\, dq &= h \\ \int p_2\, dq - \int p_1\, dq &= h \\ \int p_3\, dq - \int p_2\, dq &= h \\ \ldots\ldots\ldots\ldots &; \end{aligned}$$

durch Summation folgt:

$$\text{(I)} \qquad \int p_n\, dq = nh.$$

Die links stehende Größe nennen wir das Phasenintegral. Es ist nur definiert für periodische oder quasiperiodische Bahnen. (Unter quasiperiodischen Bahnen mögen solche verstanden wer-

den, auf denen, wie bei der Bahn des sphärischen Pendels, jedem Punkt ein späterer zugeordnet werden kann, in dem und von dem ab die Bewegung entsprechend verläuft.)

Wir zeigen, daß das Phasenintegral eine notwendig positive Größe ist, daß die Quantenzahl n also eine wirkliche (positive) Zahl ist. Wir denken uns zu dem Ende solche (orthogonale) Koordinaten q benutzt, daß in der quadratischen Form T nur die quadratischen Glieder $\frac{A_i}{2}\dot{q}_i^2$, nicht die Produktglieder $\dot{q}_i\dot{q}_k$ auftreten, wobei wegen des positiven Charakters von T die als Funktion der Koordinaten zu denkende Funktion $A > 0$ sein wird. Dann wird der zu $q = q_i$ gehörige Impuls $p = A\dot{q}_i$ und daher das Phasenintegral

$$\int p\,dq = \int p\dot{q}\,dt = \int A\dot{q}_i^2 dt > 0.$$

Die Einführung orthogonaler Koordinaten in T ist immer möglich; die später zu benutzenden Polarkoordinaten genügen von selbst dieser Bedingung. Jedenfalls braucht man nur solche Koordinaten zu verwenden, für die das Phasenintegral ebenso wie für orthogonale positiv wird.

Es ist der Hauptgegenstand dieser Arbeit, die Anwendung des Ansatzes (I) auf die Keplersche Bewegung zu studieren und seine Durchführbarkeit zu zeigen. Die Keplersche Bewegung finde unter dem Einfluß einer Newtonschen oder Coulombschen Kraft statt, zunächst um ein festes Zentrum. Auf die Bewegung im Azimute φ können wir die vorige Figur direkt übertragen. Die zugehörige Impulskoordinate ist hier die Flächenkonstante p, die Zustandskurven werden also wieder Geraden parallel der q-Achse; unser Ansatz (I) zeichnet unter diesen diejenigen quantenhaft aus, für welche gilt

$$\int p\,dq = p\int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi p = nh. \tag{1}$$

Wir wollen betonen, daß wir, um unserem quantentheoretischen Standpunkt getreu zu bleiben, die dynamisch definierte Flächenkonstante p, nicht eine durch die mittlere Umlaufs-

geschwindigkeit ω definierte, nur kinematisch bestimmte Größe dem Quantenansatz unterwerfen müssen. Dieser Unterschied ist wesentlich für die Beurteilung der im folgenden Paragraphen zu besprechenden Schwierigkeit. Der Zusammenhang zwischen p und ω ist der folgende:

$$p = m a b \omega = m a^2 \sqrt{1 - \varepsilon^2}\, \omega$$

(a, b = große und kleine Hauptachse der Ellipse, ε = numerische Exzentrizität, $a b \omega$ = doppelte Fläche der Ellipse, geteilt durch Umlaufszeit, also = mittlere Flächengeschwindigkeit). Soviel ich sehe, ist Herr Bohr geneigt,[1]) nicht die Größe $2\pi p$, sondern

$$2\pi m a^2 \omega = \frac{2\pi p}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} = n h \tag{1 a}$$

zu setzen, wodurch die hervorzuhebende Schwierigkeit allerdings scheinbar vermieden wird. Abgesehen von der allgemeinen Folgerichtigkeit des quantentheoretischen Standpunktes in unserem Ansatz (1) und der künstlichen Bevorzugung der großen Achse a in dem Ansatz (1 a) werde ich zu Gunsten des Ansatzes (1) in § 4 den Fall der kreisförmigen Rotation von Elektron und Kern um ihren gemeinsamen Schwerpunkt heranziehen, der Bohr zu der bedeutenden, inzwischen experimentell bestätigten Entdeckung der Abhängigkeit der Rydbergschen Konstanten N vom Atomgewicht des fraglichen Elementes geführt hat. In diesem Falle kommt man zu dem von Bohr vorhergesagten tatsächlichen Wert von N vollkommen ungezwungen, wenn man die Flächenkonstante p, d. h. den Gesamtimpuls von Elektron und Kern, nicht eine aus Abstand und Umlaufsgeschwindigkeit gebildete kinematische Größe gleich einem vielfachen von h setzt.

[1]) Ich vermute dieses nach den allgemeinen Erörterungen zu Beginn seiner ersten Arbeit, Phil. Mag. 26, pag. 3, wo alle Bewegungs-Elemente durch a und ω dargestellt werden. Eine ausdrückliche Formulierung des Ansatzes (1 a) habe ich bei Bohr nicht gefunden.

Es sei schon hier bemerkt, daß die Anwendung des Quantenansatzes auf die einzelne Zustandskoordinate q nach dem Vorangehenden zwar nahe liegt, aber eine neue Hypothese enthält. Bei dem Planckschen Oscillator oder der einfachen Rotation haben wir nur einen Freiheitsgrad und können bezüglich der Berechnung des Phasenintegrals nicht im Zweifel sein. Bei der Keplerschen Bewegung dagegen haben wir zwei Freiheitsgrade; die Begriffsbestimmung des Phasenintegrals ist daher hier nicht mehr eindeutig. Inwiefern unser Ansatz vom Koordinatensystem unabhängig ist, wollen wir später erörtern.

§ 2. Die Energie der Keplerschen Bewegung.

Bekanntlich benutzt die Bohrsche Theorie noch an einer anderen Stelle einen Quantenansatz, indem sie die ermittierte Schwingungszahl durch die Energiedifferenz des Überganges aus der ursprünglichen in die spätere Bahn des Elektrons ausdrückt:

$$h\nu = W_m - W_n \tag{II}$$

Ich glaube, daß diese Verwendung der Quantentheorie, trotz ihrer außerordentlichen Leistungsfähigkeit in Hinsicht auf das Kombinationsprinzip der Spektrallinien, doch nur provisorisch ist. Um z. B. beim Zeeman-Effekt die scharfe Polarisation der Zerlegungslinien zu erklären, wird es nötig sein, den Übergang im Einzelnen zu verfolgen und sich nicht zu begnügen mit einer pauschalen Energiebilanz. Um dieses Ziel zu erreichen, müßten ganz neue Gesetze der Mechanik gefunden werden. Handelt es sich doch in der gewöhnlichen Mechanik stets um Vorgänge, bei denen Energie und Impuls im Prinzip erhalten bleiben, hier dagegen um Übergänge, bei denen Energie und Impuls in charakteristischer Weise abgeändert werden.

Um den Bohrschen Ansatz (II), dem wir uns natürlich einstweilen anschließen müssen, verwenden zu können, müssen wir die Energie der Keplerschen Bewegung durch die Flächenkonstante p und die Exzentrizität ε ausdrücken. Wir könnten uns hierbei auf wohlbekannte Tatsachen der Mechanik stützen.

Ich ziehe es aber vor, die Formeln kurz abzuleiten, teils wegen anschließender Verallgemeinerungen, teils weil mir die folgende Ableitung besonders einfach scheint.

Nimmt man die Kernladung gleich $+e$ und die Kernmasse zunächst als ∞ an und beschreibt die Bewegung des Elektrons m teils durch rechtwinklige Koordinaten x, y, teils durch Polarkoordinaten r, φ mit dem Kern als Zentrum, so gilt

$$p = m r^2 \dot{\varphi},$$

$$\frac{d}{dt} m\dot{x} = -\frac{e^2}{r^2}\cos\varphi, \quad \frac{d}{dt} m\dot{y} = -\frac{e^2}{r^2}\sin\varphi. \tag{2}$$

Ersetzt man

$$\frac{d}{dt} \text{ durch } \dot{\varphi}\frac{d}{d\varphi} = \frac{p}{m r^2}\frac{d}{d\varphi} \tag{3}$$

und führt man die Abkürzung $\sigma = \frac{1}{r}$ ein, so wird

$$m\dot{x} = \frac{p}{r^2}\frac{d}{d\varphi}(r\cos\varphi) = -p\left(\sigma\sin\varphi + \frac{d\sigma}{d\varphi}\cos\varphi\right)$$

$$m\dot{y} = \frac{p}{r^2}\frac{d}{d\varphi}(r\sin\varphi) = -p\left(\sigma\cos\varphi - \frac{d\sigma}{d\varphi}\sin\varphi\right).$$

Statt (2) kann man also schreiben:

$$-\frac{p^2}{m r^2}\frac{d}{d\varphi}\left(\sigma\sin\varphi + \frac{d\sigma}{d\varphi}\cos\varphi\right) =$$

$$-\frac{p^2}{m r^2}\cos\varphi\left(\frac{d^2\sigma}{d\varphi^2} + \sigma\right) = -\frac{e^2}{r^2}\cos\varphi,$$

$$\frac{p^2}{m r^2}\frac{d}{d\varphi}\left(\sigma\cos\varphi - \frac{d\sigma}{d\varphi}\sin\varphi\right) =$$

$$-\frac{p^2}{m r^2}\sin\varphi\left(\frac{d^2\sigma}{d\varphi^2} + \sigma\right) = -\frac{e^2}{r^2}\sin\varphi.$$

Indem man den Faktor $\frac{\cos\varphi}{r^2}$ bzw. $\frac{\sin\varphi}{r^2}$ beiderseits hebt, folgt aus beiden Gleichungen gemeinsam:

$$\frac{d^2\sigma}{d\varphi^2} + \sigma = \frac{m e^2}{p^2}. \tag{4}$$

also durch Integration

$$\sigma = \frac{m e^2}{p^2} + A\cos\varphi + B\sin\varphi.$$

Nimmt man $\varphi = 0$ zum Perihel, so wird

$$B = 0 \text{ wegen } \frac{d\sigma}{d\varphi} = 0 \text{ für } \varphi = 0$$

$$A = \frac{m e^2}{p^2}\varepsilon \text{ wegen } \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} = \frac{\sigma(0)}{\sigma(\pi)} = \frac{1 + \frac{A p^2}{m e^2}}{1 - \frac{A p^2}{m e^2}}.$$

Wir erhalten also die gewöhnliche Polargleichung der Ellipse in der Form

$$\sigma = \frac{1}{r} = \frac{m e^2}{p^2}(1 + \varepsilon\cos\varphi). \tag{5}$$

Hieraus folgt wegen (3)

$$\left|\begin{array}{l} \dot{r} = \dfrac{p}{m r^2}\dfrac{dr}{d\varphi} = -\dfrac{p}{m}\dfrac{d\sigma}{d\varphi} = \dfrac{e^2}{p}\varepsilon\sin\varphi. \\ r\dot{\varphi} = \dfrac{p}{m r} = \dfrac{p}{m}\sigma = \dfrac{e^2}{p}(1 + \varepsilon\cos\varphi). \end{array}\right. \tag{6}$$

Für die kinetische Energie erhält man nach (6):

$$T = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) = \frac{m}{2}\frac{e^4}{p^2}(\varepsilon^2\sin^2\varphi + (1 + \varepsilon\cos\varphi)^2)$$

$$= \frac{m e^4}{p^2}\left(\frac{1+\varepsilon^2}{2} + \varepsilon\cos\varphi\right),$$

für die potentielle Energie nach (5):

$$V = -\frac{e^2}{r} = -\frac{m e^4}{p^2}(1 + \varepsilon\cos\varphi),$$

für die Gesamtenergie also

$$W = T + V = -\frac{m e^4}{2 p^2}(1 - \varepsilon^2). \tag{7}$$

Das Wesentliche an diesem Resultat ist die Art, wie die Exzentrizität ε in dasselbe eingeht. Daß die Gesamtenergie (ebenso wie bei Bohr) mit negativem Zeichen erscheint, braucht uns nicht zu überraschen. Ist sie doch nur bis auf eine willkürliche additive Konstante definiert. Z. B. würden wir nach der Relativitätstheorie noch die weit überwiegende Massenenergie mc^2 und Mc^2 des Elektrons und des Kernes hinzuzufügen haben, durch welche der Ausdruck für W sofort positiv werden würde.

Tragen wir in (7) unsern Quantenansatz (1) ein und schreiben wir zur Unterscheidung ε_n statt ε, so ergibt sich

$$W = W_n = -\frac{2\pi^2 m e^4}{h^2}\frac{1-\varepsilon_n^2}{n^2} = -Nh\frac{1-\varepsilon_n^2}{n^2}$$

mit Benutzung des Bohrschen Wertes für die Rydbergsche Konstante N. Dieser Ausdruck von W hängt in kontinuierlicher Weise von der Exzentrizität ε_n ab. Bilden wir in gleicher Weise die Energie W_m für eine andere Bahn von der Exzentrizität ε_m und dem Impulsmomente $2\pi p = mh$, so folgt durch den Quantenansatz (II) nicht die Balmersche Serie

$$\nu = N\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right)$$

mit scharfen, ganzzahlig durch m und n definierten Linien, sondern

$$\nu = N\left(\frac{1-\varepsilon_n^2}{n^2} - \frac{1-\varepsilon_m^2}{m^2}\right). \tag{8}$$

also eine Folge von Schwingungszahlen, welche bei kontinuierlich veränderlichen Exzentrizitäten vollkommen unscharf wäre: keine diskrete Serie, sondern ein verwaschenes Band.

Wollen wir also dem Elektron nicht überhaupt verbieten, außer Kreisen auch Ellipsenbahnen zu beschreiben, so ergibt sich unabweislich die Forderung, auch die Exzentrizitäten quantenhaft zu arithmetisieren und an gewisse ganzzahlige Werte zu binden.

Es sei denn, daß wir den Quantenansatz (1) aufgeben und uns dem Ansatze (1a) anschließen. Da bei diesem $\frac{p}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$ an die Stelle von p tritt, würde sich allerdings aus (7), unabhängig von ε, ergeben:

$$W_n = -\frac{Nh}{n^2} \text{ und } \nu = N\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right).$$

Wie indessen am Ende des vorigen § erörtert wurde, müssen wir diesen Notbehelf als zu künstlich abweisen.

§ 3. Quantenbedingung für die Exzentrizität.

Nachdem wir gesehen haben, daß die Exzentrizität der Ellipsenbahnen nicht kontinuierlich veränderlich sein darf, sondern auf ausgezeichnete diskrete Werte zu beschränken ist, erhebt sich die Frage nach einer Quantenbedingung für die Exzentrizität. Der einfachste Ansatz führt sogleich zu einem überzeugenden Ergebnis.

Wir übertragen den Quantenansatz (I) wörtlich von der azimutalen Koordinate $q = \varphi$ auf die radiale Koordinate $q = r$. Der zugehörige Impuls ist $p_r = \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}$ im Falle unendlicher Kernmasse. Wir betrachten unser Phasenintegral $\int p\,dq = \int p_r\,dr$ erstreckt über einen vollen Umlauf und setzen dasselbe nach (I) gleich einem ganzen Vielfachen n' von h; also

$$\int p_r\,dr = \int m\dot{r}\,dr = \int_0^{2\pi} m\dot{r}\,\frac{dr}{d\varphi}\,d\varphi = n'h. \tag{9}$$

In den nach r genommenen Integralen würde die Integration etwa von der Periheldistanz $r = (1-\varepsilon)\,a$ bis zur Apheldistanz $r = (1+\varepsilon)\,a$ und wieder zurück zur Periheldistanz zu erstrecken sein; indem wir auch hier φ als formale Integrationsvariable wählen, erzielen wir die einfacheren Integrationsgrenzen 0 und 2π und eindeutige Abhängigkeit des Integranden von der Integrationsvariabeln.

Zur geometrischen Veranschaulichung unseres Ansatzes (9) betrachten wir in der Phasenebene q, p die Bilder eines Systems von Bahnkurven, indem wir $q = r$ und $p = p_r$ als rechtwinklige Koordinaten benützen. Die Ordinaten p der aufeinanderfolgenden quantenhaft auszuzeichnenden Kurven des Systems mögen wie in § 1 als p_0, p_1, p_2, . . . unterschieden werden. p_0 sei im Besonderen eine Kreisbahn, für welche also $\dot{r} = 0$, $p_0 = 0$ ist, so daß wie in § 1 festgesetzt wurde

$$\int p_0 \, dq = 0$$

wird. Unser Bahnsystem sei etwa durch konstante Werte der Flächenkonstante p (für die wir aber hier der Deutlichkeit wegen f schreiben wollen) bei wachsenden Werten der Exzentrizität ε definiert. Die Bildkurven dieses Bahnsystems sind

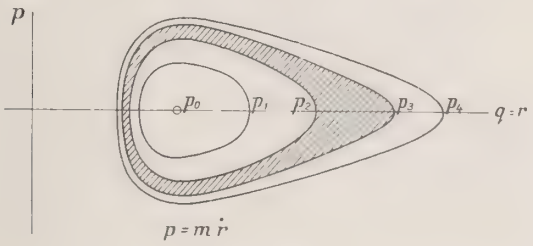


Fig. 2

sämtlich geschlossene Kurven, jede folgende schließt die vorhergehende ein. Als Gleichung des Systems ergibt sich nach (5) und (6) durch Elimination von φ

$$\frac{p^2}{f^2} + \left(\frac{1}{q} - \frac{m e^2}{f^2}\right)^2 = \left(\frac{m e^2 \varepsilon}{f^2}\right)^2,$$

also eine Gleichung vierter Ordnung zwischen den Variabeln p und q mit den Konstanten f und $\frac{m e^2}{f}$ und dem Parameter ε. Der Flächenring zwischen zwei aufeinander folgenden Kurven der Reihe $p_0, p_1, p_2, \ldots$, die durch unsere Quantenbedingung (9) aus der Gesamtschar herausgehoben werden, ist konstant gleich h.

Übrigens sind die Einzelheiten der Figur und der Kurvenform für unsere Zwecke belanglos und hier nur der größeren Anschaulichkeit wegen wiedergegeben.

Wir haben nunmehr das Phasenintegral in Gl. (9) durch die Exzentrizität ε auszudrücken, wobei wir uns auf die früheren Formeln für die Ellipsenbewegung zu stützen haben. Zunächst ist nach der Ellipsengleichung (5)

$$\frac{dr}{dq} = \frac{1}{\sigma^2}\frac{d\sigma}{dq} = \frac{p^2\varepsilon}{me^2}\frac{\sin\varphi}{(1+\varepsilon\cos\varphi)^2},$$

andererseits nach (6)

$$m\dot{r} = \frac{me^2\varepsilon}{p}\sin\varphi,$$

daher nach (9)

$$\int p_r\, dr = p\varepsilon^2 \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 q}{(1+\varepsilon\cos\varphi)^2}\, dq.$$

Das Integral läßt sich durch partielle Integration umformen und auf ein bekanntes Integral reduzieren. Man hat nämlich:

$$\varepsilon^2 \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{(1+\varepsilon\cos\varphi)^2} = -\varepsilon \int_0^{2\pi} \frac{\cos\varphi\, d\varphi}{1+\varepsilon\cos\varphi} = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{1+\varepsilon\cos\varphi} - 1\right) dq.$$

Nun ist aber bekanntlich (am bequemsten durch Integration in der komplexen Ebene der Variabeln e^{iq} zu verifizieren):

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{1+\varepsilon\cos\varphi} = \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}.$$

Man findet also

$$p\varepsilon^2 \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{(1+\varepsilon\cos\varphi)^2} = 2\pi p\left(\frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} - 1\right). \tag{10}$$

Setzen wir dies nach (9) gleich $n'h$ und zugleich nach Früherem $2\pi p = nh$, so ergibt sich als unsere neue Quantenbedingung

$$\text{(11)} \qquad \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} - 1 = \frac{n'}{n}, \quad 1 - \varepsilon^2 = \frac{n^2}{(n+n')^2}.$$

Die gewünschte quantenmäßige Heraushebung ausgezeichneter diskreter Werte der Exzentrizität ist damit gefunden. Nunmehr tragen wir diesen Wert in den Energieausdruck (7) ein, zugleich mit $2\pi p = nh$, und erhalten

$$\text{(III)} \qquad W = -\frac{2\pi^2 m e^4}{h^2} \frac{1}{(n+n')^2} = -\frac{Nh}{(n+n')^2}.$$

Dies Resultat ist im höchsten Grade überraschend und von schlagender Bestimmtheit. Nicht nur sind die weiterhin zulässigen Energiewerte ganzzahlig diskret geworden, sondern es hat sich der frühere Nenner n^2 gerade herausgehoben, derart, daß das Resultat nur noch von $n + n'$ abhängt. Die Energie ist also eindeutig bestimmt durch die Summe der Wirkungsquanten, die wir auf die azimutale und die radiale Koordinate beliebig verteilen können. Es scheint mir ausgeschlossen, daß ein so präzises und folgenreiches Ergebnis einem algebraischen Zufall zuzuschreiben sein könnte; ich sehe darin vielmehr eine überzeugende Rechtfertigung für die Ausdehnung des Quantenansatzes auf die radiale Koordinate resp. für die gesonderte Anwendung dieses Ansatzes auf die beiden Freiheitsgrade unseres Problems.

Aus dem Energieausdruck (III) ergibt sich nun sofort die Balmersche Serie, wenn wir neben der Bahn mit den Quantenzahlen n, n' (Endbahn des Elektrons) eine zweite mit den Quantenzahlen m, m' (Anfangsbahn des Elektrons) betrachten. Nach dem Quantengesetz (II) erhält man nämlich

$$\text{(IV)} \qquad \nu = N\left(\frac{1}{(n+n')^2} - \frac{1}{(m+m')^2}\right).$$

d. h. die Balmersche Serie in neuem Lichte, abhängig von vier ganzen Zahlen, die sich aber beim Wasserstoff sozusagen

zufällig auf zwei ganze Zahlen reduzieren. Durch Zulassung unserer quantenhaft ausgezeichneten Ellipsenbahnen hat die Serie nichts an Linienzahl gewonnen und nichts an Schärfe verloren. Statt des verwaschenen Bandes, von dem wir früher sprachen, haben wir wieder die diskreten Balmerlinien, aber in außerordentlich vervielfachter Mannigfaltigkeit ihrer Erzeugungsmöglichkeiten.

§ 4. Ergänzung betreffend die Mitbewegung des Kernes.

Der in (III) benutzte Wert für die Rydbergsche Konstante N ist bekanntlich nur insoweit richtig, als wir die Elektronenmasse gegen die Masse des Kernes vernachlässigen können. Bei Berücksichtigung der Endlichkeit der Kernmasse tritt an Stelle von m die unten zu definierende, aus Elektronenmasse und Kernmasse resultierende Masse μ. Wir benutzen diese inzwischen experimentell gesicherte Tatsache, um unseren Quantenansatz (I) teils zu prüfen, teils zu erweitern.

Zu dem Ende setzen wir zunächst die Formeln für die Bewegung von Elektron und Kern um ihren gemeinsamen Schwerpunkt her. Sind $X\,Y\,R\,\Phi$ bzw. $x\,y\,r\,\varphi$ rechtwinklige und Polarkoordinaten für Kern und Elektron mit dem Schwerpunkt als Anfangspunkt, so hat man zunächst als Flächensatz:

$$p = m r^2 \dot{\varphi} + M R^2 \dot{\Phi}. \tag{12}$$

Bezeichnet man den jeweiligen Abstand von Kern und Elektron mit ϱ

$$\varrho = R + r$$

und beachtet, daß nach dem Schwerpunktsatz ist

$$M R = m r, \quad \Phi = \varphi + \pi, \tag{13}$$

so ergibt sich

$$R = \frac{m}{M+m}\varrho, \quad r = \frac{M}{M+m}\varrho, \quad \text{also } p = \mu \varrho^2 \dot{\varphi}. \tag{13a}$$

mit der Abkürzung μ für die „resultierende Masse“

$$\mu = \frac{m M}{m + M}, \quad \frac{1}{\mu} = \frac{1}{m} + \frac{1}{M}. \tag{14}$$

Die Bewegungsgleichungen lauten:

$$(15)\quad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\dot{X} = -\dfrac{1}{M}\dfrac{e^2}{\varrho^2}\cos\Phi, & \dfrac{d}{dt}\dot{Y} = -\dfrac{1}{M}\dfrac{e^2}{\varrho^2}\sin\Phi \\ \dfrac{d}{dt}\dot{x} = -\dfrac{1}{m}\dfrac{e^2}{\varrho^2}\cos\varphi, & \dfrac{d}{dt}\dot{y} = -\dfrac{1}{m}\dfrac{e^2}{\varrho^2}\sin\varphi. \end{cases}$$

Bildet man die Differenz der untereinander stehenden Gleichungen und schreibt ξ, η für $x - X$, $y - Y$, so erhält man, wie bekannt, die Gl. (2) mit $\xi\ \eta\ \mu\ \varrho$ statt $x\ y\ m\ r$. Es folgt also bei gleicher Rechnung wie oben die Bahngleichung (5) und bei entsprechend zu ergänzender Definition von T die Energiegleichung (7) in Abhängigkeit von der Exzentrizität ε der Relativbewegung, mit dem einzigen Unterschied, daß überall, insbesondere in dem Werte von N, μ an die Stelle von m tritt.

Es fragt sich nun, wie in diesem Falle — bei Vorhandensein zweier azimutaler Koordinaten φ, Φ und zweier radialer Koordinaten r, R — der Quantenansatz zu erweitern ist. Die Erweiterung muß so vorgenommen werden, daß schließlich wieder der Energieausdruck (III) und die Balmersche Formel (IV) zum Vorschein kommt, mit dem einzigen Unterschiede, daß in dem Wert der Rydbergschen Konstanten μ an Stelle von m tritt. Wir behaupten, daß diesem Gesichtspunkt der folgende Quantenansatz entspricht, der auch an sich der einfachste und nächstliegende ist:

$$(16)\quad \begin{cases} \int\int p_\varphi\, d\varphi + \int P_\Phi\, d\Phi = n\,h \\ \int\int p_r\, dr + \int P_R\, dR = n'h, \end{cases}$$

daß sich also die Phasenintegrale für das Elektron und den Kern additiv verhalten.

Die Bedeutung der hier eingeführten Bezeichnungen p, P ist ersichtlich die folgende:

$$p_\varphi = \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = m r^2 \dot{\varphi}, \qquad p_r = \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = m\dot{r},$$

$$P_\Phi = \frac{\partial T}{\partial \dot{\Phi}} = M R^2 \dot{\Phi}, \quad P_R = \frac{\partial T}{\partial \dot{R}} = M\dot{R}.$$

Nach Gl. (12) ist aber $p_\varphi + P_\Phi = p =$ konstant, nach Gl. (13) überdies $d\Phi = d\varphi$. Daraufhin wird die erste Zeile von (16) identisch mit $2\pi p = nh$ oder mit Rücksicht auf (13a)

$$2\pi\mu\varrho^2\dot{\varphi} = nh. \tag{17}$$

Andererseits formen wir die zweite Zeile von (16) durch die Schwerpunktsbeziehungen (13a) um. Wir erhalten

$$\begin{cases} \int p_r\,dr = m\int \dot{r}\,dr = \dfrac{mM^2}{(M+m)^2}\int \dot{\varrho}\,d\varrho \\ \int P_R\,dR = M\int \dot{R}\,dR = \dfrac{Mm^2}{(M+m)^2}\int \dot{\varrho}\,d\varrho \\ \int p_r\,dr + \int P_R\,dR = \mu\int \dot{\varrho}\,d\varrho = n'h. \end{cases} \tag{18}$$

Diese Gleichung entspricht genau dem Ansatz (9) des vorigen Paragraphen mit dem einzigen Unterschiede, daß μ und ϱ an die Stelle von m und r getreten sind. In demselben Sinne entspricht Gl. (17) der Quantenbedingung für die frühere einzige azimutale Koordinate φ. Die weitere Ausrechnung läuft daher genau so wie im vorigen Paragraphen, wobei man die Ellipsengleichung für die Relativbewegung ϱ zu Grunde zu legen hat. Das Resultat wird durch Gl. (11) für die Exzentrizität und, wie verlangt, durch die Gl. (III) und (IV) für die Energie und die Serienformel dargestellt, bei abgeändertem N.

Der Ansatz (16) läßt sich auch von folgendem Standpunkte aus begründen. Man wähle von den beiden Koordinaten r, R die eine, z. B. r, aus als diejenige, durch die wir die Dynamik unseres Systems beschreiben wollen. Dann hat man die andere durch die Schwerpunktsgleichung $mr = MR$ auf jene zurückzuführen, insbesondere in dem Ausdruck der lebendigen Kraft

$$\begin{aligned} T &= \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) + \frac{M}{2}\left(\dot{R}^2 + R^2\dot{\Phi}^2\right) \\ &= \frac{m}{2}\left(1 + \frac{m}{M}\right)(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2). \end{aligned}$$

Zu der einmal bevorzugten Koordinate r gehört als Impulskoordinate des Systems, unter T den soeben umgeformten Ausdruck verstanden:

$$\bar{p}_r = \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = m\left(1 + \frac{m}{M}\right)\dot{r}.$$

Als Phasenintegral des Systems haben wir jetzt anzusprechen:

$$\int p_r\, dr = m\left(1 + \frac{m}{M}\right)\int \dot{r}\, dr.$$

Daß dieses Integral mit (18) identisch ist, folgt aus der Beziehung (13a)

$$r = \frac{M}{M + m}\varrho,$$

der zufolge wir erhalten

$$\int \bar{p}_r\, dr = m\left(1 + \frac{m}{M}\right)\frac{M^2}{(M+m)^2}\int \dot{\varrho}\, d\varrho = \mu \int \dot{\varrho}\, d\varrho.$$

Die entsprechende Rechnung unter Bevorzugung von R als radialer Systemkoordinate liefert

$$T = \frac{M}{2}\left(1 + \frac{M}{m}\right)(\dot{R}^2 + R^2\dot{\Phi}), \quad P_R = M\left(1 + \frac{M}{m}\right)\dot{R},$$

$$\int P_R\, dR = \mu \int \dot{\varrho}\, d\varrho.$$

Derselbe Standpunkt (Elimination einer der beiden Koordinaten, Bevorzugung der anderen) läßt sich auch bei den azimutalen Koordinaten einnehmen und führt hier entsprechend auf Gl. (17). Unsere Quantenansätze in den Gleichungen (16) erscheinen also auch von diesem Standpunkte aus als naturgemäß.

Schließlich kommen wir nochmals auf den Ausweg zurück, durch den abgeänderten Quantenansatz (1a) die Schwierigkeit der kontinuierlichen Abhängigkeit der Energie von der Exzentrizität zu beseitigen. Wenn dieser Ausweg schon bei alleiniger Betrachtung des Elektrons reichlich künstlich erschien, so wird er mit Rücksicht auf die Mitbewegung des Kernes noch schwerer gangbar. Im Anschluß an Gl. (1a)

müßte man nämlich jetzt, um den Energieausdruck zu arithmetisieren,

$$\frac{2\pi p}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} = 2\pi\mu a^2\omega = nh$$

setzen, also eine in ziemlich künstlicher Weise aus der mittleren Umlaufsgeschwindigkeit ω, der größten Entfernung a von Kern und Elektron und der mittleren Masse μ zusammengesetzte Größe der Quantenbedingung unterwerfen. Man könnte fragen, warum wird nicht statt der größten eine mittlere Entfernung zu Grunde gelegt, warum wird gerade das dynamisch definierte Massenmittel μ benutzt?

Noch größere Schwierigkeiten entstehen dem Quantenansatz (1a), wenn man die Veränderlichkeit der Masse nach der Relativitätstheorie in Betracht zieht. Während es sich im vorigen Falle nur um das Mittel μ zwischen den konstanten Massen von Kern und Elektron handelte, müßte man hier bei entsprechender Übertragung des Ansatzes (1a) mit einem komplizierten Zeitmittel der Massen oder mit den betreffenden Ruhmassen rechnen, mit denen das Problem eigentlich nichts zu tun hat. Dagegen handelt es sich bei unserem Ansatz stets um die auch in der Relativitätstheorie eindeutig und naturgemäß definierte Impulskonstante. Ich möchte indessen an dieser Stelle nicht näher hierauf eingehen, da ich auf die bedeutsame Rolle, welche der Relativität bei der weiteren Ausgestaltung unserer Theorie und bei ihrer experimentellen Sicherstellung zukommt, ohnehin in einer anschließenden Arbeit zurückzukommen haben werde.

§ 5. Die zu einer Balmer-Linie gehörenden Ellipsenbahnen.

Wir wünschen uns ein Bild zu machen von Anzahl und Gestalt derjenigen Bahnen, welche zu demselben Werte der Energie W Anlaß geben. Es sind dies nach (III) alle diejenigen Ellipsen, für welche $n + n'$ denselben Wert hat, z. B. den Wert $n + n' = 2$ wie in dem ersten Terme der sichtbaren Balmer-Serie oder den Wert $m + m' = 3, 4, 5, \ldots$ wie in dem zweiten Term.

Nach (1) und (11) ist

$$2\pi p = nh,\ 1 - \varepsilon^2 = \frac{n^2}{(n+n')^2}. \tag{19}$$

Aus der Ellipsengleichung (5) folgt für das Perihel ($\varphi = 0$; $r = a(1-\varepsilon)$) oder das Aphel ($\varphi = \pi$, $r = a(1+\varepsilon)$):

$$\frac{1}{a(1 \mp \varepsilon)} = \frac{me^2}{p^2}(1 \pm \varepsilon),\ \text{also}\ a = \frac{p^2}{me^2}\frac{1}{1-\varepsilon^2}. \tag{20a}$$

Andrerseits ist nach Definition der Exzentrizität

$$b = a\sqrt{1-\varepsilon^2} = \frac{p^2}{me^2}\frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}. \tag{20b}$$

Setzen wir die Werte von p und $1-\varepsilon^2$ aus (19) in (20a, b) ein, so folgt:

$$a = \frac{h^2}{4\pi^2 me^2}(n+n')^2,\ b = \frac{h^2}{4\pi^2 me^2}n(n+n'). \tag{21}$$

Für die Diskussion kommt namentlich in Betracht, daß die ganzen Zahlen n und n' notwendig positiv sind, wie in § 1 allgemein gezeigt wurde. Wir erhärten diese ebenso einfache wie folgenreiche Tatsache in unserem Falle folgendermaßen: Unter Absehung von der Bewegung des Kernes wird für unsere (orthogonalen) Polarkoordinaten r, φ:

$$p_r = m\dot{r},\ p_\varphi = mr^2\dot{\varphi}$$
$$\int p_r\,dr = \int m\dot{r}^2\,dt,\ \int p_\varphi\,d\varphi = \int mr^2\dot{\varphi}^2\,dt.$$

Beide Phasenintegrale sind so sicher positiv, als der Fortschritt der Zeit positiv ist, da stets dr und $d\varphi$ wachsend im Sinne des Ablaufs der Bewegung gezählt wurden. Ebenso bei beweglichem Kern, wo sich n und n' nach (16) je aus zwei positiven Summanden zusammensetzen. Also haben wir stets eine positive Zahl von Quanten n und n'. Bezüglich der Zulässigkeit des Wertes Null ist folgendes zu bemerken. $n' = 0$ bedeutet nach (19) $\varepsilon = 0$, also die Kreisbahn, die wir jedenfalls als möglich erklären werden. $n = 0$ aber bedeutet $p = 0$, also Ausartung der Ellipsenfläche in eine doppelt zählende Gerade.

Das Elektron würde hierbei dem Kern unendlich nahe kommen und von ihm vermutlich abprallen (vgl. Rutherfords Versuche über die Ablenkung der α-Strahlen). Außerdem müßte die Geschwindigkeit in dieser Bahn mit der Annäherung an den Kern unendlich werden, so daß die bisherigen Rechnungen ungültig werden würden und relativistisch zu modifizieren wären. Jedenfalls werden wir die Bahn mit $n' = 0$ als höchst problematisch ansehen und im folgenden nicht mitzählen; in den Figuren ist sie punktiert eingetragen.

Zu den Gl. (21) ist zu bemerken, daß a bei gegebenem $n + n'$ fest, b veränderlich ist. Wie es sein muß, gilt nach (19) und (21) stets $0 \leq \varepsilon < 1$, $b \leq a$.

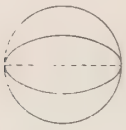


Fig. 3

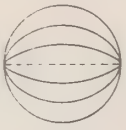


Fig. 4

Fig. 5

Wir zählen jetzt die bei den Balmer-Linien maßgebenden Fälle auf:

$n + n' = 2$, zwei Möglichkeiten.

$n' = 0, \quad n = 2, \quad \varepsilon = 0, \quad b = a$

$n' = 1, \quad n = 1, \quad \varepsilon = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad b = \frac{a}{2}$

($n' = 2, \quad n = 0, \quad \varepsilon = 0, \quad b = 0$, problematisch; der entsprechende Fall wird im folgenden fortgelassen).

$m + m' = 3$, drei Möglichkeiten.

$m' = 0, \quad m = 3, \quad \varepsilon = 0, \quad b = a$

$m' = 1, \quad m = 2, \quad \varepsilon = \frac{\sqrt{5}}{3}, \quad b = \frac{2}{3}a$

$m' = 2, \quad m = 1, \quad \varepsilon = \frac{\sqrt{8}}{3}, \quad b = \frac{1}{3}a.$

$m + m' = 4$, vier Möglichkeiten.

$$m' = 0, \quad m = 4, \quad \varepsilon = 0, \qquad b = a$$

$$m' = 1, \quad m = 3, \quad \varepsilon = \frac{\sqrt{7}}{4}, \quad b = \frac{3}{4}a$$

$$m' = 2, \quad m = 2, \quad \varepsilon = \frac{\sqrt{12}}{4}, \quad b = \frac{2}{4}a$$

$$m' = 3, \quad m = 1, \quad \varepsilon = \frac{\sqrt{15}}{4}, \quad b = \frac{1}{4}a$$

usf. Soll H_α erzeugt werden, so kommen dafür als Endbahnen die zwei in Fig. 3 ($n + n' = 2$) verzeichneten, als Anfangsbahnen die drei Bahnen in Fig. 4 ($m + m' = 3$) in Betracht; im ganzen gibt es hiernach

$$2 \cdot 3 = 6$$

Erzeugungsarten für H_α. Ebenso für H_β (Übergang aus einer der vier Bahnen von Fig. 5 ($m + m' = 4$) in eine der zwei Bahnen von Fig. 3)

$$2 \cdot 4 = 8$$

Erzeugungsarten, allgemein mit $n + n' = N$, $m + m' = M$ die Anzahl

(22) $$N \cdot M.$$

Man kann aber im Zweifel sein, ob jeder dieser Übergänge möglich ist, ob nämlich nicht vielleicht nur solche Übergänge zuzulassen seien, die mit Quantenverlust verbunden sind. Bei Betrachtung der Energie und der Energiequanten im Sinne des Ansatzes II von Bohr ist es uns geläufig zu sagen: die Energie ist eine positive Größe; bei Prozessen, die von selbst vor sich gehen, kann sie nur abnehmen; aus $W_m - W_n > 0$ folgt dann:

$$m + m' > n + n'.$$

Gegenwärtig handelt es sich zwar nicht um Energiequanten, sondern um Wirkungsquanten; hier nun scheint es, daß Impulse oder Impulsmomente ebensogut positives wie negatives Vorzeichen haben und ebensogut zu- wie abnehmen können.

Nachdem wir aber festgestellt haben, daß in unserem Ausdruck für das Phasenintegral die fragliche Impulskoordinate durch Multiplikation mit dem dq der Lagenkoordinate zu einer wesentlich positiven Größe verbunden ist, liegt die Annahme nahe, daß eine Veränderung dieser Größe bei freiwilligen Übergängen ebenso einseitig stattfände, wie die der Energie, nämlich im abnehmenden Sinne. Dann würden nur solche Übergänge zwischen den vorgenannten Bahnkurven möglich sein, bei welchen keine der beiden Quantenzahlen abnimmt, bei denen also

$$m \geq n, \; m' \geq n'.$$

Eine Entscheidung über diese und ähnliche Fragen darf man (vgl. den nächsten §) von dem Stark-Effekt erwarten.

Unter vorläufiger Annahme dieser Ansicht würden z. B. bei H_α von den 6 vorher aufgezählten Übergängen nur die folgenden 4 wirklich sein:

$$\begin{array}{lll} m = 3, \; m' = 0 & \longrightarrow & n = 2, \; n' = 0 \\ m = 2, \; m' = 1 & \searrow & n = 1, \; n' = 1 \\ m = 1, \; m' = 2 & \nearrow & \end{array}$$

Ebenso würden bei den anderen Balmer-Linien H_β, H_γ, ... je zwei Übergänge in Fortfall kommen. Die Anzahl der Erzeugungsarten würde allgemein betragen bei $n + n' = N$, $m + m' = M > N$

$$N(M - N + 1), \tag{22a}$$

z. B. bei der von Ritz und Paschen entdeckten ultraroten Kombinationslinie des Wasserstoffs $N = 3$, $M = 4$

$$3 \cdot 2 = 6.$$

In jedem Falle erscheint eine Wasserstofflinie in unserer Auffassung als eine ziemlich komplizierte Überlagerung verschiedener diskreter Vorgänge.

§ 6. Allgemeine Folgerungen betreffend den Stark-Effekt bei Wasserstoff und die verschiedenen Serientypen bei anderen Elementen.

Die elementare Lorentzsche Theorie des Zeeman-Effektes beruht darauf, daß in jeder Spektrallinie drei unter sich gleiche Hauptschwingungen eines quasielastisch-isotrop schwingenden Elektrons übereinanderfallen. Das Magnetfeld erzeugt keine neuen Schwingungsmöglichkeiten, sondern legt nur die vorhandenen auseinander. Die ursprünglich zusammenfallenden Frequenzen erscheinen dabei als ein labileres, durch äußere Einwirkung leichter zu beeinflussendes Gebilde wie die ursprünglich verschiedenen Frequenzen eines anisotrop schwingenden Elektrons, bei dem der Zeeman-Effekt nur von der zweiten Ordnung sein würde.

Diese Anschauung überträgt sich unmittelbar auf den Stark-Effekt bei der Balmer-Serie. Nach unserer Auffassung fallen in jeder Balmer-Linie eine ganze Reihe von Frequenzen verschiedenen Ursprunges zusammen. Das elektrische Feld wird die verschiedenen Ellipsenbahnen in verschiedener Weise beeinflussen und daher die ursprünglich zusammenfallenden Frequenzen auseinanderlegen. Die Beeinflussung wird beim Wasserstoff stärker sein, als bei anderen Elementen, wo (vgl. unten) ein derartiges Zusammenfallen nicht zu erwarten ist.

Für diese Auffassung des Stark-Effektes spricht die große und mit der Nummer der Balmer-Linie steigende Komponentenzahl, die Stark[1]) bei seiner Feinzerlegung beobachtet. Eine von Lo Surdo aufgestellte Regel, wonach diese Zahl jener Nummer selbst gleich sein sollte, ist damit widerlegt. Wir stellen hier die Zahlen zusammen, die Stark für die p- und s-Komponenten findet, mit denen, die sich aus unserer Abzählung in Gl. (22) und (22a) ergeben. Dabei zähle ich von den Starkschen Linien nur diejenigen, die nach der einen Seite verschoben sind und rechne die unverschobene Linie mit. Diese Anzahlen sind

[1]) Göttinger Nachrichten 1914.

	p-Komp.	s-Komp.	Gl. (22a)	Gl. (22)
H_α	3	2	4	6
H_β	6 bis 7	6 bis 7	6	8
H_γ	7	7	8	10
H_δ	7 bis 8	7 bis 8	10	12

Einige Linien sind von Stark als zweifelhaft bezeichnet, auch wird von der Möglichkeit gesprochen, daß noch weitere lichtschwache Komponenten gefunden werden könnten. Ein allgemeiner Parallelismus zwischen der beobachteten und der von uns berechneten Linienzahl ist nicht zu leugnen, zumal wenn wir den im vorigen Paragraphen aus allgemeinen Gesichtspunkten bevorzugten Standpunkt der Gl. (22a) einnehmen.

Es sind schon verschiedene Erklärungen für den Stark-Effekt vorgeschlagen. Insbesondere stellt eine Formel von Bohr[1]) die Verschiebung der stärksten p-Komponente sehr gut dar. Aber gerade in Betreff der Linienzahl versagen alle diese Erklärungen bisher vollständig. Sie lassen eigentlich immer nur zwei p-Komponenten vorhersehen. Bezüglich der Verwendung unserer Abzählung sind wir geneigt, dieselbe sowohl für die p- wie für die s-Komponenten in Anspruch zu nehmen. Eine Unsicherheit liegt hier darin, daß der Energieansatz (II) überhaupt keinen direkten Schluß auf die Polarisationen zuläßt. Man muß sich also damit begnügen, Bahnen, deren Ebenen dem elektrischen Felde parallel sind, mit den p-Komponenten, Bahnen, die dazu senkrecht stehen, mit den s-Komponenten in Zusammenhang zu bringen, wobei noch die weitere Schwierigkeit auftritt, daß die durch das Feld deformierten Bahnen strenge genommen nicht mehr eben sind. Für unsere feldlosen Bahnen sind natürlich alle Ebenen gleichberechtigt; unter dem Einfluß des Feldes aber können die parallelen und senkrechten Ebenen bevorzugt werden. Während die Gestalt der ursprünglichen Ellipsenbahnen durch das Feld deformiert wird, wird ihre Anzahl im allgemeinen erhalten bleiben. Hierauf gründet sich unsere Vermutung, daß die Anzahl der p- und s-Komponenten

[1]) Phil. Mag., September 1915, pag. 404.

gleich und gleich der Anzahl unserer ursprünglichen Ellipsenbahnen sein dürfte. Die genauere theoretische Deutung und die Größenbestimmung der Verschiebung für die einzelnen Komponenten scheiterte bisher an der in der Einleitung betonten Schwierigkeit, den Quantenansatz auf nicht-periodische Bahnen auszudehnen. Die Berechnung der durch das elektrische Feld deformierten Bahnen führt auf elliptische Integrale und läßt sich übersichtlich durchführen: aber eine naturgemäße quantenhafte Heraushebung eines Systems ausgezeichneter Bahnen aus der Schar der mechanisch möglichen ist mir bisher nicht gelungen.

In der Einleitung wurde bereits darauf hingewiesen, daß unsere Auffassung von der Sonderstellung des Wasserstoffspektrums Rechenschaft gibt davon, daß es (vom Viellinienspektrum abgesehen) nur ein Wasserstoffspektrum gibt gegenüber den Haupt- und Nebenserien und den verschiedenen Serientypen der anderen Elemente. Das Balmersche Spektrum, im allgemeinsten Sinne einschließlich aller Kombinationsspektren genommen, haben wir nach unserer Auffassung so zu schreiben:

$$\nu = N\left(\frac{1}{(n+n')^2} - \frac{1}{(m+m')^2}\right).$$

Es ist klar, daß unsere Auffassung auch auf andere Elemente auszudehnen ist, d. h. man wird auch die in den Atomfeldern der anderen Elemente möglichen Bahnen nach dem Phasenintegral für die Umlaufs- und die Radialbewegung zu beurteilen und quantenhaft ausgezeichnete Bahnen hervorzuheben haben, deren Folge nach zwei ganzzahligen Quantenparametern n und n' fortschreiten wird. Wie schon Bohr betont, tritt bei allgemeineren Atomfeldern an die Stelle des Coulombschen Potentials $\frac{1}{r}$ eine allgemeine Kugelfunktion und an die Stelle von $\frac{1}{n^2}$ dementsprechend eine allgemeinere Funktion $\varphi(n)$. Von unserem Standpunkt müssen wir hinzufügen, daß an die Stelle von $\frac{1}{(n+n')^2}$ eine von der Atomkonstitution abhängige Funktion

zweier ganzer Zahlen $\varphi(n, n')$ treten wird, da die Verbindung $n + n'$ eine Besonderheit des Keplerschen Bahnsystems ist. Nur für große Werte von n (große Entfernungen vom Atom) wird sich das Bahnsystem Keplersch und die Serie wasserstoffähnlich verhalten; hier wird also $\varphi(n, n')$ mehr und mehr übergehen in $(n + n')^{-2}$. Die allgemeine Form des Seriengesetzes wird daher lauten:

$$\frac{\nu}{N} = \varphi(n, n') - \varphi(m, m') = f_{n'}(n) - f_{m'}(m). \tag{23}$$

Indem man dem Parameter n' resp. m' verschiedene Werte gibt, erhält man verschiedene Arten der funktionellen Abhängigkeit f und verschiedene Serien. Man kann z. B. schematisch die Existenz und die gegenseitigen Beziehungen von Haupt- und Nebenserien darstellen, indem man drei besondere Werte für n' resp. m' benutzt und im Anschluß an die gewohnten Bezeichnungen für die Hauptserie (p), die I. Nebenserie (d) und II. Nebenserie (s) die zugehörigen Funktionen $f_{n'}$ resp. $f_{m'}$ bezeichnet mit f_p, f_d, f_s.

Wählt man überdies die ganze Zahl n in solcher Weise, wie es durch die Erfahrungen im sichtbaren Gebiete gegeben ist, so erhält man das folgende wohlbekannte Schema der Serienzuordnung

$$\text{H. S.} \ldots \frac{\nu}{N} = f_s(n) - f_p(m), \quad n = 1, \quad m = 2, 3, 4, \ldots$$

$$\text{I. N. S.} \ldots \frac{\nu}{N} = f_p(n) - f_d(m), \quad n = 2, \quad m = 3, 4, 5, \ldots$$

$$\text{II. N. S.} \ldots \frac{\nu}{N} = f_p(n) - f_s(m), \quad n = 2, \quad m = 2, 3, 4, \ldots$$

Indem wir die Analogie mit den Keplerschen Bahnen des Wasserstoffs durchführen, werden wir vermuten, daß die Zahlen m oder n mittels des azimutalen Phasenintegrals die Größe der betreffenden Bahnen, die Zahlen m'_p, m'_d, m'_s oder n'_p, n'_d, n'_s mittels des radialen Phasenintegrals allgemein gesprochen die Abflachung der betreffenden Bahnen bestimmen. So wie beim Wasserstoff alle Bahnen mit gleichem n' Ellipsen von der

gleichen Exzentrizität waren, wird man allen Bahnen des Serienterms f_p, oder f_s, f_d Gleichheit eines gewissen gestaltlichen Merkmals zuschreiben, welches von Element zu Element je nach der Beschaffenheit des Atomfeldes wechseln wird. Es hat keinen Wert, diese allgemeinen Vermutungen weiter auszuspinnen. Zu ihrer Prüfung im einzelnen ist reichliches spektroskopisches Material vorhanden. Ich möchte hier nur bemerken, daß auch Herr Bohr in seiner letzten Arbeit (Phil. Mag., September 1915, § 3) zu der Anschauung gelangt, daß bei Atomen mit mehr als einem Elektron die verschiedenen Serien verschiedenen Formen der Bahnen entsprechen müssen. In unserer Darstellung ist diese Vorstellung durch das Beispiel des Wasserstoffs präzisiert.

Gegenüber dem Wasserstoff können die anderen Elemente noch eine weitere Komplikation aufweisen. Beim Wasserstoff sind die Bahnen nach der Natur des Keplerschen Problems notwendig eben. Es genügen daher zwei Koordinaten r und φ zu ihrer Beschreibung. Bei anderen Elementen von geringerer Symmetrie des Atomfeldes wird dies nicht mehr der Fall sein. Hier wird als dritte Koordinate z erforderlich. Wir müssen daher auch ein Phasenintegral für die z-Koordinate ins Auge fassen. Zu den Quantenzahlen n, n' tritt dann eine dritte ganze Zahl n''. Die allgemeine Form des Seriengesetzes geht dann über (vgl. (23)) in

$$(23\,\mathrm{a}) \qquad \overset{\nu}{N} = \varphi(n, n', n'') - q(m, m', m'') = f_{n,n'}(n) - f_{m',m''}(m).$$

Die Mannigfaltigkeit der Serienmöglichkeiten wächst dadurch natürlich stark an. Es ist durchaus möglich, daß man schon bei der Deutung der Haupt- und Nebenserien in den Raum gehen muß, daß also z. B. p in $f_p(m)$ als Funktion zweier ganzzahliger Parameter m', m'' aufzufassen ist. Überhaupt wird sich die Beschränkung auf die Ebene, im Bau der Atome und in der Gestalt der Elektronenbahnen, die bisher vom Wasserstoff aus ohne weiteres auf andere Elemente ausgedehnt wurde, auf die Dauer nicht halten lassen.

§ 7. Über die Unabhängigkeit des Quantenansatzes von der Wahl der Koordinaten. Beziehungen zur allgemeinen Mechanik.

Wir beginnen mit einem allgemeinen Zusammenhang zwischen der mittleren kinetischen Energie und unseren Phasenintegralen. Nach einer bekannten Formel aus der Mechanik beliebiger Systeme ist

$$T = \tfrac{1}{2} \Sigma p \dot{q},$$

also bei Integration nach der Zeit

$$2 \int T dt = \Sigma \int p dq. \tag{24}$$

Rechts steht die Summe unserer Phasenintegrale, genommen über alle Koordinaten des Systems; um sie bilden zu können, müssen wir ein bestimmtes Stück der Bahnkurve oder eine bestimmte Länge der Zeit ohne Willkür abgrenzen können. Dies ist möglich bei periodischen oder quasiperiodischen Bahnen (vgl. § 1). Sei τ die Periode und $\bar{T}$ die mittlere kinetische Energie während dieser Periode

$$\bar{T} = \frac{1}{\tau} \int_{t_0}^{t_0 + \tau} T dt,$$

so ergibt sich mit unserem Quantenansatz (I) allgemein

$$2 \bar{T} \tau = (n + n' + \cdots) h. \tag{25}$$

Hiernach hat zunächst die Quantensumme $n + n' + \cdots$ eine invariante, vom Koordinatensystem unabhängige, durch die wirkliche Bewegung bestimmte Bedeutung. Es fragt sich, ob auch die Aufteilung der Summe nach den einzelnen Koordinaten berechtigt ist. Im Falle der Keplerschen Bewegung ist diese Frage zu bejahen. Hier sind η und ε zyklische Koordinaten und als solche dynamisch ausgezeichnet. (Zyklisch heißt eine Koordinate, wenn sie weder in dem Ausdruck der kinetischen noch der potentiellen Energie explicite vorkommt, wenn also die kinetische Energie nur von dem zeitlichen Differentialquotienten der Koordinate abhängt.) Daraus, daß z. B.

die Koordinate φ eine wirkliche mechanische Bedeutung hat, folgt, daß eine solche auch ihrem Phasenintegral zukommt. Letzteres war $2\pi p$, also in der Tat invariant. Dasselbe gilt von der z-Koordinate, wo wegen der Ebenheit der Kepler-Bahnen das Phasenintegral Null wird. Hiernach und nach dem Satze (25) folgt dann für die übrig bleibende Koordinate r, daß auch ihr Phasenintegral eine von der besonderen Wahl der r-Koordinate unabhängige Bedeutung hat.

Wir bestätigen dies durch direkte Ausrechnung des Phasenintegrals. Sei s ein von r verschiedenes Maß für den Abstand des Elektrons vom Kern

$$s = f(r),$$

so wird

$$\dot{s} = f'(r)\,\dot{r}, \quad \left(\frac{\partial \dot{s}}{\partial \dot{r}}\right)_r = \frac{ds}{dr} = f'(r)$$

und

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{r}}\right)_r = \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{s}}\right)_s \cdot \left(\frac{d\dot{s}}{d\dot{r}}\right)_r = \frac{\partial T}{\partial \dot{s}} f'(r)$$

also

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{r}}\, dr = \frac{\partial T}{\partial \dot{s}}\, ds.$$

Mithin folgt

$$\int p_r\, dr = \int \frac{\partial T}{\partial \dot{r}}\, dr = \int \frac{\partial T}{\partial \dot{s}}\, ds = \int p_s\, ds,$$

wie behauptet.

Eine allgemeine Regel für die Auswahl der Koordinaten bei beliebigem Atomfeld wüßte ich nicht anzugeben. Daß die Koordinatenwahl nicht gleichgültig ist, zeigt sich bei der Keplerbewegung unter Benutzung rechtwinkliger Koordinaten $x\ y$. Diese sind nicht cyklisch, weil die potentielle Energie $(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}}$ von ihnen abhängt (in Hinsicht auf die kinetische Energie sind auch sie cyklisch). Hier wäre die Forderung

$$\int p_x\, dx = \int m\dot{x}\, dx = \int m\dot{x}^2\, dt = n_1 h$$
$$\int p_y\, dy = \int m\dot{y}\, dy = \int m\dot{y}^2\, dt = n_2 h$$

verschieden von unserer früheren Forderung

$$\int p_\varphi d\varphi = nh, \quad \int p_r dr = n'h$$

und sinnlos, weil von der besonderen Lage des Koordinatensystems der xy abhängig.

Wir wollen schließlich die allgemeine Gleichung (25) mit anderen Formulierungen der Quantentheorie vergleichen. Zunächst mit derjenigen der Planckschen Energieelemente.

Es sei die mittlere kinetische und potentielle Energie einander gleich. Die Gesamtenergie heiße wieder W; sie ist konstant. In diesem Falle gilt

$$T = V, \quad 2T = W, \quad W\tau = (n + n' + \cdots)h;$$

mit $\nu = \frac{1}{\tau}$ wird also $W =$ Vielfachem von $h\nu$.

Dies ist Plancks Hypothese der Energieelemente, welche sich also aus unserer Gl. (25) immer ergibt, wenn $T = V$ ist.

Es handle sich sodann um einen Massenpunkt, der sich unter dem Einfluß einer beliebigen Zentralkraft $\mathfrak{F}$ bewegt. Der vorige Fall ergibt sich im Besonderen, wenn die Zentralkraft direkt proportional der ersten Potenz der Entfernung ist

$$\mathfrak{F} = (\mathfrak{F}_x, \mathfrak{F}_y, \mathfrak{F}_z) = K\mathfrak{r}, \quad \mathfrak{r} = x, y, z$$

unter K den Proportionalitätsfaktor verstanden. Jetzt sei die Kraft allgemeiner von der $\varkappa^{\text{ten}}$ Potenz

$$\mathfrak{F} = K\mathfrak{r}^{\varkappa-1}\mathfrak{r}.$$

Die potentielle Energie ist dann

$$V = -K\int r^\varkappa dr = -\frac{K}{\varkappa+1} r^{\varkappa+1}.$$

Die mittlere kinetische Energie berechnet sich durch Virialbildung

$$T = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau T dt = \frac{m}{2\tau}\int_0^\tau \left(\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \cdots\right) dt = \frac{m}{2\tau}\left| x\frac{dx}{dt} + \cdots \right|_0^\tau$$

$$- \frac{m}{2\tau}\int_0^\tau \left(\frac{d^2x}{dt^2}x + \cdots\right) dt.$$

Das Glied ohne Integralzeichen möge verschwinden, was z. B. bei einer periodischen oder quasiperiodischen Bahn der Fall ist; in dem hinzutretenden zweiten Glied setzen wir die Bewegungsgleichungen ein. Dann ergibt sich

$$T = -\frac{K}{2\tau}\int_0^\tau r^{\varkappa-1}(x^2+y^2+z^2)\,dt = -\frac{K}{2\tau}\int_0^\tau r^{\varkappa+1}\,dt.$$

Hier erweist sich die rechte Seite bis auf den Faktor $\frac{\varkappa+1}{2}$ gleich der mittleren potentiellen Energie, also

$$\bar{T} = \frac{\varkappa+1}{2}\,V. \tag{26}$$

Daraus folgt insbesondere für $\varkappa = -2$ (Coulombsches Gesetz)

$$T = -\frac{V}{2}$$

eine Beziehung, von der in der Bohrschen Theorie öfter Gebrauch gemacht wird. Allgemein berechnet sich aus

$$\bar{T}+V = W \text{ und } \bar{T} = \frac{(\varkappa+1)V}{2}$$

$$T = \frac{\varkappa+1}{\varkappa+3}\,W \tag{27}$$

Gl. (25) liefert also mit $\nu = \frac{1}{\tau}$:

$$W = \frac{1}{2}\frac{\varkappa+3}{\varkappa+1}(n+n'+\cdots)\,h\nu.$$

Hier würden also sozusagen gebrochene Energiequanten, insbesondere im Coulombschen Falle $\varkappa = -2$, negative halbe Energiequanten auftreten. (Man beachte wegen des negativen Vorzeichens die Unterdrückung der Integrationskonstanten bei W und V.) Diese Bemerkungen bezwecken offenbar nur zu zeigen, daß der Begriff der Energiequanten im allgemeinen unzulänglich ist.

Gl. (25) erinnert, wenn wir darin $\overline{T}$ durch W gemäß (27) ausdrücken, an den Ansatz:

$$\text{Energie} \cdot \text{Zeit} = h,$$

den ich in diesen Berichten bei Untersuchungen über γ- und Röntgenstrahlen vorgeschlagen hatte.[1]) Die Auffassung der gegenwärtigen Quantenbeziehung ist aber von der früheren in mehreren Punkten verschieden. Sie beschränkt sich jetzt im wesentlichen auf periodische Bewegungen und sieht ein ganzzahliges Vielfaches von h vor, auch wird die Gleichheit durch eine von dem Kraftgesetz abhängige Proportionalität ersetzt.

[1]) Über die Struktur der γ-Strahlen, Jahrgang 1911, pag. 1.

Die Feinstruktur der Wasserstoff- und der Wasserstoff-ähnlichen Linien.

Von **A. Sommerfeld.**

Vorgetragen in der Sitzung am 8. Januar 1916.

Die vorliegende Mitteilung knüpft unmittelbar an die vorangehende Arbeit[1]) über das Balmersche Wasserstoffspektrum an und liefert die experimentellen Belege dafür, daß die dort entwickelten neuartigen Vorstellungen über quantenhaft ausgezeichnete Elektronenbahnen genau der Wirklichkeit entsprechen. Diese Belege werden gewonnen gerade aus den unscheinbarsten Ergebnissen der Spektroskopie, aus dem Auftreten feiner Dubletts und Tripletts, welche nur den Apparaten mit stärkstem Auflösungsvermögen zugänglich sind. Die Feinstruktur der Spektrallinien gibt durch Komponentenzahl und Komponentenabstand unmittelbare Kunde davon, daß die in den Fig. 3, 4, 5 der vorigen Mitteilung aufgezeichneten Bahnen von 2, 3, 4, ... Ellipsen resp. Kreisen reale Existenz haben, daß also die Dynamik der stationären Bewegungen im Atominnern von dem Quantenbegriff in der Formulierung unserer Phasenintegrale beherrscht wird. Damit eröffnet sich uns ein Einblick in die Einzelheiten der Vorgänge nicht nur beim Wasserstoff und bei Wasserstoff-ähnlichen Atomen, sondern bei entsprechendem Ausbau auch in die Atomfelder der anderen Elemente unter Verwertung des in den spektroskopischen Daten aufgehäuften riesigen Materials. Auch läßt sich nunmehr eine wirkliche

[1]) Diese Berichte, Dezember 1915, pag. 425; im folgenden als (I) zitiert.

Theorie des Zeeman-Effektes in nahe Aussicht stellen, dessen verschiedene Typen ja gerade von der Multiplizität der Serienterme herrühren, also von demjenigen Umstande, der durch unsere Theorie aufgeschlossen wird.

Besonders überraschend ist die Anwendung, welche unsere Auffassung im Gebiete der K- und L-Serie der Röntgenstrahlung findet. Hier treten durch das ganze natürliche System der Elemente hindurch von $Z = 34$ bis $Z = 80$ ($Z =$ Ordnungszahl des Elementes $=$ Stellenzahl im natürlichen System) Dubletts auf, die denselben Ursprung haben wie die Wasserstoffdubletts, und geradezu als ein um den Betrag $(Z-1)^4$ vergrößertes Abbild jener anzusehen sind. Der Größe dieses Faktors (37.10^6 bei Gold) ist es zu verdanken, daß namentlich in der L-Serie diese Dubletts nicht mehr unter die unscheinbaren Merkmale der Feinstruktur fallen, sondern als verschiedene, weit getrennte Linien beschrieben wurden und trotz der vorläufig naturgemäß noch primitiven Beobachtungsmittel in diesem Frequenzbereich mit völlig ausreichender Genauigkeit gemessen werden konnten.

Unsere Ergebnisse sind gesicherter und quantitativer Art, soweit es sich um die relative Größe gegenüber den Wasserstoffdubletts handelt. In Bezug auf die absolute Größe der fraglichen Dubletts und Tripletts sowie die Größe der Wasserstoffdubletts selbst besteht noch eine durchgehende Unstimmigkeit des Zahlenfaktors, an welcher vermutlich die Grundlagen der Quantentheorie oder der Relativitätstheorie schuld sind. Wegen der allgemeinen quantentheoretischen Überlegungen verweise ich auf die vorangehende Arbeit; im folgenden möchte ich mich auf eine kurze Darlegung der numerischen Beziehungen beschränken.

§ 1. Die Keplersche Ellipse in der Relativitätstheorie.

Auf die Bedeutung der Relativitätstheorie für den Ausbau seines Atommodelles hat bereits Bohr verschiedentlich hingewiesen. Auch schlägt er bereits vor, die Wasserstoffdubletts[1])

[1]) Phil. Mag., Febr. 1915.

aufzufassen als einen relativistischen Effekt von der Ordnung $(v/c)^2$. Indem wir diesen Vorschlag aufnehmen, ändern wir zugleich den Standpunkt prinzipiell ab: Nach den quantentheoretischen Gesichtspunkten der vorigen Arbeit kann es sich nicht, wie bei Bohr, um Ellipsen von kleiner oder verschwindender Exzentrizität handeln, sondern muß das Dublett seinen Grund haben in den endlich verschiedenen, diskreten Exzentrizitäten unserer „gequantelten" Ellipsen.

Als Vorbereitung leiten wir die relativistische Bahn des Elektrons um den Wasserstoffkern ab. Das Ergebnis ist nicht verschieden von dem z. B. in der Dissertation von Wacker[1]) behandelten Planetenproblem. Doch können wir die Rechnung nach der in (I, § 2) benutzten Methode sehr vereinfachen. Wegen späterer Verallgemeinerungen sei die Ladung des Wasserstoffkerns mit E bezeichnet, die des Elektrons ist $-e$. Der Kern wird als ruhend angenommen. Dann wirkt derselbe auch nach der Relativitätstheorie auf das Elektron genau mit der Coulombschen Kraft $-\frac{eE}{r^2}$ in der Verbindungslinie. Man überzeugt sich nämlich leicht, daß die relativistischen Zusatzglieder[2]) („Geschwindigkeits-" und „Beschleunigungsterm") bei ruhendem Kern verschwinden. Die Bahn ist eben und es gilt der Flächensatz in der Form

$$(1) \qquad m r^2 \dot{\varphi} = p, \; m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}, \; \beta = \frac{v}{c}.$$

Benutzt man neben den Polarkoordinaten r, φ rechtwinklige Koordinaten x, y mit dem Anfangspunkte im Kern

$$x = r\cos\varphi, \; y = r\sin\varphi,$$

so lauten die Bewegungsgleichungen

$$(2) \qquad \frac{d}{dt} m\dot{x} = -\frac{eE}{r^2}\cos\varphi, \; \frac{d}{dt} m\dot{y} = -\frac{eE}{r^2}\sin\varphi.$$

[1]) Über Gravitation und Elektromagnetismus. Tübingen 1909.

[2]) Vgl. z. B. A. Sommerfeld, Zur Relativitätstheorie II, Gl. (37), Ann. d. Phys. 33, 1910, pag. 681.

Mit Rücksicht auf den Flächensatz schreiben wir

$$m\dot{\varphi} = \frac{p}{r^2}, \quad \frac{d}{dt} = \frac{p}{mr^2}\frac{d}{d\varphi},$$

$$m\dot{x} = m\dot{\varphi}\frac{dx}{d\varphi} = \frac{p}{r^2}\frac{d(r\cos\varphi)}{d\varphi} = p\left(-\frac{1}{r}\sin\varphi + \frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\varphi}\cos\varphi\right)$$

$$= -p\left(\sigma\sin\varphi + \frac{d\sigma}{d\varphi}\cos\varphi\right)$$

$$m\dot{y} = +p\left(\sigma\cos\varphi - \frac{d\sigma}{d\varphi}\sin\varphi\right)$$

mit der früheren Abkürzung $\sigma = \frac{1}{r}$. Also

$$\frac{d}{dt}m\dot{x} = -\frac{p^2}{mr^2}\frac{d}{d\varphi}\left(\sigma\sin\varphi + \frac{d\sigma}{d\varphi}\cos\varphi\right)$$

$$= -\frac{p^2}{mr^2}\left(\sigma + \frac{d^2\sigma}{d\varphi^2}\right)\cos\varphi$$

$$\frac{d}{dt}m\dot{y} = -\frac{p^2}{mr^2}\left(\sigma + \frac{d^2\sigma}{d\varphi^2}\right)\sin\varphi.$$

Die Bewegungsgleichungen (2) gehen daher unter Forthebung des Faktors $\frac{\cos\varphi}{r^2}$ resp. $\frac{\sin\varphi}{r^2}$ über in die eine Gleichung

$$\frac{d^2\sigma}{d\varphi^2} + \sigma = \frac{eEm}{p^2} = \frac{eEm_0}{p^3}\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{3}$$

Die rechte Seite ist variabel wegen β. Um sie umzuformen, benutzen wir die Zeitkomponente der Bewegungsgleichungen, welche in bekannter Weise den Energiesatz liefert

$$m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right) - \frac{eE}{r} = W. \tag{4}$$

W ist die Konstante der Gesamtenergie. Also wird

$$\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = 1 + \frac{W}{m_0c^2} + \frac{eE}{m_0c^2}\sigma \tag{5}$$

und Gl. (3) geht über in

$$\frac{d^2\sigma}{d\varphi^2} + \sigma\left(1 - \left(\frac{eE}{pc}\right)^2\right) = \frac{eEm_0}{p^2}\left(1 + \frac{W}{m_0c^2}\right).$$

Die Integration gibt

$$\sigma = A\cos\gamma\varphi + B\sin\gamma\varphi + C$$

mit den Abkürzungen

$$\gamma^2 = 1 - \left(\frac{eE}{pc}\right)^2,\quad C = \frac{eEm_0}{\gamma^2 p^2}\left(1 + \frac{W}{m_0 c^2}\right). \tag{6}$$

Die Bahn ist also eine Ellipse, die sich langsam dreht. Das Perihel schreitet während eines Umlaufs um den Winkel

$$\frac{2\pi}{\gamma} - 2\pi$$

im Sinne des Umlaufs vor. Wir können eine solche Bahn nach (I, pag. 429 unten) als quasiperiodische Bahn bezeichnen. A und B sind die Integrationskonstanten. Nehmen wir $\varphi = 0$ als Anfangsperihel, so wird ebenso wie (I, pag. 434)

$$B = 0,\quad A = \varepsilon C,\quad \text{also}$$

$$\frac{1}{r} = \sigma = C(1 + \varepsilon\cos\gamma\varphi). \tag{7}$$

Bezüglich der Größe der Perihelbewegung möge darauf aufmerksam gemacht werden, daß sie für alle Ellipsen von gleichem p gleich ist, daß sie also nicht direkt abhängt von der Exzentrizität der Ellipse. Für den Grenzübergang von der Ellipse in den Kreis ergibt sich sonach eine gewisse Diskontinuität, da man beim Kreise geometrisch überhaupt nicht von einer Perihelbewegung sprechen kann.

§ 2. Die Energie der relativistischen Kepler-Ellipse.

Die auf das Perihel ($\varphi = 0$) bezüglichen Größen mögen durch den Index 0 ausgezeichnet werden. Es ist also

$$\sigma_0 = C(1+\varepsilon),\ v_0 = (r\dot{\varphi})_0,\ \beta_0 = \frac{(r\dot{\varphi})_0}{c}.$$

Der Flächensatz (1) gibt daher für $\varphi = 0$

$$\frac{\beta_0}{\sqrt{1-\beta_0^2}} = \frac{p\sigma_0}{m_0 c} = \frac{eE(1+\varepsilon)}{\gamma^2 pc}\left(1 + \frac{W}{m_0 c^2}\right) \tag{A}$$

und der Energiesatz (5)

$$\text{(B)}\qquad \frac{1}{\sqrt{1-\beta_0^2}} = 1 + \frac{W}{m_0 c^2} + \frac{eE}{m_0 c^2}\sigma_0 = \left(1 + \left(\frac{eE}{\gamma p c}\right)^2 (1+\varepsilon)\right)\left(1 + \frac{W}{m_0 c^2}\right).$$

Durch Elimination von β_0 aus (A) und (B) ergibt sich der gesuchte Wert von W. Diese scheinbar etwas künstliche Bestimmung von W ersetzt hier die direkte Ausrechnung in I, Gl. (7). Die Elimination erfolgt nach dem Schema

$$(B)^2 - (A)^2 = 1$$

und liefert

$$\left(1 + \frac{W}{m_0 c^2}\right)^2 \left\{\left(1 + (1+\varepsilon)\frac{b^2}{\gamma^2}\right)^2 - (1+\varepsilon)^2 \left(\frac{b}{\gamma^2}\right)^2\right\} = 1$$

mit der vorübergehenden Abkürzung

$$\text{(8)}\qquad b = \frac{eE}{pc}, \quad \text{so daß} \quad \gamma^2 = 1 - b^2.$$

Hiernach wird

$$1 + \frac{W}{m_0 c^2} = \left\{1 + 2(1+\varepsilon)\frac{b^2}{\gamma^2} + (1+\varepsilon)^2 \frac{b^2}{\gamma^2}\frac{b^2-1}{\gamma^2}\right\}^{-1/2}$$

$$= \left\{1 + (2(1+\varepsilon) - (1+\varepsilon)^2)\frac{b^2}{\gamma^2}\right\}^{-1/2} = \left\{1 + (1-\varepsilon^2)\frac{b^2}{\gamma^2}\right\}^{-1/2}$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\frac{b^2}{\gamma^2}(1-\varepsilon^2) + \frac{3}{8}\frac{b^4}{\gamma^4}(1-\varepsilon^2)^2 - \frac{5}{16}\frac{b^6}{\gamma^6}(1-\varepsilon^2)^3 + \cdots$$

Bezeichnen wir den früheren, ohne Berücksichtigung der Relativität gefundenen Wert (I, Gl. (7)) mit W_0

$$\text{(9)}\qquad W_0 = -\frac{m_0 e^2 E^2}{2p^2}(1-\varepsilon^2),$$

so haben wir nunmehr

$$\text{(10)}\qquad W = \frac{W_0}{\gamma^2}\left(1 - \frac{3}{4}\frac{b^2}{\gamma^2}(1-\varepsilon^2) + \frac{5}{8}\frac{b^4}{\gamma^4}(1-\varepsilon^2)^2 + \cdots\right).$$

Mit $c = \infty$ wird $b = 0$, $\gamma = 1$, also wie es sein muß, $W = W_0$. Man überzeugt sich übrigens leicht, daß b einen Mittelwert des bei der Ellipsenbewegung variabeln Geschwindigkeitsverhältnisses β bedeutet und daß bei der Kreisbewegung bis auf mit c verschwindende Größen b gleich β wird. Dementsprechend können wir auch sagen, daß die Größe $1 - \gamma^2$, die nach (8) mit b^2 übereinstimmt, von der Größenordnung β^2 wird.

§ 3. Der Quantenansatz für die quasiperiodische Bahn.

Indem wir die Quantenbedingung für unsere Phasenintegrale

$$\int p\,dq = \begin{cases} n\,h & \text{für } q = \varphi \\ n'h & \text{„ } q = r \end{cases} \tag{11}$$

aus (I, § 1) ungeändert übernehmen, haben wir zu beachten, daß bei unserer quasiperiodischen Ellipse die Integration nach φ nicht von 0 bis 2π wie bei der früheren periodischen Bahn, sondern von 0 bis $\frac{2\pi}{\gamma}$ zu erstrecken ist; in der Tat wiederholt sich nach diesem Winkelumlauf Ort und Geschwindigkeit des Elektrons. Hiernach lautet die erste der in (11) enthaltenen Gleichungen wegen $p = \text{konst.}$

$$p \int_0^{\frac{2\pi}{\gamma}} d\varphi = nh, \quad p = \frac{nh\gamma}{2\pi}. \tag{12}$$

Bei der zweiten dieser Gleichungen ist unter p zu verstehen

$$p_r = m\dot{r} = m\dot{\varphi}\frac{dr}{d\varphi} = \frac{p}{r^2}\frac{dr}{d\varphi} = -p\frac{d\sigma}{d\varphi}.$$

Hier ist m die variable Masse, also von β abhängig; indem wir aber den Flächensatz (1) benutzt haben, hat sich die Masse eliminiert und der Ausdruck für p_r vereinfacht. Unsere zweite Gleichung (11) kann daher so geschrieben werden

$$n'h = -p\int \frac{d\sigma}{d\varphi}\,dr = -p\int_0^{2\pi:\gamma} \frac{d\sigma}{d\varphi}\frac{dr}{d\varphi}\,d\varphi = +p\int_0^{2\pi:\gamma}\left(\frac{1}{\sigma}\frac{d\sigma}{d\varphi}\right)^2 d\varphi$$

$$= p\int_0^{2\pi:\gamma} \frac{\varepsilon^2\gamma^2\sin^2\gamma\varphi}{(1+\varepsilon\cos\gamma\varphi)^2}\,d\varphi = p\varepsilon^2\gamma\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2\psi}{(1+\varepsilon\cos\psi)^2}\,d\psi.$$

Indem wir hier $\psi = \gamma\varphi$ als Integrationsvariable eingeführt haben, haben wir zugleich die Ausführung der Integration auf (I, Gl. (10)) zurückgeführt. Setzen wir den dortigen Wert für unser Integral und zugleich den Wert (12) für p ein, so ergibt sich

$$n'h = nh\gamma^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} - 1\right)$$

$$1-\varepsilon^2 = \frac{n^2\gamma^4}{(n'+n\gamma^2)^2}. \tag{13}$$

Wir bilden sogleich diejenige Kombination, von welcher der Energieausdruck (10) wesentlich abhängt, nämlich (vgl. auch (8)):

$$\frac{1-\varepsilon^2}{p^2\gamma^2} = \frac{4\pi^2}{h^2}\,\frac{1}{(n'+n\gamma^2)^2}. \tag{14}$$

Es ist also nicht mehr die reine Quantensumme $n'+n$, die den Energieausdruck bestimmt, sondern es kommt wegen des (von 1 wenig verschiedenen) Faktors γ^2 auch auf die Einzelwerte von n' und n an; freilich nur insoweit, als wir Korrektionsglieder von der Ordnung $1-\gamma^2$, d. i. nach der Bemerkung am Schluß des vorigen Paragraphen von der Ordnung β^2 berücksichtigen. Das Ergebnis ist folgendes:

Während nach der gewöhnlichen Mechanik die Energie der $n+n'$ verschiedenen Kreis- und Ellipsenbahnen, die zu dem gleichen Werte von $n+n'$ gehören, genau übereinstimmen, fällt sie mit Rücksicht auf die veränderliche Elektronenmasse für diese $n+n'$ verschiedenen Bahnen jeweils ein wenig anders aus. Die zugehörige Spektrallinie, oder richtiger gesagt, der zugehörige Term der Spektrallinie geht entsprechend den $n+n'$ Erzeugungsmöglichkeiten in ein System von $n+n'$

benachbarten Linien oder Termen auseinander, also bei $n + n' = 2$ in ein Dublett, bei $n + n' = 3$ in ein Triplett etc. Hierzu einige kritische Bemerkungen:

1. Die Quantenansätze (12) und (13) sind gegen früher durch Hinzutreten von Potenzen des Faktors γ abgeändert, welcher seinen Ursprung hat in der Perihelbewegung der Elektronenbahn. Diese Perihelbewegung ist naturgemäß eine recht empfindliche Größe und würde sich bei kleinen Abänderungen des Kraftgesetzes vielleicht merklich ändern. Ob durch die allgemeine Relativitätstheorie das Kraftgesetz oder die Bewegungsgleichungen abgeändert werden oder ob nach derselben Theorie die Gravitation des Kerns mit zu berücksichtigen ist, habe ich bisher nicht geprüft. Ich möchte aber auf die Möglichkeit wenigstens hinweisen, daß die in der Einleitung bemerkte Unstimmigkeit in den absoluten Größen einen derartigen Ursprung haben könne.

2. Außer von der Veränderlichkeit der Masse wird die Perihelbewegung von der magnetischen Wirkung des Kerns beeinflußt, welche direkt ein Drehmoment in der Bahnebene liefert und daher die Gleichung des Flächensatzes abändert. Während die magnetische Energie des Elektrons, wie wir sagen können, in der Veränderlichkeit der Masse steckt und daher von uns berücksichtigt worden ist, haben wir die magnetischen Kräfte des Kerns ausgeschaltet, indem wir diesen als ruhend annahmen. Ich habe mich aber überzeugt, daß der Einfluß dieser Kräfte von geringerer Ordnung ist als derjenige der veränderlichen Masse. Er liefert für die Perihelbewegung als Wert von $1 - \gamma^2$ den Beitrag $-\frac{4 b^2 m}{M}$, während die Veränderlichkeit der Elektronenmasse den Beitrag b^2 lieferte (M = Kernmasse). Jener Einfluß ist also 500 mal so klein und übrigens von umgekehrtem Vorzeichen wie dieser. Daraus geht hervor, daß das relativistische Korrektionsglied erster Ordnung durch den magnetischen Einfluß des Kerns nicht merklich abgeändert wird; wohl aber würde das Korrektionsglied zweiter Ordnung dadurch beeinflußt werden. Da uns das letztere nur

in qualitativer, nicht in quantitativer Hinsicht interessiert, habe ich die Behandlung der Kernbewegung hier unterdrückt.

3. Wenn wir von der Bedeutung der Relativitätstheorie für die Probleme der Spektrallinien sprachen, so ist damit eigentlich nur die Veränderlichkeit der Elektronenmasse gemeint. Die ältere Theorie des starren Elektrons würde daher für unsere Fragen ebenfalls ausreichen und merklich zu denselben Konsequenzen führen wie die Relativität, nur natürlich auf rechnerisch viel komplizierterem und weniger übersichtlichem Wege. Durch Annahme des ruhenden Kerns ist ja von vornherein für die Beschreibung der Elektronenbewegung ein raumzeitliches Ruhsystem vorgezeichnet (bei beweglichem Kern durch den Schwerpunkt von Elektron und Kern). In diesem Ruhsystem hat z. B. die Entfernung r und der Impuls $p_r = m\dot{r}$ seine legitime Bedeutung, so daß die feineren Fragen der Relativität hier nicht auftreten. Ich möchte aber darauf hinweisen, daß manche Formulierungen der vorangehenden Arbeit (I) relativistisch nicht in Strenge haltbar sind, so z. B. die Beziehung $p = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}}$, welche in $\dot{q} = \frac{\partial T}{\partial p}$ oder in $p = \frac{\partial H}{\partial \dot{q}}$ abzuändern wäre, sowie der im letzten Paragraphen von (I) behandelte Zusammenhang zwischen kinetischer Energie und Phasenintegralen. Vielleicht kann der Hinweis hierauf dazu führen, den Quantenansatz in relativistischer Beziehung zu verbessern und die mehrfach genannte Unsicherheit in den Absolutwerten zu beheben.

§ 4. Zusammenfassung der bisherigen Resultate.

Indem wir aus Gl. (14) in Gl. (9) und (8) eintragen, bekommen wir

$$(15)\quad \begin{cases} \dfrac{W_0}{\gamma^2} = -\dfrac{2\pi^2 m_0 e^2 E^2}{h^2}\dfrac{1}{(n'+n\gamma^2)^2} = -\dfrac{Nh}{(n'+n\gamma^2)^2}\left(\dfrac{E}{e}\right)^2, \\ \dfrac{b^2(1-\varepsilon^2)}{\gamma^2} = 4\left(\dfrac{\pi e E}{hc}\right)^2\dfrac{1}{(n'+n\gamma^2)^2} = \dfrac{4a}{(n'+n\gamma^2)^2}\left(\dfrac{E}{e}\right)^2 = \dfrac{4\delta}{(n'+n\gamma^2)^2}. \end{cases}$$

Hier hat N wie früher die Bedeutung der Rydbergschen Zahl

$$N = \frac{2\pi^2 m_0 e^4}{h^3};$$

α und δ sind neue Abkürzungen:

$$(16) \qquad \alpha = \left(\frac{\pi e^2}{hc}\right)^2 = 13{,}0 \cdot 10^{-6}, \quad \delta = \left(\frac{E}{e}\right)^2 \alpha.$$

Im Falle des Wasserstoffs ist natürlich $E = e$ und $\delta = \alpha$; im allgemeinen wird dagegen $\frac{E}{e}$ eine ganze Zahl größer als 1, also δ ein Vielfaches von α.

Einsetzen von (15) in (10) liefert zunächst

$$(17) \quad W = -\frac{Nh}{(n' + n\gamma^2)^2}\left(\frac{E}{e}\right)^2\left(1 - \frac{3\delta}{(n' + n\gamma^2)^2} + \frac{10\delta^2}{(n' + n\gamma^2)^4} + \cdots\right).$$

Hier ist noch die Entwicklung für $n' + n\gamma^2$ einzutragen. Nach (8) hat man

$$n' + n\gamma^2 = n' + n - (1 - \gamma^2)n = n' + n - b^2 n$$

$$= (n' + n)\left(1 - b^2 \frac{n}{n' + n}\right).$$

Nach (8), (12) und (16) ist aber bis auf Glieder von kleinerer Ordnung als δ^2:

$$b^2 = \frac{4\delta}{n^2\gamma^2} = \frac{4\delta}{n^2(1 - b^2)} = \frac{4\delta}{n^2}\left(1 + \frac{4\delta}{n^2}\right),$$

also mit derselben Genauigkeit

$$n' + n\gamma^2 = (n' + n)\left(1 - \frac{4\delta}{n(n + n')}\left(1 + \frac{4\delta}{n^2}\right)\right)$$

$$(n' + n\gamma^2)^{-2} = (n' + n)^{-2}\left(1 + \frac{8\delta}{n(n + n')} + \frac{32\delta^2}{n^3(n + n')} + \frac{48\delta^2}{n^2(n + n')^2}\right)$$

$$\delta(n' + n\gamma^2)^{-4} = (n' + n)^{-4}\left(\delta + \frac{16\delta^2}{n(n + n')}\right)$$

$$\delta^2(n' + n\gamma^2)^{-6} = (n' + n)^{-6}\delta^2.$$

Aus (17) folgt daraufhin

$$W = -\frac{Nh}{(n'+n)^2}\left(\frac{E}{e}\right)^2\left(1+\frac{8\delta}{n(n+n')}-\frac{3\delta}{(n+n')^2}+\frac{32\delta^2}{n^3(n+n')}+\frac{48\delta^2}{n^2(n+n')^2}-\frac{48\delta^2}{n(n+n')^3}+\frac{10\delta^2}{(n+n')^4}\right).$$

Das mit δ behaftete erste Korrektionsglied zieht sich zusammen zu

$$\frac{\delta}{(n+n')^2}\left(8\frac{n+n'}{n}-3\right)=\frac{\delta}{(n+n')^2}\left(5+8\frac{n'}{n}\right),$$

das mit δ^2 behaftete zweite Korrektionsglied wird:

$$\frac{\delta^2}{(n+n')^4}\left(32\left(\frac{n+n'}{n}\right)^3+48\left(\frac{n+n'}{n}\right)^2-48\frac{n+n'}{n}+10\right)=\frac{\delta^2}{(n+n')^4}\left(42+144\frac{n'}{n}+144\left(\frac{n'}{n}\right)^2+32\left(\frac{n'}{n}\right)^3\right).$$

Der Ausdruck für W kann daher so geschrieben werden:

$$W=-\frac{Nh}{(n+n')^2}\left(\frac{E}{e}\right)^2\left\{1+\frac{a}{(n+n')^2}\left(\frac{E}{e}\right)^2\left(A+B\frac{n'}{n}\right)+\frac{a^2}{(n+n')^4}\left(\frac{E}{e}\right)^4 C\right\}. \tag{18}$$

Hier ist a durch Gl. (16) gegeben; für die (absichtlich unbestimmt geschriebenen) Koeffizienten A, B, C hat unsere Rechnung ergeben:

$$A=5,\quad B=8,$$
$$C=C_{n,n'}=42+144\frac{n'}{n}+144\left(\frac{n'}{n}\right)^2+32\left(\frac{n'}{n}\right)^3. \tag{19}$$

Der Wert von C kann, wie am Schluß des vorigen Paragraphen unter 2. bemerkt wurde, durch die hier nicht berücksichtigte Kernbewegung und ihre magnetische Wirkung beeinflußt werden. Worauf es uns bei diesem Korrektionsglied zweiter Ordnung allein ankommt, ist dieses, daß ein solches Korrektionsglied überhaupt auftritt und zwar mit positivem Werte von C. Seine Existenz wird sich in Fig. 3 bemerklich machen.

Bezüglich des Wertes von A besteht eine eigenartige Schwierigkeit. A mißt die relativistische Korrektion erster Ordnung im Falle $n' = 0$, d. i. $\varepsilon = 0$, also im Falle der einfachen Kreisbahn. Für die Kreisbahn läßt sich aber die Energie bei veränderlicher Elektronenmasse leicht direkt angeben, wie bereits Bohr getan. Man hat zunächst

$$W = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right) - \frac{eE}{a};$$

$r = a$ ist der Kreisradius, β ist gleich $\frac{a\omega}{c}$, wenn ω die konstante Winkelgeschwindigkeit bedeutet. Da der Kreis eine rein periodische, keine quasi-periodische Bahn ist, scheint es angebracht, den gewöhnlichen Quantenansatz $2\pi p = nh$ beizubehalten, welcher zusammen mit dem Gesetz der Zentrifugalkraft liefert

$$\frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}} a^2 \omega = \frac{nh}{2\pi}, \quad \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}} a^3 \omega^2 = eE$$

$$a\omega = \frac{2\pi eE}{nh}, \quad \beta^2 = \frac{4a}{n^2}\left(\frac{E}{e}\right)^2,$$

$$a = \frac{n^2 h^2}{4\pi^2 m_0 eE}\sqrt{1-\beta^2} = \frac{n^2 h^2}{4\pi^2 m_0 eE}\left(1 - \frac{2a}{n^2}\left(\frac{E}{e}\right)^2\right)$$

$$c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right) = \frac{(a\omega)^2}{2}\left(1 + \frac{3}{4}\beta^2\right) = \frac{2\pi^2 e^2 E^2}{n^2 h^2}\left(1 + \frac{3a}{n^2}\left(\frac{E}{e}\right)^2\right).$$

Für W ergibt sich hiernach in erster Näherung:

$$W = \frac{2\pi^2 m_0 e^2 E^2}{n^2 h^2}\left(1 + \frac{3a}{n^2}\left(\frac{E}{e}\right)^2 - 2 - \frac{4a}{n^2}\left(\frac{E}{e}\right)^2\right)$$

$$= -\frac{2\pi^2 m_0 e^2 E^2}{n^2 h^2}\left(1 + \frac{a}{n^2}\left(\frac{E}{e}\right)^2\right) = -\frac{Nh}{n^2}\left(\frac{E}{e}\right)^2\left(1 + \frac{a}{n^2}\left(\frac{E}{e}\right)^2\right).$$

Dagegen folgt aus (18) mit $n' = 0$ bei Vernachlässigung der zweiten Näherung:

$$W = -\frac{Nh}{n^2}\left(\frac{E}{e}\right)^2\left(1 + \frac{Aa}{n^2}\left(\frac{E}{e}\right)^2\right).$$

Die direkte Ausrechnung liefert also $A = 1$, während wir früher $A = 5$ fanden. Der Unterschied liegt, wie man sich leicht überzeugt, an dem verschiedenen Quantenansatz für die periodische und quasiperiodische Bahn. Wenn wir W aus (18) für $n' = 0$ berechnen, bilden wir sozusagen den Limes der Energie für eine Ellipse von verschwindender Exzentrizität, unter Beibehaltung der für alle Exzentrizitäten gleichen Perihelbewegung. Dagegen bestimmt die direkte Ausrechnung die Energie, die zu der Exzentrizität Null gehört, ohne Rücksicht auf die Perihelbewegung. Diese Diskontinuität des Grenzübergangs, auf welche schon am Schlusse von § 1 hingewiesen wurde, liegt offenbar nur in unserer Auffassung des Vorgangs, nicht in dem Vorgange selbst, und dürfte daher physikalisch keinen Einfluß haben. Der Wert $A = 5$, zu dem unsere allgemeine Rechnung führte, kann daher verdächtig erscheinen, ebenso aber auch der Wert $A = 1$. Es ist dieses ein weiterer Grund, weshalb wir es in Gl. (18) vorzogen, die Formel mit unbestimmten Koeffizienten A, B, C zu schreiben. Die Schlüsse, auf die es uns ankommt, sind zum Glück von dem Zahlenwerte von A und im wesentlichen auch von demjenigen von B und C unabhängig.

§ 5. Allgemeine Folgerungen.

Es liegt im Sinne des Ritzschen Kombinationsprinzips, welches seinen adäquaten Ausdruck in der Bohrschen Theorie findet, wenn wir die folgenden allgemeinen Aussagen nicht für die Wellenlänge oder Schwingungszahl der Serienlinien, sondern für den einzelnen Serienterm formulieren. Die Beobachtungen an der Serienlinie ergeben sich aus zwei Serientermen, einem positiven und einem negativen. Der positive Serienterm entspricht der dem Vorzeichen nach umgekehrten, also positiv genommenen Energie der Endbahn, der negative derjenigen der Ausgangsbahn.

a) Ein Serienterm mit $n + n' = 2$ erscheint als Dublett, entsprechend den beiden möglichen Zerlegungen von 2:

$$2 = 2 + 0 \text{ und } 2 = 1 + 1.$$

(Die dritte Möglichkeit $2 = 0 + 2$ wurde in (I, § 5) aus geometrischen Gründen abgewiesen.) Die beiden zugehörigen Energiewerte bezeichnen wir mit $W_{2,0}$ und $W_{1,1}$. Nach (18) ergibt sich, wenn wir hier und im folgenden die zweite Korrektion als unwesentlich nicht berücksichtigen:

$$W_{1,1} - W_{2,0} = - \frac{N h a B}{2^4} \left(\frac{E}{e}\right)^4.$$

Ist der fragliche Serienterm ein positiver, so wird die zugehörige Schwingungsdifferenz, die durch die Verschiedenheit der beiden Energiewerte veranlaßt wird:

$$\Delta \nu = - \frac{W_{1,1} - W_{2,0}}{h} = \frac{N a B}{2^4} \left(\frac{E}{e}\right)^4. \tag{20}$$

Diese Schwingungsdifferenz ist positiv, d. h. die Linie $n = 1$, $n' = 1$ hat die größere Schwingungszahl wie die Linie $n = 2$, $n' = 0$. Erstere Linie entspricht der einzigen hier möglichen Ellipse, letztere dem Kreise. Wir werden annehmen, daß immer die Kreisbahn die wahrscheinlichste und daß jeweils die Ellipsenbahn um so unwahrscheinlicher ist, je größer ihre Exzentrizität wird. Im Besonderen stimmt damit überein, daß wir die Ellipse mit der Exzentrizität 1, welche $n' = 0$ entsprechen würde, grundsätzlich ausgeschlossen, also mit der Intensität Null veranschlagt haben. Unsere Annahme über die Intensitäten ist eine naheliegende Zusatzhypothese und wird durch die Tatsachen durchweg bestätigt; mit unserer Theorie, die nur von der Lage der Linien spricht, steht sie naturgemäß in keinem notwendigen Zusammenhange. Auf Grund dieser Zusatzhypothese stellen wir fest: Entsteht das Dublett aus einem positiven Terme, so liegt die stärkere Linie, welche der Kreisbahn entspricht, nach Rot hin. Dies ist, allgemein gesprochen, der Fall der Nebenserien. Verdankt dagegen das Dublett seine Entstehung einem negativen Terme, so liegt die stärkere Linie, die die Kreisbahn darstellt, auf der violetten Seite. Dies ist der Fall der Hauptserie (D_2 ist stärker und violetter als D_1).

b) Ein Serienterm mit $n + n' = 3$ gibt Anlaß zu einem Triplett entsprechend den drei möglichen Zerlegungen der Zahl 3:

$$3 = 3 + 0,\ 3 = 2 + 1,\ 3 = 1 + 2.$$

Die zugehörigen Energiewerte werden mit $W_{3,0}$, $W_{2,1}$, $W_{1,2}$ bezeichnet, wobei sich hier wie im folgenden der erste Index auf n, der zweite auf n' bezieht. Die Energiedifferenzen werden

$$W_{2,1} - W_{3,0} = -\frac{NhaB}{3^4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{E}{e}\right)^4,$$

$$W_{1,2} - W_{2,1} = -\frac{NhaB}{3^4}\left(\frac{2}{1} - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{E}{e}\right)^4$$

$$= -\frac{NhaB}{3^4} \cdot \frac{3}{2}\left(\frac{E}{e}\right)^4.$$

Die aufeinander folgenden Komponenten haben die Schwingungsdifferenzen

$$(21)\qquad \begin{cases} \Delta\nu_1 = -\dfrac{W_{2,1} - W_{3,0}}{h} = \dfrac{1}{2}\dfrac{NaB}{3^4}\left(\dfrac{E}{e}\right)^4, \\ \Delta\nu_2 = -\dfrac{W_{1,2} - W_{2,1}}{h} = \dfrac{3}{2}\dfrac{NaB}{3^4}\left(\dfrac{E}{e}\right)^4. \end{cases}$$

Ihr Verhältnis ist also

$$\Delta\nu_1 : \Delta\nu_2 = 1 : 3.$$

Die in (21) gewählten Vorzeichen sind für einen positiven Term gemeint. Hier liegt die stärkste Linie, die Kreisbahn, auf der roten Seite und es stufen sich die Intensitäten des Tripletts nach Violett hin ab. Bei einem negativen Term sind die Aussagen umzukehren.

c) Ein Serienterm mit $n + n' = 4$ ruft ein Quartett hervor, entsprechend den vier Zerlegungsmöglichkeiten

$$4 = 4 + 0,\ 4 = 3 + 1,$$
$$4 = 2 + 2,\ 4 = 1 + 3.$$

Die Energiedifferenzen sind

$$W_{3,1} - W_{4,0} = -\frac{Nh\alpha B}{4^4}\,\frac{1}{3}\left(\frac{E}{e}\right)^4$$

$$W_{2,2} - W_{3,1} = -\frac{Nh\alpha B}{4^4}\left(\frac{2}{2} - \frac{1}{3}\right)\left(\frac{E}{e}\right)^4 = -\frac{Nh\alpha B}{4^4}\,\frac{2}{3}\left(\frac{E}{e}\right)^4$$

$$W_{1,3} - W_{2,2} = -\frac{Nh\alpha B}{4^4}\left(\frac{3}{1} - \frac{2}{2}\right)\left(\frac{E}{e}\right)^4 = -\frac{Nh\alpha B}{4^4}\,2\left(\frac{E}{e}\right)^4.$$

Die Schwingungsdifferenzen der aufeinander folgenden Komponenten sind

$$(22)\qquad \begin{cases} \Delta\nu_1 = -\dfrac{W_{3,1} - W_{4,0}}{h} = \dfrac{1}{3}\,\dfrac{N\alpha B}{4^4}\left(\dfrac{E}{e}\right)^4, \\ \Delta\nu_2 = -\dfrac{W_{2,2} - W_{3,1}}{h} = \dfrac{2}{3}\,\dfrac{N\alpha B}{4^4}\left(\dfrac{E}{e}\right)^4, \\ \Delta\nu_3 = -\dfrac{W_{1,3} - W_{2,2}}{h} = 2\,\dfrac{N\alpha B}{4^4}\left(\dfrac{E}{e}\right)^4. \end{cases}$$

Ihr Verhältnis wird also

$$\Delta\nu_1 : \Delta\nu_2 : \Delta\nu_3 = 1 : 2 : 6.$$

Bezüglich Vorzeichen und Stärkeverhältnis gilt dasselbe wie unter b).

d) Ein Serienterm vom Charakter $\frac{1}{5^2}$ gibt Anlaß zu einem Quintett mit Schwingungsdifferenzen der aufeinander folgenden Komponenten vom Verhältnis:

$$\frac{1}{4}:\frac{2}{3} - \frac{1}{4}:\frac{3}{2} - \frac{2}{3}:\frac{4}{1} - \frac{3}{2} = \frac{1}{4}:\frac{5}{12}:\frac{5}{6}:\frac{5}{2} = 3:5:10:30 \text{ usf.}$$

e) Ein Serienterm vom Charakter $\frac{1}{1^2}$ ist in Strenge einfach. Er entspricht einer und nur einer Kreisbahn. Unter den Wasserstoff-ähnlichen Termen ist er der einzig einfache Term.

f) Liegt die Multiplizität im konstanten, also positiven Term, so wiederholt sie sich ungeändert durch die ganze Serie. Wir haben Dubletts, Tripletts etc. von konstanter Schwingungs-

differenz, wie sie allgemein von den Nebenserien her bekannt sind. Aus a) geht hervor, daß die hierbei beobachtete Intensitätsabstufung (von Rot nach Violett) von unserer Theorie richtig wiedergegeben wird. Aus h) wird sich ergeben, daß die im konstanten Term begründete Multiplizität im allgemeinen überlagert wird von einer im variabeln Term gelegenen Multiplizität.

g) Liegt die Multiplizität im negativen, also variabeln Term und ist der konstante Term einfach ($n = 1$, Kreisbahn), so kommt in der zu beobachtenden Linie die Multiplizität des variabeln Termes rein zum Ausdruck. Entsprechend den Nummern $m + m' = 2, 3, 4, \ldots$ des variabeln Termes wird die erste Linie der Serie ein Dublett, die zweite ein Triplett, die dritte ein Quartett etc. Die Intensitäten stufen sich bei allen diesen Linien nach Rot ab, indem die Kreisbahn wegen des negativen Vorzeichens des Termes die violetteste Linie des Gebildes wird. Die in Schwingungszahlen gemessene Ausdehnung des Gebildes nimmt mit wachsender Numerierung ab, wegen des Faktors $(m + m')^4$ im Nenner des Energieausdrucks (18). In diesen beiden Punkten (Verhalten der Intensität und der Größe des Gebildes) besteht eine Analogie zu den Hauptserien der Elemente, allerdings keine vollständige Analogie, da diejenigen Elemente, bei denen die gewöhnlichen Hauptserien beobachtet werden, zu wenig Wasserstoffähnlich sind. Bei Wasserstoff selbst ist die hier beschriebene „Hauptserie“ ultraviolett, vgl. § 6, 2.

h) Ist sowohl der konstante positive wie der variable negative Term mehrfach, so muß zunächst (schon aus energetischen Gründen) die Multiplizität des negativen Termes die größere sein. Liefert z. B. der konstante Term ein Dublett, so entspricht dem variabeln Terme, für sich genommen, in der ersten Serienlinie ein Triplett, in der zweiten ein Quartett etc. Die Überlagerung beider Multiplizitäten könnte man sich nun in der Weise vorgenommen denken, daß die beiden Linien des Dubletts in der ersten Seriennummer je aus 3, in der zweiten aus 4 etc. Komponenten bestehen, die ihrerseits die unter

b), c) etc. bestimmten Abstandsverhältnisse haben. Die Linie $(n + n', m + m')$ würde dann ein Gebilde von im ganzen $(n + n')(m + m')$ Komponenten sein. Diese Auffassung ist indessen wohl nicht haltbar: vielmehr erschien uns ein anderer Standpunkt wahrscheinlicher, demzufolge die Zahlen m, m' einzeln genommen nicht kleiner sein dürfen als die Zahlen n, n' (vgl. I, § 5). Infolgedessen werden wir in dem als Beispiel herangezogenen Falle $n + n' = 2$, $m + m' = 3, 4, 5, \ldots$ vielmehr die folgende Feinstruktur der aufeinander folgenden Serienlinien erwarten:

Erste Linie . . . $(n, n') = (2,0)$, $(m, m') = (3,0)$, $(2,1)$
$= (1,1)$, $= (2,1)$, $(1,2)$.

Die Hauptlinie des Dubletts $(2,0)$, $(3,0)$, die der Kombination von zwei Kreisbahnen entspricht, ist nach der roten Seite von einem Satelliten $(2,0)$, $(2,1)$ begleitet; ebenso hat die schwächere Linie des Dubletts $(1,1)$, $(2,1)$, die der Kombination von zwei Ellipsen entspricht, den Satelliten $(1,1,)$, $(1,2)$.

Zweite Linie . . . $(n, n') = (2,0)$, $(m, m') = (4,0)$, $(3,1)$, $(2,2)$
$= (1,1)$, $= (3,1)$, $(2,2)$, $(1,3)$.

Hier sind also die Linien des Dubletts von je 2 Satelliten begleitet, in der nächsten Seriennummer von je 3 etc., und zwar stets nach Violett hin gelegen und in dieser Richtung der Intensität nach abnehmend. Als Beispiel vgl. Fig. 1 betr. H_α und H_β. Die Ausdehnung des Satellitengebildes zieht sich dabei nach dem unter g) Gesagten mit wachsender Nummer der Serienlinie schnell zusammen, so daß die Multiplizität des variabeln Termes sich überhaupt nur in den niedrigsten Nummern bemerkbar machen und in den höheren allein die Multiplizität des konstanten Termes persistieren wird.

i) Bei Wasserstoff-ähnlichen Termen anderer Elemente erwarten wir eine ähnliche Feinstruktur und zwar um so genauer, je Wasserstoff-ähnlicher der betreffende Term ist, d. h. je genauer er die Form $\frac{N}{n^2}$ hat.

k) Über die Wasserstoff-unähnlichen Terme, welche nicht die Form $\frac{N}{n^2}$ haben, können wir naturgemäß im wesentlichen nur negative Aussagen machen. Die beim Wasserstoff zusammenfallenden und nur relativistisch getrennten Terme (n, n'), (m, m') werden hier auseinander fallen. Die dabei auftretenden Multiplizitäten, die man teils als Multiplizitäten, teils als verschiedene Serientypen deutet (vgl. I, § 6), haben ihren Ursprung in der Beschaffenheit des Atomfeldes und seiner Abweichung vom Felde des Coulombschen Gesetzes. Die Multiplizitäten werden daher hier von ganz anderer Größenordnung. Trotzdem ist ihre Struktur der der Wasserstoff-ähnlichen Linien verwandt; man vergleiche die vollständigen Dubletts und Tripletts von Rydberg mit dem hier unter h) Gesagten. Die Aufgabe kann hier nicht sein, die Lage und Struktur der Linien vorherzubestimmen, sondern muß darin bestehen, aus den spektroskopischen Erfahrungen die Natur des Atomfeldes, also den Aufbau des Atoms zu ermitteln. Natürlich wird auch hierbei unsere Theorie der Phasenintegrale entscheidend mitzuwirken haben; es wird allerdings nötig sein, sie vorher für die Anwendung auf nichtperiodische Bahnen zu erweitern.

l) Während bei den gewöhnlichen Flammen- und Bogenspektren $\frac{E}{e} = 1$ ist, hat man in den Funkenspektren $\frac{E}{e} = 2$. Handelt es sich um Wasserstoff-gleiche oder Wasserstoff-ähnliche Funkenspektren (Helium), so finden auf sie die vorangehenden Schlüsse volle Anwendung, mit der Maßgabe, daß die Komponentenabstände der Feinstruktur gegenüber den gewöhnlichen Spektren bei sonst gleichen Bedingungen vergrößert erscheinen, wegen des Faktors $\left(\frac{E}{e}\right)^4 = 16$. Bei Funkenspektren liegen also die Bedingungen für die Prüfung der Theorie günstiger wie bei den gewöhnlichen Spektren; man kann hier erwarten, bei höheren Seriennummern entsprechend kompliziertere Strukturen nachzuweisen, wie unter den gewöhnlichen Bedingungen.

m) Die Funkenspektren entstehen in einfach geladenen Atomen. Bohr hat bereits den Fall von Funkenspektren höherer Ordnung (mehrfach geladener Atome) ins Auge gefaßt. Der äußerste Grenzfall dieser Spektren liegt bekanntlich in der K-Serie der charakteristischen Röntgen-Frequenzen vor, wobei die Möglichkeit der Aufladung zunimmt mit der Ordnungszahl der Elemente im natürlichen System. Bei den Röntgen-Frequenzen, insbesondere denjenigen der Schwermetalle, werden also Multiplizitäten von makroskopischer Größe auftreten. Hier wird die Prüfung unserer Theorie am sichersten erfolgen können.

§ 6. Wasserstoff und positiv geladenes Helium.

1. Balmersche Serie.

Der konstante Term $\frac{1}{2^2}$ der Balmerschen Serie gibt Anlaß zu einem Dublett von konstanter Schwingungsdifferenz. Die Größe $\Delta\nu_H$ desselben wird uns im folgenden stets als Maßeinheit dienen. Sie beträgt nach (20) wegen $E = e$:

$$\Delta\nu_H = \frac{N\alpha B}{2^4}. \tag{23}$$

Die Beobachtung hat ergeben

		$\Delta\lambda$	$\Delta\nu$
Michelson	H_α	0,14 Å. E.	0,32 cm^{-1}
„	H_γ	0,08	0,42
Fabry und Buisson	H_α	0,132	0,307

Der letzte Wert ist der zuverlässigste. Wir nehmen also an $\Delta\nu_H = 0{,}31$. Nach (23) berechnen wir daraus mit $\alpha = 13.10^{-6}$, $N = 1{,}1.10^5$ cm^{-1}:

$$B = 3{,}6 \text{ gegen } B = 8 \text{ nach (19)}.$$

Diese Unstimmigkeit im Koeffizienten B ist ein ernstlicher Einwand gegen die derzeitige Form unserer Theorie, aber nicht gegen die Theorie selbst. Sie weist auf eine Unvollkommen-

heit hin, die aber im folgenden nicht stören wird, wenn wir die weiteren Angaben stets auf den theoretischen Wert von $\Delta\nu_H$ beziehen und in diesem den Koeffizienten B erfahrungsgemäß korrigiert denken. Bezüglich der Stärke der beiden Dublettkomponenten ergibt die Beobachtung in Übereinstimmung mit der Theorie (§ 5a) und dem allgemeinen Tatbestand bei Nebenserien, daß die stärkere Komponente die rötere ist.

Wegen des variabeln Termes sollten die beiden Dublettlinien begleitet sein bei H_α von je einem, bei H_β von je zwei, bei H_γ von je drei Satelliten etc. (vgl. § 5h), deren Intensitäten nach Rot abnehmen. Wegen der großen Unschärfe der H-Linien und der geringen Abstände dieser hinzutretenden Komponenten ist ihre Beobachtung wenig aussichtsvoll. Wenn einige Beobachter gelegentlich von mehreren Komponenten der H-Linien sprechen, so liegt es nahe, dies auf einen ungewollten Stark-Effekt zu schieben. Weniger wegen der Möglichkeit einer experimentellen Prüfung als wegen der späteren Anwendung auf Li und zur Erläuterung der allgemeinen Behauptungen in § 5 gebe ich hier die Figuren für H_α und H_β. Die Länge der Linien soll in einem qualitativen Maßstab die mutmaßlichen Intensitäten darstellen. (Indem wir die Intensität

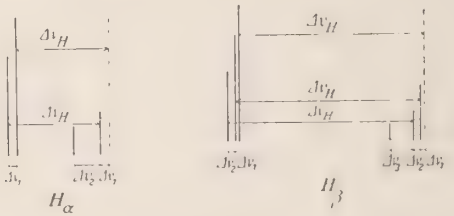


Fig. 1

der Kreisbahn gleich 1 nehmen, lassen wir die für die Ellipsenbahnen mit wachsender Exzentrizität gleichmäßig zu Null abnehmen.) Der Maßstab für die Schwingungszahlen mußte bei H_β doppelt so groß gewählt werden wie bei H_α, um die Figur nicht zu undeutlich zu machen. In den entsprechenden Figuren

für H_γ und H_δ würden sich die Komponenten so enge an die Dublettlinien herandrängen (wegen des hier auftretenden Faktors $\frac{1}{5^4}$ bzw. $\frac{1}{6^4}$), daß sie nicht mehr zu zeichnen, geschweige denn zu beobachten sind.

Zur Erläuterung diene folgendes. Bei H_α, linke rötere Liniengruppe, entspricht die Hauptlinie der Entstehungsweise aus zwei Kreisbahnen

$$(n, n') = (2,0),\ (m, m') = (3,0),\ \text{Intens.} = 1.1.$$

Der Satellit dieser Linie gehört zu dem Schema

$$(n, n') = (2,0),\ (m, m') = (2, 1),\ \text{Intens.} = 1 \cdot \frac{2}{3}.$$

Der gegenseitige Abstand beider beträgt nach (21) und (23)

$$(24)_1 \qquad \Delta\nu_1 = \frac{1}{2}\,\frac{NaB}{3^4} = \frac{1}{2}\,\frac{2^4}{3^4}\,\Delta\nu_H = \frac{8}{81}\,\Delta\nu_H.$$

Bei H_α, rechte violettere Liniengruppe, ist das Schema

$$(n, n') = (1,1),\ (m, m') = (3,0)$$

nach unserer Auffassung nicht realisierbar wegen zunehmender radialer Quantenzahl des Überganges. Die zugehörige Linie ist daher in der Figur punktiert gezeichnet. Die stärkste Linie dieser Gruppe gehört vielmehr zu dem Schema

$$(n, n') = (1,1),\ (m, m') = (2,1),\ \text{Intens.} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}$$

und die schwächste Linie zu

$$(n, n') = (1,1),\ (m, m') = (1,2),\ \text{Intens.} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}.$$

Der gegenseitige Abstand der beiden letzteren Linien wird nach (21)

$$(24)_2 \qquad \Delta\nu_2 = \frac{3}{2}\,\frac{NaB}{3^4} = \frac{3}{2}\,\frac{2^4}{3^4}\,\Delta\nu_H = \frac{8}{27}\,\Delta\nu_H.$$

Entsprechend ist die Figur für H_β gezeichnet. Die Abstände der aufeinander folgenden Komponenten der röteren Gruppe sind hier nach (22)

$$(25)_1 \qquad \Delta\nu_1 = \frac{1}{48}\Delta\nu_H, \quad \Delta\nu_2 = \frac{1}{24}\Delta\nu_H$$

und die der violetteren Gruppe

$$(25)_2 \qquad \Delta\nu_2 = \frac{1}{24}\Delta\nu_H, \quad \Delta\nu_3 = \frac{1}{8}\Delta\nu_H.$$

Die Aussicht für den Nachweis dieser Feinstruktur ist hiernach bei H_α und H_β gering, noch geringer bei den höheren Gliedern der Balmer-Serie.

2. Ultraviolette Serie.

Dieselbe hat die Formel

$$\nu = N\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{m^2}\right), \quad m = 2, 3, 4, \ldots$$

unter Fortlassung der Korrektionsglieder. (Natürlich müßten wir hier und im folgenden von unserem Standpunkte aus eigentlich schreiben $m + m'$ statt m.) Sie ist von Lyman gemessen worden, neuerdings bis nahe an die Grenzfrequenz $\nu = N$ heran. Sie gibt das einfachste Beispiel für den in § 5 g besprochenen Hauptserien-Fall mit konstantem einfachen Term. Ihre aufeinander folgenden Linien sollen hiernach sein ein Dublett, Triplett etc. Die bisherigen Messungen reichen wohl nicht aus, um dieses zu prüfen.

3. Ultrarote Serie.

Von Ritz vorhergesagt und von Paschen in ihren zwei ersten Nummern beobachtet, ist die Serie

$$\nu = N\left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{m^2}\right), \quad m = 4, 5, 6, \ldots$$

Sie besteht nach unserer Theorie wegen des konstanten Termes $\frac{1}{3^2}$ der Hauptsache nach aus einem Triplett von konstanter Schwingungsdifferenz. Die von Rot nach Violett auf-

einander folgenden und ihrer Intensität nach abnehmenden Komponenten haben nach (21) die Abstände:

$$\Delta\nu_1 = \frac{1}{2}\frac{N\alpha B}{3^4} = \frac{1}{2}\frac{2^4}{3^4}\Delta\nu_H = \frac{8}{81}\Delta\nu_H,$$

$$\Delta\nu_2 = 3\Delta\nu_1 = \frac{8}{27}\Delta\nu_H.$$

Als Bild dieses Tripletts kann man die für He gemeinte Fig. 2a ansprechen, wenn man diese auf $\frac{1}{16}$ in den Schwingungszahlen und Schwingungsdifferenzen reduziert. Bei H wird hiernach die absolute Größe dieses Tripletts sehr klein, derart, daß seine Beobachtung zumal im ultraroten Frequenzgebiet wohl ausgeschlossen ist.

Einfach geladenes Helium.

Wenngleich sich aus der Dispersionstheorie[1]) ergeben hat, daß das neutrale Heliumatom nicht die einfache von Bohr angenommene Gestalt haben kann, daß vielmehr der Heliumkern selbst schon komplizierter gebaut sein muß, liefern die Funkenspektren des Heliums, bei denen dieses also ein Elektron verloren hat und daher einfach positiv geladen ist, bisher keine Andeutung dieser Komplikation. Wir werden also gegenwärtig das geladene Helium als Wasserstoff-gleich behandeln, mit dem Unterschiede natürlich, daß hier $E = 2e$ zu setzen ist. Bekanntlich sind die Funkenspektren des Heliums früher als Hauptserie und II. Nebenserie des Wasserstoffs beschrieben worden und sollen auch hier der Kürze halber so bezeichnet werden. Auf die charakteristische Verschiedenheit der Rydbergschen Zahl, welche die Zugehörigkeit zum Helium beweist, brauchen wir nicht einzugehen, da es uns nur auf die Differenzen der Schwingungszahlen ankommt, nicht auf deren Absolutwerte.

[1]) P. Debye, diese Berichte, Januar 1915. A. Sommerfeld, Elster und Geitel. Festschrift, pag. 578. Braunschweig 1915.

4. Sog. Hauptserie des Wasserstoffs.

Ihre Formel ist im Groben

$$\nu = 4N\left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{m^2}\right),\ m = 4, 5, 6, \ldots$$

Der konstante Term bedingt ein Triplett von konstanter Schwingungsdifferenz durch die ganze Serie mit dem Komponentenabstand 1 : 3 und mit nach Violett abnehmendem Intensitätsverhältnis. Wegen des Faktors $\left(\frac{E}{c}\right)^4 = 16$ sind die absoluten Werte der Schwingungsdifferenzen hier 16 mal günstiger wie im vorhergehenden Falle, nämlich

$$\Delta\nu_1 = \frac{128}{81}\Delta\nu_H,\ \Delta\nu_2 = \frac{128}{27}\Delta\nu_H. \tag{26}$$

Diese Tripletts sind durch mehrere Glieder der Serie hindurch von Paschen beobachtet worden mit dem theoretischen Komponentenabstand 1 : 3 und genau im richtigen Verhältnis zu den Wasserstoff-Dubletts. Ich berechne z. B. nach den Formeln (26) aus den Paschen'schen Messungen von $\Delta\nu_1$ und $\Delta\nu_2$ beim ersten Gliede der Serie rückwärts $\Delta\nu_H = 0{,}31$ bzw. 0,30. Auch die Schätzung des Intensitätsverhältnisses liegt im Sinne der Theorie. Über die Zahlen seiner Messungen wird Herr Paschen demnächst selbst berichten. Es sei bemerkt, daß Beobachtung und Theorie unabhängig voneinander vorgegangen und nur durch einen Briefwechsel in Verbindung gebracht worden sind.

5. Sog. II. Nebenserie des Wasserstoffs.

Die Glieder dieser Serie mit ungeradem m bilden die Pickeringsche Serie; diejenigen mit geradem m sind kürzlich zuerst von Evans[1]) beobachtet, liegen in nächster Nähe der Balmer-Linien und weichen von ihnen nur wegen des verschiedenen Wertes von N ab. Die zusammenfassende Darstellung der Gesamtserie im Groben lautet

$$\nu = 4N\left(\frac{1}{4^2} - \frac{1}{m^2}\right),\ m = 5, 6, 7, \ldots$$

[1]) Phil. Mag., Februar 1915, pag. 284.

Wegen des konstanten Termes erwarten wir, daß die Feinstruktur jeder Linie ein Quartett ist mit den Komponentenabständen, vgl. (22)

$$\Delta\nu_1 = \frac{1}{3}\,\frac{NaB}{4^4}\,2^4 = \frac{1}{3}\,\Delta\nu_H,\quad \Delta\nu_2 = \frac{2}{3}\,\Delta\nu_H,\quad \Delta\nu_3 = 2\,\Delta\nu_H.$$

Die letzte schwächste Linie dieses Quartetts ist im richtigen Abstand $3\,\Delta\nu_H$ von der Hauptlinie von Paschen in mehreren Gliedern der Serie gefunden worden; von der zweiten und dritten Komponente dagegen hat sich bisher nichts ergeben. Einstweilen bin ich geneigt, diesen negativen Befund auf mangelnde Auflösung zu schieben. Auch Paschen meint, daß seine bisherigen Beobachtungen noch nicht gegen die Existenz dieser zwei Komponenten entscheiden. Die Linien sind nur schwach photographiert. Dabei kann eine so feine Struktur unbemerkt bleiben.

In Fig. 2b ist dieses Quartett, in Fig. 2a das vorige Triplett dargestellt, wie es dem konstanten Term allein entspricht. Das Hinzukommen des variabeln Terms bedingt nach unserer Auffassung Satelliten auf der roten Seite, und zwar

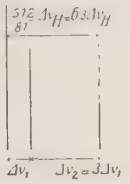


Fig. 2a

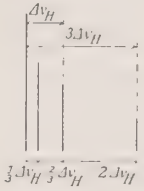


Fig. 2b

mit der Seriennummer von zunehmender Zahl und abnehmenden Abständen von der Hauptlinie. In den höheren Seriengliedern kann sich daher der variable Term nur mehr durch eine Abschattierung der betreffenden Hauptlinie nach Rot geltend machen. Die höheren Serienglieder würden daher direkt das in den Fig. 2 dargestellte Endgebilde verwirklichen. Bei den niederen Seriengliedern würde dagegen durch das Hinzu-

treten der Satelliten und das Ausfallen der Hauptlinien (vgl. die in Fig. 1 punktierten Linien) auch in den Schwingungsverhältnissen gewisse Abweichungen von dem hier dargestellten Endgebilde hervorgebracht werden. Die fraglichen Abweichungen können nach dem Vorbilde von Fig. 1 und den dort gegebenen Erläuterungen leicht konstruiert werden. Als Beispiel vgl. das Li-Dublett im nächsten Paragraphen. Es sei bemerkt, daß die oben mitgeteilte, an Gl. (26) angeschlossene Berechnung von $\Delta\nu_H$ aus den Paschen'schen Messungen des He-Tripletts bereits den Endzustand des Tripletts, nicht den durch den variabeln Term modifizierten Anfangszustand zu Grunde legt. Es sind zwar von Paschen bei jenem Triplett Begleiter auf der roten Seite gefunden, welche ihre Zugehörigkeit zu dem variabeln Term auch experimentell verraten und bei den höheren Seriengliedern an die Hauptlinien heranrücken resp. ganz verschwinden. Aber sie stimmen nur teilweise mit den Erwartungen unserer Theorie überein.

Auf Grund dieser Bemerkungen müssen wir daher unsere Folgerungen über die Satelliten, die aus dem variabeln Terme entstehen, als unsicherer hinstellen wie diejenigen über die Hauptlinien, die dem konstanten Terme entspringen. Deshalb wurde auch in den Fig. 2 vorerst von jenen Satelliten abgesehen.

§ 7. Lithium und neutrales Helium.

Wir wenden uns jetzt zu den Wasserstoff-ähnlichen Elementen. Diese werden wir unter den kleinsten Atomgewichten zu suchen haben.

Es handelt sich zunächst um den dem Werte $\frac{1}{2^2}$ benachbarten Term solcher Elemente und die dabei zu erwartenden Dubletts. Dieser Term tritt auf als positives konstantes Glied der I. und II. Nebenserie und als negatives Glied in der ersten Linie der Hauptserie. Dem letzteren Vorkommen entsprechend wird der Term allgemein mit $2p$ bezeichnet. Den äußerst nützlichen Tabellen von Dunz[1]) entnehme ich folgende Werte:

[1]) Bearbeitung unserer Kenntnisse von den Serien, Diss. Tübingen 1911.

	$2p$	$\frac{N}{2p}$
Li	28581	$(2 - 0{,}041)^2$
He	29221	$(2 - 0{,}063)^2$
Parhe	27174	$(2 + 0{,}009)^2$
H	27419	2^2

An erster Stelle steht Lithium, an zweiter dasjenige Heliumspektrum, dessen Linien als Dubletts beobachtet werden, an dritter Stelle das früher als Parhelium bezeichnete Heliumspektrum, welches einfache Linien zu haben scheint, an letzter Stelle der entsprechende Wasserstoffterm $\frac{N}{2^2}$. Nach der ersten Zeile weicht also *Li* und mehr noch *He* nach der einen Seite, Parrhelium sehr wenig nach der anderen Seite von Wasserstoff ab. Diese Abweichung bringt die zweite Zeile noch rationeller zum Ausdruck durch Vergleich des Nenners des betreffenden Serienterms mit dem Balmerschen Nenner 2^2.

Aus der Ähnlichkeit der Serienterme schließen wir auf eine Ähnlichkeit der Atomfelder und der einschlägigen Elektronenbahnen. Also wird auch bei *Li* der Term $2p$ entstehen entweder aus einem annähernden Kreis oder aus einer Ellipse von annähernd dem Verhältnis $1/2$ zwischen kleiner und großer Achse. Die zugehörige Struktur wird also die eines Dubletts sein von annähernd der Größe des Wasserstoffdubletts.

Daß die Lithiumlinien doppelt sein müssen, war nach der Analogie mit den Serien der übrigen Alkalien zu vermuten. Zeeman hat die Dublizität von $\lambda = 6708$ zuerst nachgewiesen. Vollständigere Daten verdanken wir Kent.[1]) Kent findet aus der II. Nebenserie bzw. dem zusammenfallenden ersten Gliede von Hauptserie und II. Nebenserie

$$\Delta\nu = 0{,}336,\ 0{,}339,\ 0{,}340\ \mathrm{cm}^{-1}$$

und aus dem ersten bzw. zweiten Gliede der I. Nebenserie

$$\Delta\nu = 0{,}306,\ 0{,}326\ \mathrm{cm}^{-1}.$$

[1]) Astrophysical Journal, Bd. 2, 1914, pag. 343. Die Arbeit ist in Tübingen ausgeführt.

Wir haben also, wie wir erwarteten, fast genau das Wasserstoffdublett $\Delta\nu = 0{,}31\ \mathrm{cm}^{-1}$.

Den Unterschied zwischen den $\Delta\nu$ der I. und der II. Nebenserie hält Kent für reell. Ich möchte in dieser Hinsicht mit allem Vorbehalt auf folgende Erklärungsmöglichkeit hinweisen. Die erste Linie der ersten Nebenserie entspricht durchaus H_α (wie wir noch sehen werden, ist der negative zweite Term dieser Serie bei Li noch Wasserstoff-ähnlicher wie der positive erste): man kann also für diese Linie die erste Fig. 1 heranziehen, ebenso für die zweite Linie die zweite Fig. 1. Mißt man nun in jener als Dublettabstand den Abstand von der Hauptlinie links bis zu der Hauptlinie rechts, die um $\Delta\nu_1 = \frac{8}{81}\Delta\nu_H$ (vgl. Gl. $(24)_1$) von der punktierten Linie absteht, so erhält man einen um 10 % kleineren Abstand als das theoretische $\Delta\nu_H$. Auf die Li-Linie übertragen würde sich an Stelle des Dublettabstandes 0,34, wie er aus der II. Nebenserie folgt, der um 10 % kleinere Wert 0,31 ergeben, der bei der ersten Linie der I. Nebenserie tatsächlich beobachtet ist. Mißt man ebenso in der zweiten Fig. 1 den Dublettabstand von der Hauptlinie links bis zu der Mitte der beiden stärkeren Komponenten rechts, die nach $(25)_1$ um

$$\frac{\Delta\nu_1}{2} + \frac{\Delta\nu_2}{2} = \frac{1}{32}$$

von der punktierten Linie absteht, so findet man einen um 3 % kleineren Wert des Abstandes als den mit $\Delta\nu_H$ bezeichneten Wert. Dementsprechend können wir bei der zweiten Linie der I. Nebenserie von Li statt des sonst beobachteten Wertes 0,34 den um 3 % kleineren Wert 0,33 erwarten, was ebenfalls der Beobachtung entspricht. Bei der II. Nebenserie dagegen tritt diese Komplikation nicht auf, weil der Term ns bekanntlich stets einfach ist. Wenn unsere Deutung richtig ist, würden wir hier eine sehr befriedigende Bestätigung des bei den Balmer-Linien nicht nachweisbaren Einflusses des zweiten Terms auf die Dublettbreite haben, von dem am Ende von § 6, 1 die Rede war.

Beim Helium ist die in der obigen Tabelle dargestellte Abweichung des Serienterms vom Wasserstoff größer als beim Lithium und liegt nach derselben Seite wie bei letzterem. Während wir bei *Li* eine kleine Vergrößerung des Wasserstoffdubletts hatten, werden wir bei *He* eine größere Vergrößerung desselben erwarten. Tatsächlich ergeben die Tabellen für *He* $\Delta\nu = 1{,}05\ \mathrm{cm}^{-1}$.

Bei Parhelium ist die Abweichung des fraglichen Terms viel kleiner als bei Lithium und liegt nach der anderen Seite. Hier werden wir daher eine geringe Verkleinerung des Wasserstoffdubletts erwarten, d. h. einen Wert $\Delta\nu < 0{,}31\ \mathrm{cm}^{-1}$.

Damit stimmt es, daß Parhelium ein ausgezeichnetes Beispiel für scheinbar genau einfache Linien und für normalen Zeeman-Effekt liefert. Letzteres braucht natürlich nur zu heißen, daß der Paschen-Back-Effekt wegen Engheit des Dubletts schon bei kleinsten Magnetfeldern in Kraft tritt. Daß sich auch die Linien von Parhelium schließlich als doppelt herausstellen, ist natürlich keineswegs ausgeschlossen.

Noch Wasserstoff-ähnlicher als der Term $2p$ verhält sich bei *Li*, *He* und Parhelium der Term $3d$, wie die folgende Tabelle zeigt

	$3d$	$\frac{N}{3d}$
Li	12202,5	$(3-0{,}0020)^2$
He	12208,0	$(3-0{,}0026)^2$
Parhe	12204,25	$(3-0{,}0022)^2$
H	12186,0	3^2

Dieser Term müßte also in großer Reinheit die interessanten Tripletts, der Term $4d$ die Quartetts zeigen, die wir oben beim Funkenspektrum des Heliums (§ 6, 4) besprachen. Wenn unsere obige Deutung der Abweichung des *Li*-Dubletts richtig ist, so haben wir in diesen bereits Merkmale der Existenz der Tripletts im ersten Gliede der I. Nebenserie des *Li*, des Quartetts im zweiten Gliede. In den gewöhnlich beobachteten Serien tritt der Term $3d$ leider nicht als konstanter positiver Term auf, so daß es hier zu einer vollen Ausbildung

des Tripletts wie beim Funkenspektrum des Heliums nicht kommen kann. Wohl aber kommt $3d$ als positiver Term der Bergmann-Serie vor. Wir müssen also behaupten, daß die Bergmann-Serie (abgesehen von einer etwaigen Multiplizität des zweiten eigentlichen Bergmann-Terms) aus Tripletts von konstanter Schwingungsdifferenz mit dem Komponentenabstande 1 : 3 besteht von der oben beim Wasserstoff in § 5, 3 berechneten (also leider sehr minutiösen) absoluten Größe, und zwar um so genauer, je Wasserstoff-ähnlicher der Term $3d$ ist. Auch bei *Na*, *K* u. a. ist die Ganzzahligkeit des Terms $3d$ recht befriedigend, so daß die Bergmann-Serien auch dieser Elemente guten Erfolg versprechen für den Nachweis unseres Triplett-Typus, ebenso die Bergmann-Serie mit dem positiven Term $4d$ für den Nachweis unseres Quartett-Typus.

Besonders hervorheben möchte ich, daß unsere Diskussion des *Li*-Dubletts die Brücke bildet zur Deutung der Dubletts der Alkalien, also zunächst des *D*-Dubletts, und anderer Wasserstoff-unähnlicher Terme. Wie in § 5 k) hervorgehoben, reichen die allgemeinen Betrachtungen hier natürlich nicht aus, sondern müssen spezielle Untersuchungen über die Atomfelder eingreifen, bei denen neue Konstanten zur Charakterisierung der letzteren eingeführt werden. Im Gegensatz dazu können wir sagen, daß unsere Wasserstoff-ähnlichen Multiplizitäten durchweg durch Null-konstantige Formeln dargestellt werden, d. h. nur universelle Größen benutzen.

§ 8. *K*- und *L*-Serie der charakteristischen Röntgen-Frequenzen.

Wir stützen uns auf folgende Tatsachen:

1. Die stärkste Linie der *K*-Serie, die K_α-Linie, beobachtet von $Z = 13$ bis $Z = 60$ durch Moseley[1]) und Malmer[2]) (Z = Ordnungszahl der Elemente im natürlichen System), wird nach Moseley dargestellt durch die Formel

$$\nu = N(Z-1)^2\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}\right). \tag{27}$$

[1]) Phil. Mag. 26, p. 1024, 27, p. 703.
[2]) Diss. Lund 1915.

Der Faktor $\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} = \frac{3}{4}$ ergibt sich nach Rydberg[1]) mit einer Genauigkeit größer als $1^0/_{00}$.

2. Die K_α-Linie ist nach weicheren Strahlen hin von einer schwächeren Linie begleitet, die wir $K_{\alpha'}$ nennen werden. Der Abstand von K_α und $K_{\alpha'}$ ist durch Malmer zwischen $Z = 35$ und $Z = 60$ gemessen. Wir sprechen also von dem K-Dublett und nennen seine Schwingungsdifferenz $\Delta\nu$.

3. Eine zweite Linie der K-Serie, die K_β-Linie, ist noch härter wie K_α und in demselben Bereich wie K_α gemessen. Eine dritte Linie K_γ, härter als K_β, ist bisher nur in wenigen Beispielen bekannt (Bragg, E. Wagner, Malmer).

4. Die bei gleichem Z weichere L-Serie ist, bei hohen Ordnungszahlen Z, die bestbekannte Serie. Ihre stärkste Linie heißt L_α, gemessen von Moseley u. a.

5. Von Moseley sind noch eine Reihe weiterer Linien der L-Serie teils gemessen, teils nur beobachtet. Die gemessenen Linien bezeichnet er mit L_β, L_η, L_γ. Sie sind alle härter wie L_α. Ihre Formel ist noch nicht bekannt.

6. Zwischen den Schwingungszahlen von K_α, K_β und L_α besteht nach Kossel[2]) die Beziehung

$$K_\beta - K_\alpha = L_\alpha. \tag{28}$$

Bohr weist darauf hin, daß diese Beziehung eine Anwendung des Ritzschen Kombinationsprinzips auf die Röntgen-Frequenzen bedeutet. Sie besitzt daher eine durch das ganze optische Spektrum hindurch bewährte große Sicherheit.

7. Aus (28) folgern wir als Darstellung der Frequenzen von K_β und L_α mit Rücksicht auf (27)

$$\left| \begin{array}{l} K_\beta \ldots \nu = N\left(\dfrac{(Z-1)^2}{1^2} - M\right) \\ L_\alpha \ldots \nu = N\left(\dfrac{(Z-1)^2}{2^2} - M\right). \end{array} \right. \tag{29}$$

[1]) Phil. Mag. August 1914, pag. 148.

[2]) Bericht der deutschen phys. Ges. 1914.

Die Bezeichnung M ist mit Rücksicht auf eine dritte, noch nicht entdeckte Serie, die „M-Serie", gewählt, deren Grenzfrequenz durch NM dargestellt wird. Zu (29) ist zu bemerken, daß der erste Term von K_β und L_α streng Wasserstoff-gleich wird, ebenso wie es erfahrungsgemäß beide Terme von K_α sind. Die Untersuchung des M-Terms, über dessen Charakter nichts ausgemacht ist, ist eine interessante Aufgabe, die uns aber hier nichts angeht.

Die Folgerung 2. Existenz eines K-Dubletts, hätten wir nach unserer Theorie unmittelbar aus der Darstellung (27) ziehen können. Während der erste Term derselben strenge einfach ist, ist der zweite doppelt. Da er negatives Vorzeichen hat, muß das Dublett umgekehrt liegen, wie z. B. beim Wasserstoff, d. h. die stärkere Linie (K_α) ist die härtere, was der Erfahrung entspricht. In derselben Weise können wir aus der Darstellung (29) schließen, daß L_α ein Dublett sein muß vermöge seines positiven ersten Terms. Der Charakter des zweiten Terms scheidet dabei, als unbekannt, völlig aus. Dieses L-Dublett muß dieselbe Schwingungsdifferenz und umgekehrte Lage wie das K-Dublett zeigen: Die stärkere Linie (L_α) ist die weichere; die schwächere zweite Linie des Dubletts ist auf der härteren Seite zu suchen. Nach unserer Formel für die aus dem Terme $\frac{1}{2^2}$ entstehenden Dubletts, Gl. (20), könnten wir die zweite Linie des L-Dubletts voraus berechnen. Wir würden sie mit der Moseleyschen Linie L_β identisch finden.

In der Tat hat S. W. Kossel[1]) empirisch gezeigt, daß in Schwingungszahlen gilt:

$$L_\beta - L_\alpha = K_\alpha - K_{\alpha'}. \tag{30}$$

Diese Feststellung Kossels ist unabhängig von meiner Theorie erfolgt und hat mich umgekehrt, bei Gelegenheit eines Colloquium-Vortrages von Hrn. Kossel, dazu geführt, meine Theorie auf die Röntgen-Frequenzen anzuwenden. Gl. (30) besagt, daß wir die Schwingungsdifferenz $\Delta\nu$ des K-Dubletts

[1]) Berichte der deutschen phys. Ges. 1916.

ebenso gut oder vielmehr besser aus dem L-Dublett entnehmen können, wenn wir als solches nach Kossel die Linien L_α und L_β zusammenfassen. Die Messung des L-Dubletts ist deshalb die bessere, weil die Wellenlängendifferenz bei den weicheren L-Linien größer ist, als bei gleicher Schwingungsdifferenz diejenige der härteren K-Linien.

Unsere Theorie erlaubt nun aber, nicht nur Existenz und Gleichheit der K- und L-Dubletts, sondern auch ihre Größe vorher zu sagen. Nach Gl. (20), der ersten und einfachsten Anwendung unserer Theorie, soll nämlich sein

$$\Delta \nu = \frac{N \alpha B}{2^4} \left(\frac{E}{e}\right)^2,$$

während andererseits nach Gl. (23) war

$$\Delta \nu_H = \frac{N \alpha B}{2^4}.$$

Also folgt

$$\Delta \nu = \left(\frac{E}{e}\right)^4 \cdot \Delta \nu_H = (Z-1)^4 \Delta \nu_H. \tag{31}$$

Hier ist $\frac{E}{e}$ nach der Moseleyschen Formel (27) für K_α und nach der daraus abgeleiteten Formel (29) für L_α gleich $Z-1$ angenommen worden.

Nach (31) muß also $\frac{\Delta \nu}{(Z-1)^4}$ konstant und gleich $\Delta \nu_H$ sein. Diese Beziehung bewährt sich mit außerordentlicher Schärfe durch das ganze natürliche System hindurch von $Z = 39\,(Y)$ bis $Z = 79$ (Au), d. h. in dem ganzen Bereich, in dem Messungen vorliegen. Es fallen eigentlich nur zwei Elemente, nämlich $Z = 34$ (Se) und $Z = 35$ (Br) aus der Regel heraus. Offenbar ist hier, bei Beginn der Reihe, wegen des fehlenden Anschlusses an Nachbarelemente, die Auswahl der richtigen Linie aus den Malmerschen Aufnahmen erschwert gewesen.

Das Nähere zeigt Fig. 3. Die aus den K-Dubletts gewonnenen Punkte sind durch Kreuze, die aus den L-Dubletts durch kleine Kreise bezeichnet. Die letzteren liegen viel regel-

mäßiger wie die ersteren, was wir nach Art ihrer Messung zu erwarten haben. Bei den K-Dubletts habe ich einige Werte nach gef. brieflicher Mitteilung von Hrn. Malmer gegenüber den in seiner Dissertation gedruckten Zahlen abgeändert. Die verbesserten Werte liegen fast durchweg mehr im Sinne unserer Regel, wie die ursprünglichen.

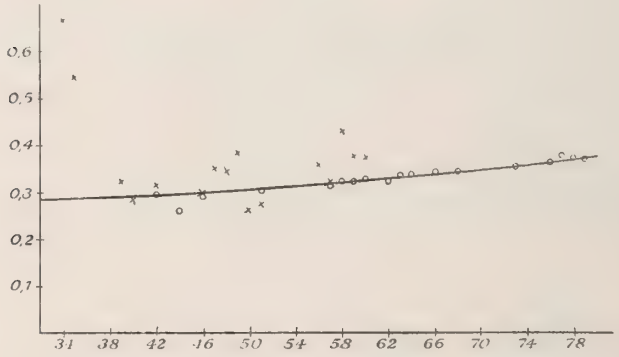


Fig. 3

Durch die Beobachtungswerte kann man ohne Zwang eine Kurve hindurch legen, welche sich durchweg in der Nähe des Wasserstoffwertes $\Delta\nu_H = 0{,}31$ hält. Unsere Regel ist also exakt bestätigt.

Der kleine Gang in den Versuchswerten, der sich in dem Anstieg der Kurve von kleineren zu größeren Z äußert, kann dabei verschiedene Ursachen haben.

a) Am nächsten liegt es, hierin eine Wirkung unseres Korrektionsgliedes zweiter Ordnung, des mit dem Faktor C behafteten Terms in Gl. (18) zu sehen. Bildet man nämlich nach dem Vorbilde von (20) die Differenz des Ausdruckes (18) für $n' = n = 1$ und für $n = 2$, $n' = 0$, so ergibt sich unter Beibehaltung auch des zweiten Korrektionsgliedes

$$\Delta\nu = \frac{W_{1,0} - W_{2,0}}{h} = \frac{N\alpha B}{2^4}\left(\frac{E}{e}\right)^4\left\{1 + \alpha D\left(\frac{E}{e}\right)^2\right\}.$$

Der hier eingeführte Koeffizient D ergibt sich nach (19) zu

$$D = \frac{C_{11} - C_{20}}{4B} = 10. \tag{32}$$

Tragen wir die Werte für $\Delta\nu_H$ und $\frac{E}{c} = Z - 1$ ein, so folgt nunmehr

$$\Delta\nu = \Delta\nu_H (Z-1)^4 \{1 + \alpha (Z-1)^2 D\}.$$

An der oberen Grenze unseres Gebietes, $Z = 79$, ist die Korrektion $\alpha (Z-1)^2$ keineswegs mehr zu vernachlässigen; sie beträgt nämlich:

$$\alpha (Z-1)^2 = 13.10^{-6} \cdot 78^2 = 8.10^{-2}.$$

Mit dem berechneten Werte $D = 10$ würde sich hiernach sogar ein wesentlich stärkerer Gang der Kurve in Fig. 3 ergeben, als er aus den Beobachtungen folgt. Die Beobachtungen geben nämlich eine Vergrößerung der Werte bei großen Z gegenüber denen bei kleinem Z nicht um 80 %, sondern nur etwa um 30 %.

Nach den Zweifeln, die sich am Ende von § 4 gegen die absoluten Zahlenwerte von A, B und C erhoben, wäre es möglich, daß der Wert $D = 10$ zu groß ist. Wir begnügen uns daher mit der qualitativen Feststellung, daß der Gang der Fig. 3 im Sinne eines positiven Wertes von D liegt, wie ihn unsere Theorie verlangt.

b) Eine andere Unsicherheit liegt in dem Faktor $(Z-1)^2$ der Moseleyschen Formel (27) und der daraus abgeleiteten Formeln (29). Im Sinne des Kombinationsprinzips und der allgemeinen Seriengesetze steht es nämlich frei, den fraglichen Faktor für beide Terme von K_α verschieden anzusetzen und dementsprechend (27) und (29) folgendermaßen abzuändern:

$$\nu = N\left(\frac{(Z-k)^2}{1^2} - \frac{(Z-l)^2}{2^2}\right) \ldots K_\alpha \tag{27'}$$

$$\begin{cases} \nu = N\left(\dfrac{(Z-k)^2}{1^2} - M\right) \ldots K_\beta \\ \nu = N\left(\dfrac{(Z-l)^2}{2^2} - M\right) \ldots L_\alpha. \end{cases} \tag{29'}$$

Hier weist der Buchstabe k auf „Grenze der K-Serie", der Buchstabe l auf „Grenze der L-Serie" hin. Während die Exaktheit der Faktoren $\frac{1}{1^2}$ und $\frac{1}{2^2}$ durch den Nachweis der K- und L-Dubletts im Sinne unserer Theorie aufs sicherste gestützt wird, sagt unsere Theorie über die jeweils wirksamen Kernladungen, d. h. die Faktoren $(Z-k)^2$ und $(Z-l)^2$ nichts aus. Eine Abänderung der Zahlen k und l gegen 1 wird ersichtlich neben der großen Zahl Z die Darstellung der Schwingungszahlen ν nur verhältnismäßig wenig beeinflussen. Übrigens ist in jedem Falle bei den Gl. (27) und (29) noch die Relativitäts-Korrektion für die Kreisbahnen hinzuzufügen, d. h. unser mit dem Koeffizienten A behaftetes Glied in Gl. (18), welches bei großen Werten von $Z-k$ und $Z-l$ keineswegs zu vernachlässigen ist. Auch aus diesem Grunde ist z. B. die Moseleysche Formel für K_α noch nicht als definitiv anzusehen.

Ist nun in dem L-Term tatsächlich $Z-1$ in $Z-l$ abzuändern, so ist auch Gl. (31) abzuändern in

$$\Delta\nu = (Z-l)^4\,\Delta\nu_H. \tag{31'}$$

Wir hätten dann, um in Fig. 3 konstante Ordinaten zu erhalten, nicht, wie wir es taten, $\frac{\Delta\nu}{(Z-1)^4}$, sondern $\frac{\Delta\nu}{(Z-l)^4}$ auftragen müssen. Unsere Darstellung in Fig. 3 muß daher auch aus diesem Grunde einen kleinen Gang zeigen (klein, da die jedenfalls mäßige Zahl l neben der großen Zahl Z steht). Übrigens bemerke man, daß die Relativitäts-Korrektion, auf deren Notwendigkeit bei der Darstellung der ν soeben hingewiesen wurde, für die $\Delta\nu$ durch Differenzbildung herausfällt. Die Feinstruktur der K- und L-Linien gestattet daher, die Natur des L-Terms unmittelbarer und einfacher zu prüfen, als es die durch die Relativitäts-Korrektion komplizierte Lage der K- und L-Linien selbst ermöglicht.

c) Schließlich ist noch bei den L-Dubletts auf den möglichen Einfluß des negativen zweiten Terms (des Gliedes M in (29)) hinzuweisen. Wenn dieser Term, wie es wahrschein-

lich ist, den Charakter $\frac{1}{3^2}$ hat und daher, für sich betrachtet, zu Tripletts Anlaß gibt, so würde für das Dublett (L_α, L_β) genau dasselbe zutreffen wie für die Wasserstoff-Linie H_α; wir können uns daher, vom Maßstabe abgesehen, direkt auf Fig. 2 beziehen. Aus dieser Figur geht hervor, einmal, daß L_α und L_β von Satelliten auf der weicheren Seite begleitet sein sollen (bei Pt-Aufnahmen von E. Wagner sind solche in der Tat vorhanden), sodann aber, daß der gemessene Abstand der Hauptlinie L_α und der Hauptlinie L_β nicht genau gleich sein soll dem theoretischen Dublett, welches wir aus dem ersten Term vom Charakter $\frac{1}{2^2}$ errechneten, sondern etwas kleiner ausfallen müßte, nämlich, um den Abstand der beiden ersten Linien des Tripletts, welches zu dem zweiten Term $\frac{1}{3^2}$ gehört. Um also das gemessene L-Dublett auf den theoretischen Wert (31) von $\Delta\nu$ zu korrigieren, der dem ersten Term allein entspricht, hätten wir die Beobachtungswerte des L-Dubletts um einen gewissen Bruchteil ihres ganzen Wertes zu vergrößern. Dadurch würde die ganze Kurve der Fig. 3 ein wenig gehoben und die durchschnittliche Übereinstimmung ihres Verlaufes mit $\Delta\nu_H = 0{,}31$ noch verbessert werden. Dagegen würde bei den K-Dubletts eine entsprechende Korrektion nicht anzubringen sein, weil der erste Term von K_α einfach ist und deshalb das aus dem zweiten Term berechnete Dublett in der Beobachtung der K-Serie rein zum Ausdruck kommt.

Die Verhältnisse liegen bei der K- und L-Serie genau so, wie bei der Hauptserie und II. Nebenserie einerseits, der I. Nebenserie andrerseits der im vorigen Paragraphen besprochenen Lithium-Dubletts. Da der erste Term der Hauptserie und der zweite der II. Nebenserie einfach ist, ergaben sich bei diesen Serien Dubletts von strenge konstanter Schwingungsdifferenz. Dagegen ergab die Beobachtung in der I. Nebenserie ein merklich niedrigeres $\Delta\nu$, welches wir im Anschluß an Fig. 1 auf die Multiplizität des zweiten Terms dieser Serie

schoben. Überhaupt besteht eine durchgehende Anologie zwischen der K-Serie der X-Strahlung und den Hauptserien des sichtbaren Lichtes, sowie zwischen der L-Serie der X-Strahlung und der sichtbaren I. Nebenserie. —

Offenbar spielt der Vergrößerungsfaktor $(Z-1)^4$ (resp. allgemeiner $(Z-l)^4$) bezüglich der Beobachtbarkeit der K- und L-Dubletts ganz dieselbe Rolle wie der für das Funkenspektrum charakteristische Faktor $2^4 = 16$ bei den Paschen'schen Beobachtungen der *He*-Tripletts. So wie diese Tripletts und die von uns vermuteten anologen Quartetts gegenüber den entsprechenden Erscheinungen beim Wasserstoff versechszehnfacht erscheinen und dadurch der genauen Messung zugänglich werden, erscheint im Gebiete der Röntgen-Strahlung das minutiöse Wasserstoff-Dublett durch den Faktor $(Z-1)^4$, der bei den schweren Elementen von der Ordnung 10^6 wird, makroskopisch vervielfacht; es ist daher in diesem Gebiete, trotz seiner einstweilen noch wenig ausgebildeten Meßtechnik, viel genauer möglich, die zweifache Natur der Quantenbahnen des Terms $\frac{1}{2^2}$ festzustellen, als bei der direkten Beobachtung der Wasserstoff-Dubletts. Man könnte geradezu sagen, daß man den genauesten Wert für das Wasserstoff-Dublett erhält durch Messung der Schwingungsdifferenz von L_β und L_α bei Platin oder Gold.

Nachschrift bei der Korrektur, 10. Februar 1916.

1. Die inzwischen von Hrn. Planck veröffentlichte Strukturtheorie des Phasenraumes (D. physik. Gesellschaft, 1915, pag. 407 und 438) deckt sich in ihrer Anwendung auf das Coulombsche Gesetz (Berliner Akademie, 16. Dezember 1915) vollständig mit meiner die Phasenintegrale betreffenden Forderung. Man überzeugt sich davon am direktesten, wenn man die Formeln (18) für große Achse und Parameter der quantentheoretisch ausgezeichneten Ellipsen bei Planck (Berl. Akad.) vergleicht mit meinen Formeln (21) für die große und kleine Achse derselben

oder mit den Fig. 3, 4, 5 in der Abh. I. Die Auffassung der Balmerschen Serie dagegen ist bei Planck und mir grundsätzlich verschieden; soviel ich sehe, kann die Plancksche Auffassung keine Rechenschaft geben von den Multiplizitäten der Spektrallinien, im Besonderen nicht von den Wasserstoff-Dubletts.

2. Die mehrfach betonte Unstimmigkeit in der absoluten Größe des Wasserstoff-Dubletts läßt sich dadurch beseitigen, daß man die Phasenintegrale in II, § 3 nicht von 0 bis $\frac{2\pi}{\gamma}$ erstreckt, sondern, ebenso wie bei nicht-relativistischer Rechnung und scheinbar ohne Rücksicht auf die Perihelbewegung der Kepler-Ellipse, von 0 bis 2π. Dann ergibt sich an Stelle von (12) und (13):

$$p = \frac{nh}{2\pi}, \quad 1 - \varepsilon^2 = \frac{n^2\gamma^2}{(n' + n\gamma)^2}$$

und an Stelle der Zahlenwerte in (19) und (32)

$$A = 1, \; B = 4, \; C = 2 + 12\frac{n'}{n} + 24\left(\frac{n'}{n}\right)^2 + 4\left(\frac{n'}{n}\right)^3, \; D = \frac{5}{2}.$$

Der Wert $B = 4$ stimmt mit dem im Anfang von § 6 aus den besten Messungen abgeleiteten Werte $B = 3{,}6$ überein; der Unterschied von 10 % entspricht dabei genau dem Umstande, daß ebenso wie *Li* (§ 7) oder wie in der *L*-Serie (§ 8) die Dublettgröße bei H_α um 10 % zu klein gemessen wird gegenüber dem idealen Grenzwert dieses Dubletts in den höheren Seriengliedern. Andererseits stimmt der Wert $A = 1$ überein mit derjenigen Relativitätskorrektion, die unmittelbar aus den Kreisbahnen berechnet wurde (Schluß von § 4), und beseitigt daher die störende Diskontinuität beim Übergange von den Ellipsenbahnen mit kleiner Exzentrizität zu der Kreisbahn. Endlich erklärt der gegen früher viermal kleinere Wert von D auch im Wesentlichen quantitativ den Gang der Kurve in Fig. 3. Die Hebung der Kurve bei großen Z beträgt nämlich jetzt nicht mehr 80 %, sondern nur 20 % (nach den Beobachtungen waren es 30 %). Unser abgeänderter Quantenansatz

behebt also alle zahlenmäßigen Unvollkommenheiten unserer Theorie, ohne die allgemeinen Folgerungen zu beeinträchtigen. Der neue Ansatz läßt sich auch sehr schön verstehen: als Quantenansatz vom Standpunkte eines mit der Perihelbewegung mitrotierenden Koordinatensystems, durch dessen Einführung das Problem der Quantenverteilung im relativistischen Falle reduziert wird auf dasjenige im nicht-relativistischen Falle unserer Abhandlung I, so daß jede Willkür oder Unsicherheit im Ansatze behoben ist.

Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München

1915. Heft I
Januar- bis Märzsitzung

München 1915
Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Inhalt.

Seite

Mitteilungen über die Klassensitzungen vom Januar, Februar u. März 1*

Abhandlungen.

P. Debye: Die Konstitution des Wasserstoff-Molekuls . . . 1

A. Pringsheim: Über eine charakteristische Eigenschaft sogenannter Treppenpolygone und deren Anwendung auf einen Fundamentalsatz der Funktionentheorie 27

A. Pringsheim: Nachtrag zu der vorstehenden Abhandlung . 58

S. Finsterwalder: Eine neue Lösung der Grundaufgabe der Luftphotogrammetrie 67

M. Lagally: Zur Theorie der Wirbelschichten 79

G. Mittag-Leffler: Über die analytische Darstellung eines eindeutigen Zweiges einer monogenen Funktion 109

E. Czuber: Eine geometrische Aufgabe 165

Akademische Buchdruckerei von F. Straub in München.

Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München

1915. Heft II
Mai- bis Julisitzung

München 1915
Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Inhalt.

Seite

Mitteilungen über die Klassensitzungen vom Mai, Juni und Juli 5*

Abhandlungen.

H. Liebmann: Die Liesche Geraden-Kugeltransformation und ihre Verallgemeinerungen 189

S. Finsterwalder: Über die Ausgleichung des zukünftigen bayerischen Hauptdreiecksnetzes 199

A. Föppl: Die Lösung der Spannungsaufgabe für das Ausnahmefachwerk 211

A. Voss: Über die Transformation linearer Formen und die Lösung linearer Gleichungen 231

F. Böhm: Beiträge zum Äquivalenzproblem der Raumkurven . 257

O. Szász: Über eine besondere Klasse unendlicher Kettenbrüche mit komplexen Elementen 281

O. Frank: Anwendung des Prinzips der gekoppelten Schwingungen auf einige physiologische Probleme 289

E. Landau: Über Dirichlets Teilerproblem 317

Akademische Buchdruckerei von F. Straub in München.

Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München

1915. Heft III

November- und Dezembersitzung

München 1915

Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften

in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Inhalt.

Seite

Mitteilungen über die Klassensitzungen vom November und Dezember 9*

Verzeichnis der im Jahre 1915 eingelaufenen Druckschriften . . 13*

Abhandlungen.

M. Schmidt: Senkungserscheinungen an der Frauenkirche in München und Lageänderung von Hauptdreieckspunkten in Südbayern (mit 1 Tafel) 329

A. Endrös: Die Gezeiten, Seiches und Strömungen des Meeres bei Aristoteles 355

A. Pringsheim: Über die Weierstraßsche Produktdarstellung ganzer transzendenter Funktionen und über bedingt konvergente unendliche Produkte 387

H. Fischer: Über die Einwirkung von Brom auf einige Pyrrolderivate 401

G. Mittag-Leffler: Über einen Satz des Herrn Serge Bernstein 419

A. Sommerfeld: Zur Theorie der Balmerschen Serie 425

A. Sommerfeld: Die Feinstruktur der Wasserstoff- und der Wasserstoff-ähnlichen Linien 459

Akademische Buchdruckerei von F. Straub in München.

kad. der
4728

1

AMNH LIBRARY
100229658